GAZETA DE MATEMÁTICA nº 139
Julho de 2000

Nota sobre os Números Triangulares

José Morgado

Centro de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade do Porto

Neste artigo pretendemos divulgar algumas propriedades interessantes dos chamados *números poligonais*, especialmente dos *números triangulares*.

Tais propriedades serão todas ou quase todas conhecidas de quem trabalha em Matemática; mas a verdade é que noções relativas a números poligonais não são habitualmente incluídas em livros de Matemática adoptados no ensino pré-universitário; mesmo no ensino universitário, ou não têm sido incluídas ou tê-lo-ão sido raramente, apesar de tais noções serem já muito antigas.

Vejamos o que, a este respeito, nos dizem **Pierre Dedron** (Inspector Geral da Instrução Pública) e **Jean Itard** (Professor Agregado do Liceu Henri IV), no seu livro intitulado *Mathématiques et Mathématiciens*, Éditions Magnard, Boulevard Saint Germain, Paris VI^e (1959), pp. 32-33:

> "*A noção de número figurado é completamente estranha à tradição euclidiana. Entre os gregos, ela é exposta pelo neopitagórico* Nicómaco de Gerasa, *na sua Introdução à Aritmética.*[1]
>
> *[...] Se é difícil atribuir* a Pitágoras *a teoria completa dos números figurados, é, no entanto, razoável atribuir, quer a ele quer aos seus primeiros discípulos, as noções mais simples ligadas a tais números. Pontos dispostos em linha recta formam um número linear. Assim, todo o inteiro é* linear. *Disponhamos os números em triângulo, pondo sobre linhas horizontais consecutivas um ponto, depois dois, três, etc. ...*

Formamos assim os números triangulares $1, 3, 6, 10, etc.$"

1 Introdução

Consideremos as seguintes progressões aritméticas de números inteiros positivos:

$$\begin{array}{ll}
A_1: & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ r,\ \cdots \\
A_2: & 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots,\ 2r-1,\ \cdots \\
A_3: & 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots,\ 3r-2,\ \cdots \\
A_4: & 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ \cdots,\ 4r-3,\ \cdots \\
A_5: & 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \cdots,\ 5r-4,\ \cdots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_t: & 1,\ 1+t,\ 1+2t,\ 1+3t,\ 1+4t,\ \cdots,1+(r-1)t,\ \cdots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

cujas razões são, respectivamente, 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$, t, $\cdots$ e cujos termos gerais são respectivamente r, $2r-1$, $3r-2$, $4r-3$, $5r-4$, $\cdots$, $1+(r-1)t$, $\cdots$.

Para cada sucessão A_i, consideremos a sucessão B_i, que se obtém de A_i do modo seguinte: o primeiro termo de B_i é 1 e o termo de ordem r é a soma dos r primeiros termos da sucessão A_i. (Recordemos que a soma dos s primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_s, $\cdots$ é precisamente

$$\frac{a_1+a_s}{2}s;$$

e, já agora, recordemos também que a soma dos s primeiros termos de uma progressão geométrica b_1, b_2, b_3, $\cdots$, b_s, $\cdots$ de razão r é precisamente $\frac{b_1-b_s r}{1-r}$).

As sucessões B_i são as seguintes:

$$\begin{array}{ll}
B_1: & 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r(r+1),\ \cdots \\
B_2: & 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots,\ r^2,\ \cdots \\
B_3: & 1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r(3r-1),\ \cdots \\
B_4: & 1,\ 6,\ 15,\ 28,\ 45,\ \cdots,\ r(2r-1),\ \cdots \\
B_5: & 1,\ 7,\ 18,\ 34,\ 55,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r(5r-3),\ \cdots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_t: & 1,\ 2+t,\ 3+3t,\ 4+6t,\ 5+10t,\ \cdots,\frac{1}{2}r[2+(r-1)t],\ \cdots \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Os números da sucessão B_1 dizem-se *números triangulares*, os da sucessão B_2 dizem-se *números quadrangulares* ou *números quadrados*; os das sucessões seguintes dizem-se, respectivamente, *números pentagonais, hexagonais, heptagonais, octogonais*, etc. Os números que figuram em alguma das sequências B_1, B_2, $\cdots$, B_i, são genericamente designados por *números poligonais* ou *números figurados planos* ou simplesmente *números figurados*(2).

Ponhamos $m = 2+t$. Então os elementos da sucessão B_t podem ser representados como

$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\ 10m-5,\ \cdots,\ \frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)],\ \cdots$$

e são designados como *números m-gonais.*

O número m-gonal de ordem r é frequentemente representado como

$$p_r^{(m)} = \frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)].$$

Em particular, o número triangular de ordem r é representado por

$$p_r^{(3)} = \frac{1}{2}r[2+(r-1)(3-2)] = \frac{1}{2}r(r+1).$$

Como, neste trabalho, lidaremos sobretudo com números triangulares, representaremos o número triangular de ordem r simplesmente por

$$p_r^{(3)} = \frac{1}{2}r(r+1).$$

ou, mais simplesmente ainda, por

$$T_r = \frac{1}{2}r(r+1)$$

A propósito de números figurados, **Eric Temple Bell**, professor do Instituto de Tecnologia da Califórnia, escreveu o seguinte no seu livro *The Development of Mathematics*, 2^{nd} ed. (1945), p. 50:

> *"Pelas suas repercussões na aritmética superior de* Fermat *e de outros, nos séculos XVIII-XX, os números figurados dos pitagóricos (séculos VI e V a.C.) podem recordar-se como uma das contribuições mais sugestivas da aritmética à moderna aritmética superior. Estes números alcançaram também um certo prestígio na ciência de* Platão, *como, por exemplo, no seu* Timeu. *Os números triangulares, em particular, quando introduzidos na química de* Empédocles, *dos quatro* "elementos" *- terra, ar, fogo e água - foram em parte responsáveis pela singular conclusão metafísica de que toda a matéria é essencialmente triângulo."* (3)

2 Propriedades dos números triangulares

Teorema 2.1 *A soma de dois números triangulares consecutivos é um inteiro quadrado maior que 1 e, inversamente, todo o inteiro quadrado maior que 1 é soma de dois números triangulares consecutivos.*

Dem. Sejam T_r e T_{r+1} dois números triangulares consecutivos. Então tem-se

$$\begin{aligned} T_r + T_{r+1} &= \frac{1}{2}r(r+1) + \frac{1}{2}(r+1)(r+2) \\ &= \frac{1}{2}(r+1)(2r+2) \\ &= (r+1)^2. \end{aligned}$$

Inversamente, seja a^2 um número inteiro quadrado, com $a \in \mathbb{Z}^+$, e consideremos os números triangulares consecutivos T_{a-1} e T_a. Tem-se, evidentemente,

$$\begin{aligned} T_{a-1} + T_a &= \frac{1}{2}(a-1)a + \frac{1}{2}a(a+1) \\ &= \frac{1}{2}a \cdot 2a \\ &= a^2, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.

Teorema 2.2 *Todo o número hexagonal é triangular.*

Dem. Com efeito, seja a um número hexagonal de ordem r. Então, como vimos anteriormente, tem-se

$$a = r(2r-1);$$

mas

$$r(2r-1) = \frac{1}{2}(2r-1)((2r-1)+1) = T_{2r-1},$$

o que prova o teorema.

Teorema 2.3 *A diferença dos quadrados de dois números triangulares consecutivos é o cubo de um inteiro maior que 1 e, inversamente, o cubo de um inteiro maior que 1 é a diferença dos quadrados de dois números triangulares consecutivos.*

Dem. Seja n um número inteiro positivo qualquer. Então tem-se

$$\begin{aligned}(T_{n+1})^2-(T_n)^2 &= \left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]^2-\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2\\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2\left[(n+2)^2-n^2\right]\\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2[(2n+2)2]\\ &= (n+1)^3,\end{aligned}$$

o que prova a primeira parte do teorema 2.3.

Inversamente, como o cubo de qualquer número inteiro maior que 1 pode ser representado por $(n+1)^3$, as igualdades anteriores lidas a partir da última para a primeira, mostram que $(n+1)^3=(T_{n+1})^2-(T_n)^2$, o que completa a demonstração do teorema.

Note-se que, como o teorema anterior vale para todo o inteiro positivo n, resulta que:

$$\begin{aligned}n^3 &= (T_n)^2-(T_{n-1})^2\\ (n-1)^3 &= (T_{n-1})^2-(T_{n-2})^2\\ (n-2)^3 &= (T_{n-2})^2-(T_{n-3})^2\\ &\cdots\\ 3^3 &= (T_3)^2-(T_2)^2\\ 2^2 &= (T_2)^2-(T_1)^2\\ 1^3 &= (T_1)^2.\end{aligned}$$

Somando membro a membro estas igualdades, resulta a seguinte igualdade encontrada por **Claude Gaspard Bachet** (1581-1683)[(4)]:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3 = (T_n)^2 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2,$$

i.e., é válido o seguinte

Corolário 1 *A soma dos cubos dos primeiros n números inteiros (positivos) é igual ao quadrado do número triangular de ordem n.*

Teorema 2.4 *A soma dos quadrados de dois números triangulares consecutivos é igual ao número triangular cuja ordem é o quadrado da maior das ordens dos números triangulares considerados.*

Dem. Pretende-se demonstrar que, para todo o inteiro $r \geq 1$, se tem

$$(T_r)^2 + (T_{r-1})^2 = T_{r^2}.$$

Ora

$$\begin{aligned}(T_r)^2 + (T_{r-1})^2 &= \left[\frac{1}{2}r(r+1)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(r-1)r\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}(r^2+r)^2 + \frac{1}{4}(r^2-r)^2 \\ &= \frac{1}{4}(2r^4+2r^2) \\ &= \frac{1}{2}r^2(r^2+1) \\ &= T_{r^2},\end{aligned}$$

como se pretendia mostrar.

3 Um teorema de Plutarco e sua generalização por Diofanto

A muito extensa obra de **Plutarco** (~50-~120) contém o importante teorema seguinte:

Teorema 3.1 *A soma do inteiro* 1 *com o produto de* 8 *por um número triangular é um número quadrado.*

Dem. Com efeito, para todo o número inteiro positivo r, tem-se

$$\begin{aligned}8T_r + 1 &= 8 \times \frac{1}{2}r(r+1) + 1 \\ &= 4r^2 + 4r + 1 \\ &= (2r+1)^2,\end{aligned}$$

o que prova o teorema de **Plutarco**.

Observando que, se s é inteiro positivo ímpar maior que 1, existe algum inteiro positivo r tal que $s = 2r + 1$, a leitura na ordem inversa da última sequência de equações demonstra o seguinte recíproco do teorema anterior, i.e.

Teorema 3.2 *Para todo o inteiro positivo ímpar $s > 1$, existe um número triangular T_r tal que $8T_r + 1 = s^2$.*

Conforme é mencionado por **Leonard Eugene Dickson**, no vol. II, p.3, da sua obra *History of the Theory of Numbers*, este teorema de **Plutarco** foi generalizado por **Diofanto** cerca do ano 250 da nossa era. De facto, **Diofanto** mostrou que

$$8(m-2)p_r^{(m)} + (m-4)^2 = [(m-2)(2r-1)+2]^2, \tag{1}$$

onde $p_r^{(m)} = \frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)]$, designa o número, m-gonal de ordem r.

Note-se que, para $m=3$, a igualdade (1) se reduz a

$$8 \times \frac{1}{2}r[2+(r-1)\times 1] + (3-4)^2 = [(2r-1)+2]^2,$$

ou seja,

$$8 \times \frac{1}{2}r(r+1)+1 = (2r+1)^2,$$

que equivale a

$$8T_r + 1 = (2r+1)^2, \tag{2}$$

o que mostra que a igualdade (2), que figura no teorema de **Plutarco**, é um caso particular da igualdade (1), obtida por **Diofanto**.

Vejamos que, de facto, a igualdade (1) vale para todos os inteiros $m \geq 3$ e $r \geq 3$.

Atendendo ao significado de $p_r^{(m)}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
8(m-2)p_r^{(m)} + (m-4)^2 &= 8(m-2)\frac{1}{2}r[2+(r-1)(m-2)] + (m-4)^2 \\
&= 4(m-2)r[2+(m-2)r-m+2] + (m-4)^2 \\
&= 16(m-2)r + 4(m-2)^2r^2 - 4mr(m-1) \\
&\qquad +(m-4)^2 \\
&= 4m^2r^2 - 4m^2r - 16mr^2 + 16r^2 + m^2 + 24mr \\
&\qquad -8m - 32r + 16.
\end{aligned}$$

Fazendo os cálculos indicados no segundo membro de (1) encontra-se precisamente a expressão que encontrámos quando fizemos os cálculos indicados no primeiro membro da mesma equação.

São conhecidas muitas outras propriedades de números triangulares. Na página 5 do livro *History of the Theory of Numbers* de **L. E. Dickson**, já citado, mencionam-se várias propriedades publicadas por **C. G. Bachet** e cuja demonstração é muito simples.

Uma propriedade interessante vem mencionada na página 92 do livro de **David Wells** intitulado *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*; diz o seguinte:

> "*Para todo o número triangular, T_n, há uma infinidade de outros números triangulares, T_m, tais que o produto $T_n \cdot T_m$ é um quadrado.*"

Não é dada a demonstração, mas apresenta-se como exemplo $T_3 \cdot T_{24} = 30^2$. Trata-se de um lapso, pois $T_3 \cdot T_{24} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 24 \times 25 = 1800$, que não é um quadrado.

Exemplos:

$$\begin{aligned} T_3 \cdot T_4 &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} \times 48 \times 49 = 84^2 \\ T_2 \cdot T_{24} &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4\frac{1}{2} \times 24 \times 25 = 30^2. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que há uma infinidade de números triangulares, T_m, tais que T_2T_m é um quadrado; por outras palavras, vamos mostrar que há uma infinidade de pares de inteiros positivos (u, m) tais que

$$T_2T_m = u^2, \tag{3}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}m(m+1) = u^2,$$

i.e., $3m^2 + 3m = 2u^2$, donde resulta que 3 divide u, i.e. $u = 3v$, para algum inteiro v. Logo $m^2 + m - 6v^2 = 0$ ou seja,

$$(2m+1)^2 - 24v^2 = 1.$$

Ponhamos $2m + 1 = z$. Tem-se então

$$z^2 - 24v^2 = 1,$$

e uma solução desta equação é $z = 5$, $v = 1$, a que corresponde $m = 2$ e tem-se evidentemente $T_2T_2 = 9 = 3^2$.

Esta solução aparentemente não tem grande interesse, mas vamos mostrar que, a partir de cada solução (z_1, v_1), inteira e positiva, da equação $z^2 - 24v^2 = 1$, é possível encontrar uma outra solução, (z_2, v_2), inteira e positiva, com $z_2 > z_1$ e $v_2 > v_1$, o que prova a existência de uma infinidade de soluções inteiras e positivas.

Ponhamos $z_1 = 5$ e $v_1 = 1$ e consideremos o sistema

$$\left\{ \begin{aligned} z_2 &= az_1 + bv_1 \\ v_2 &= cz_1 + dv_1 \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Vamos ver que existem inteiros positivos a, b, c, d tais que (z_2, v_2) é solução da equação considerada,$z^2 - 24v^2 = 1$ e, para a, b, c, d positivos, tem-se evidentemente $z_2 > z_1$ e $v_2 > v_1$.

Para que (z_2, v_2) seja solução, é necessário e basta que seja:

$$(az_1 + bv_1)^2 - 24(cz_1 + dv_1)^2 = 1,$$

i.e.,

$$(a^2 - 24c^2)z_1^2 + (b^2 - 24d^2)v_1^2 + (2ab - 48cd)z_1v_1 = 1$$

Determinemos inteiros positivos a, b, c, d, tais que

$$\begin{cases} a^2 - 24c^2 & = & 1 \\ b^2 - 24d^2 & = & -24 \\ 2ab - 48cd & = & 0 \end{cases} \tag{5}$$

A 1^a equação é satisfeita para $a = 5$, $c = 1$; a 2^a equação, para ser satisfeita, exige que $24|b^2$, e, para isso, que $12|b^2$; seja $b = 12B$; substituindo na 2^a equação, vem $144B^2 - 24d^2 = -24$, ou seja, $6B^2 - d^2 = -1$, equação equivalente a

$$d^2 - 6B^2 = 1.$$

Uma solução inteira positiva desta última equação é $d = 5$, $B = 2$; daqui resulta que $b = 24$, $d = 5$ é uma solução da 2^a equação do sistema, pois $b^2 - 4d^2 = 576 - 24 \times 25 = -24$.

Além disso, tem-se $2ab - 48cd = 2 \times 5 \times 24 - 48 \times 1 \times 5 = 0$, quer dizer, $a = 5$, $b = 24$, $c = 1$, $d = 5$ é uma solução inteira e positiva do sistema (5). Representando por (z_1, v_1) a solução $(5, 1)$, da equação $z^2 - 24v^2 = 1$, conclui-se que

$$\begin{cases} z_2 & = & 5 \cdot z_1 + 24v_1 & = & 5 \times 5 + 24 \times 1 & = & 49 \\ v_2 & = & 1 \cdot z_1 + 5 \cdot v_1 & = & 1 \times 5 + 5 \times 1 & = & 10; \end{cases}$$

assim, (z_2, v_2) constitui uma solução da equação $z^2 - 24v^2 = 1$, pois $49^2 - 24 \times 100 = 2401 - 2400 = 1$ e, como $2m + 1 = z_2$, tem-se m=24; consequentemente,

$$T_2 T_m = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} 24 \times 25 = 900 = 30^2$$

A partir da solução $(z_2, v_2) = (49, 10)$, obtém-se uma outra solução, tomando

$$\begin{cases} z_3 & = & 5 \cdot z_2 + 24 \cdot v_2 & = & 485 \\ v_3 & = & 1 \cdot z_2 + 5 \cdot v_2 & = & 99; \end{cases}$$

atendendo a que $2m + 1 = 485$, vem $m = 242$ e

$$T_2 T_m = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 242 \times 243 = 297^2$$

Repetindo o processo, encontrávamos para cada repetição, uma solução maior que a anterior.

Notas finais

(1) **Dirk J. Struik**, no seu livro *História Concisa das Matemáticas*, considera a *Introdução à Aritmética* de **Nicómaco** como "*a exposição mais completa existente da aritmética pitagórica*".

Timeu, natural de Locros (cidade da Magna Grécia) foi um filósofo que viveu no século V ou IV a.C.. Conforme se pode ler no verbete de **Sebastião T. de Pinho**, da *Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura*, nas doutrinas divulgadas por **Timeu de Locros**, "*encontrou* Platão *assunto para o diálogo em que o principal interlocutor é a figura de Timeu, que deu o nome à mesma obra. Além de um Tratado de Matemática e uma* Vida de Pitágoras *que* Suidas *lhe atribui, passou como sendo também de* Timeu *um tratado em dialecto dórico,* Acerca da alma, do mundo e da natureza."

Suidas (ver Suda)- nome de um léxico grego (também conhecido pela designação menos correcta de Suidas), compilado no final do século X. Segundo a afirmação de **M. H. Rocha Pereira**, Professora da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra, tal léxico "it embora nem sempre fidedigno, é uma fonte de informação riquíssima sobre a Grécia antiga, em muitos casos com base no acesso a textos que se perderam."

(Informações colhidas em verbetes da Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura)

(2) Além dos números figurados planos, há outros números figurados não planos.

(3) **Empédocles**- filósofo grego pré-socrático ($\sim$ 483-430, a.C.). Filho de uma família rica, obteve, diz-se, uma vitória olímpica. Tornou-se chefe do partido democrático, legislador, poeta, médico, profeta, taumaturgo. Subsistem quatrocentos versos do seu poema sobre *O mundo físico.* Sua teoria dos quatro elementos (água, ar, terra, fogo) continuou em vigor até à epoca da química moderna.

(4) **Bachet de Méziriac** nasceu em Bourg-en-Bresse, de uma família nobre. Foi educado pelos Jesuítas e terá sido professor das escolas jesuítas de Côme ou de Milão. Foi eleito, em 1635, membro da Academia Francesa.