GAZETA DE MATEMÁTICA
Janeiro 2002 - nº 142

Números Irracionais no Ensino Secundário

António Pereira Rosa
Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho, Lisboa

Para quê estudar estes problemas, se os números irracionais não existem ?

L. Kronecker, sobre a demonstração da transcendência de π devida a F. Lindemann.

1. Introdução

O objectivo deste trabalho é apresentar demonstrações simples (no sentido de serem acessíveis a estudantes do Ensino Secundário Regular ou Recorrente) da irracionalidade de alguns números: duas demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$ (a primeira como consequência do Teorema Fundamental da Aritmética e a segunda pelo método da descida infinita) e uma da irracionalidade de $\log_{10}(2)$. Experimentei nas minhas aulas as actividades descritas (pelo menos em parte) e tive uma reacção encorajadora dos alunos: é curioso e gratificante ver alunos do 12º ano fascinados com consequências simples da divisibilidade. Espero assim contribuir para uma revitalização do interesse pelos números irracionais, praticamente esquecidos no último ajustamento dos programas do ensino secundário: o estudo dos radicais foi quase abandonado e, com o uso indiscriminado das calculadoras, os números reais "reduzem-se" cada vez mais a um conjunto finito de números racionais.

A organização do trabalho é a seguinte: para cada uma das demonstrações referidas, indico os pré-requisitos, a unidade do programa em que pode ser inserida, uma estratégia para a apresentação aos alunos e faço ainda algumas observações sobre aspectos históricos, possíveis generalizações e eventuais ligações com outros assuntos. Qualquer das actividades propostas pode ser realizada à vontade numa aula de 50 minutos, ficando alguns complementos para "trabalho para casa" (TPC) a corrigir posteriormente. Termino esta introdução justificando sumariamente os exemplos escolhidos:

a) a demonstração clássica da irracionalidade de $\sqrt{2}$ atribuída por Aristóteles aos pitagóricos é, por um lado, de difícil generalização e, por outro, considerada muito artificiosa pela maioria dos alunos (falo por experiência própria); tentei pois arranjar outros processos de demonstração e os dois que indico parecem-me interessantes, pela facilidade de generalização, pela ligação a importantes temas de Aritmética que são frequentemente esquecidos e pela possibilidade de interessantes referências históricas.

b) ao escolher provar a irracionalidade de $\log_{10}(2)$ procurei combater a ideia generalizada de que os números irracionais "só aparecem quando há raízes", erro algo compreensível, dado que o estudo das dízimas praticamente já não se faz no ensino secundário e a demonstração da irracionalidade de números como π ou e é demasiado complicada para ser feita no ensino não superior. Por outro lado, o contacto dos alunos com os logaritmos reduz-se na maior parte dos casos à função logarítmica, que surge em geral como uma espécie de "parente pobre" da exponencial, ligada ao estudo de fenómenos físicos como os tremores de terra (escala de Richter) ou à cultura de bacilos. Penso que a apresentação de uma actividade como a que proponho contribui positivamente para uma melhor compreensão das propriedades dos logaritmos e para contrabalançar a tendência do ensino da Matemática apenas pelas suas aplicações a casos ditos "da vida real", que, na minha opinião, está demasiado em voga no Ensino Secundário.

2. Primeira demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

A prova baseia-se no chamado Teorema Fundamental da Aritmética: qualquer número natural maior do que 1 pode ser decomposto num produto de factores primos de forma única (a menos da ordem dos factores). Este teorema não é dado no ensino secundário, embora seja implicitamente admitido na decomposição em factores primos, estudada logo no 2º ciclo do ensino básico e amplamente utilizada. Há aqui um curioso paralelo com a História: embora o resultado fosse conhecido e amplamente utilizado por muitos matemáticos (os resultados essenciais para a prova constam já dos *Elementos* de Euclides), o primeiro a apresentar uma demonstração foi Gauss nas *Disquisitiones Arithmeticae* (1801); para uma especulação curiosa sobre os motivos que terão feito com que o teorema "escapasse" a Euclides, pode ver-se [HW].

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\sqrt{2}$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b (que podemos supor primos entre si e maiores que 1) tais que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, donde $a^2 = 2b^2$; segue-se que o expoente do primo 2 na decomposição em factores do primeiro membro é par e na do segundo membro é ímpar, o que contradiz o Teorema Fundamental da Aritmética.

Pré-requisitos

Noções elementares de divisibilidade; decomposição em factores primos; propriedades das potências.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 11º ano, considerada como parte do tema geral "Lógica e Raciocínio Matemático", para o ensino regular; unidade A1 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) rever a decomposição em factores primos, fazer alguns exemplos e enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética.
b) mostrar que se a decomposição em factores primos de n é $p_1^{r_1} p_2^{r_2} ...... p_q^{r_q}$, a decomposição de n^2 será $p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} ...... p_q^{2r_q}$, fazendo primeiro um exemplo numérico e depois o caso geral por aplicação das regras das potências.
c) explicar o que é uma prova por redução ao absurdo e proceder à demonstração como acima indicado.
d) dividir os alunos em grupos, encarregando cada um destes de provar a irracionalidade de um dos números $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$.
e) comparar as demonstrações e chegar à generalização: *Se* N *é um número natural que não é um quadrado perfeito,então* $\sqrt{N}$ *é irracional.*

TPC

Provar que $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Observações

a) o resultado acima pode ser generalizado de maneira óbvia, chegando-se à conclusão de que se o número natural N não é uma n-ésima potência perfeita, então $\sqrt[n]{N}$ é irracional.

b) nalguns manuais para o ensino secundário, como [Ne], aparece sem demonstração o seguinte teorema, atribuído a Gauss: *as eventuais raízes racionais do polinómio de coeficientes inteiros* $x_n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ *são números inteiros e dividem* a_n. Este teorema cuja demonstração pode ser vista em [AM] permite uma prova imediata do resultado da observação anterior (considerar $x_n - N$) mas no livro referido surge apenas como um instrumento para a pesquisa de zeros. A este respeito, podem-se propor os seguintes exercícios, ambos a nível de 12º ano (ensino regular) e unidade A6 (ensino recorrente):

1. Provar que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional, considerando o polinómio x^4-10x^2+1.

2. Provar que o polinómio x^5-6x+3 tem raízes reais e que são todas irracionais.

3. Segunda demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$

Embora esta prova seja também por redução ao absurdo, baseia-se numa ideia completamente diferente: o chamado método da descida, devido a Fermat. Se pretendemos mostrar que uma propriedade ou relação não se verifica para nenhum número natural, basta provar que, se ela se verificasse para um dado número, seria também válida para um menor, obtendo-se assim uma sucessão estritamente decrescente de números naturais, o que é impossível (contradiz a boa ordenação de $\mathbb{N}$). Embora mais artificiosa que a anterior, é talvez mais atraente e elegante. Na verdade, o método da descida é o tipo de argumento que fascina os alunos.

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\sqrt{2}$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b tais que $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. Segue-se que $a^2=2b^2$ e então $\frac{2b-a}{a-b}$ é um número racional de denominador menor que b e cujo quadrado é 2. Com efeito:

1. como $a=b\sqrt{2}$, vem $a-b<b \Leftrightarrow a<2b \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b\sqrt{2}<2b \Leftrightarrow \sqrt{2}<2$.

2. quadrando a expressão $\frac{2b-a}{a-b}$, simplificando tendo em conta que $a=b\sqrt{2}$, vem $\left(\frac{2b-a}{a-b}\right)^2=\frac{6b-4\sqrt{2}b}{3b-2\sqrt{2}b}=2$

Obtemos assim uma sucessão estritamente decrescente de denominadores naturais, o que é impossível.

Pré-requisitos

Noções de cálculo com radicais e expressões algébricas simples.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 11º ano, considerada como parte da tema geral "Lógica e Raciocínio Matemático", para o ensino regular; unidade A1 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) motivar os alunos para a prova, referindo a propriedade da boa ordenação de $\mathbb{N}$. Comparar com o que se passa em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$.

b) explicar o que é uma demonstração por redução ao absurdo e proceder à demonstração como indicado (efectuando os cálculos com detalhe, como é natural).

c) concluir com uma breve referência à vida e obra de Fermat.

TPC

1. Justificar que na prova apresentada se tem $a>b$.

2. Provar a irracionalidade de $\sqrt{3}$ por um argumento de descida.

3. Mandar os alunos fazer um trabalho sobre a vida e os resultados obtidos por Fermat, em Teoria de Números ou

no problema das tangentes [trata-se, como é óbvio, de uma tarefa de muito maior escopo que as anteriores; exigirá tempo e apoio do professor. Será talvez de considerar nos trabalhos de projecto preconizados na actual proposta de revisão curricular de ensino secundário].

Observações

a) a prova apresentada pode ser adaptada por forma a mostrar que se o número natural N não é um quadrado perfeito, então $\sqrt{N}$ é irracional.
b) pode-se ver em [De] uma versão de carácter geométrico da prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ pelo método da descida.
c) recentemente (Novembro de 2000), o conhecido matemático americano Tom Apostol apresentou uma nova prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$ por um argumento de descida com carácter fortemente geométrico. O leitor interessado pode ver essa prova em [SN].
d) podem-se ver em [Ol] várias aplicações do método da descida à resolução de equações diofantinas, tópico muito importante na Teoria dos Números.
e) propriedades como a boa ordenação de N são consideradas pelos alunos absolutamente óbvias, o que, em minha opinião, é perfeitamente razoável a nível do ensino secundário. Creio que a maneira mais frutuosa de mostrar a sua importância é utilizá-las para provar resultados não-triviais, como o apresentado.

4. Logaritmos e números irracionais

Tal como a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ apresentada em 1., a prova da irracionalidade de $\log_{10}(2)$ baseia-se em propriedades simples da divisibilidade, pelo que são aplicáveis muitas das considerações aí feitas.

Prova (por redução ao absurdo)

Se $\log_{10}(2)$ fosse racional, existiriam dois números naturais a e b tais que $\log_{10}(2) = \frac{a}{b}$, donde se seguiria que $10^{\frac{a}{b}} = 2$; elevando ambos os membros ao expoente b, $10^a=2^b$, o que é absurdo, já que o primeiro membro é divisível por 5 e o segundo não.

Pré-requisitos

Noções elementares de divisibilidade; decomposição em factores primos; propriedades dos logaritmos e das potências.

Unidade do programa em que pode ser apresentada

Tema II do 12º ano para o ensino regular; unidade A7 para o ensino recorrente.

Estratégia para a apresentação

a) rever a decomposição em factores primos e enunciar o Teorema Fundamental da Aritmética.
b) explicar, se necessário, o que é uma prova por redução ao absurdo e proceder à prova como indicado.
c) dividir os alunos em grupos e mandar proceder à prova da irracionalidade de mais alguns números deste tipo, como $\log_7(6)$, $\log_9(4)$ e $\log_6(9)$.
d) comparar as várias provas e, se o nível da turma o permitir, chegar à seguinte generalização: "*Se a e b são números naturais maiores que* 1*, tais que a tem um factor primo que b não tem (em particular se a e b são primos entre si), $\log_a(b)$ é irracional*".

TPC

1. Justificar que na prova apresentada se pode supor que a e b são naturais e não inteiros quaisquer (o que é talvez menos óbvio do que na prova da irracionalidade de $\sqrt{2}$....)
2. Provar que $\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)$ é irracional.

3. Sendo a e b números inteiros distintos e maiores que 1 com os mesmos factores primos, mostrar por meio de exemplos que $\log_a(b)$ pode ser racional ou irracional.

4. Provar que $\dfrac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(3)}$ é irracional.

Observação

Se se pretende fazer a generalização referida acima, é talvez preferível argumentar que 5 é factor primo do primeiro membro e não é do segundo.

5. Referências

[Ab] Abrantes, P. (1985) - *Planificação no Ensino da Matemática*, Lisboa, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa.

[AM] Machado, A. (1997) - Consultório Matemático, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 36,* 61-64.

[Be] Bell, E. T. (1986) - *Men of Mathematics*, Simon & Schuster, New York (reimpressão da edição original de 1937).

[De] Delachet, A. (1977) - *L'Analyse Mathématique* (7ª edição),Vendôme, Presses Universitaires de France.

[HW] Hardy, G. H. e Wright, E. M. (1990) - *An Introduction to the Theory of Numbers* (5th edition), Oxford, Oxford University Press.

[Ne] Neves, M. A. (1997) - *Matemática 10º ano - Parte 2: Funções 1*, Porto, Porto Editora

[NZM] Niven, I. , Zuckerman, H. e Montgomery, H. (1991) - *An Introduction to the Theory of Numbers*, New York, John Wiley & Sons.

[Ol] Oliveira, G. N. (1981) - *Resolução de Equações em Números Inteiros*, Coimbra (notas de um curso integrado na Escola de Verão organizada pela Sociedade Portuguesa de Matemática).

[Pr1] DES (1996) - *Programa de Matemática (Ensino Secundário Recorrente)*, Lisboa, Ministério da Educação.

[Pr2] DES (1997) - *Programas de Matemática 10º, 11º e 12º anos*, Lisboa, Ministério da Educação.

[SN] Nápoles, S. (2001) - A raíz quadrada de 2 não é um número racional, *InforMat, nº 7,* 8.

Bartoon

Luís Afonso, publicado in Jornal Público, 3 Agosto 2000
(publicação gentilmente autorizada pelo autor)