Gazeta de Matemática n^o 139
Julho de 2000

Esses Desconhecidos Quaterniões!

P. Cerejeiras

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
3810-193 Aveiro, Portugal

As páginas que se seguem são dedicadas a uma tentativa de divulgação da Análise Quaterniónica. Com base neste propósito, optei por usar uma abordagem ligeira, iniciando este trabalho por uma pequena recapitulação histórica e passando então a algumas ideias para aplicações práticas.

O leitor deverá ter presente, durante a leitura, que esta (voluntariamente) simples abordagem foi feita à custa de um escamoteamento dos verdadeiros problemas.

Se esta "brincadeira" o levar a querer saber mais sobre tais entidades, darei por conseguido o principal objectivo destas páginas. Encontrará, no final, uma indicação de bibliografia que poderá consultar caso deseje aprofundar os tópicos aqui referidos.

1 Mais umas achas p'ra uma velha fogueira

"Quaterniões?! O que são?" é a pergunta que ocorre ao comum dos mortais, que imediatamente se imagina na presença de mais alguma estranha e esotérica invenção matemática, completamente divorciada da realidade. E, convenhamos, a Matemática goza de uma péssima reputação, no que toca a esse respeito - diga-se em abono da verdade, nem sempre injustificada. Todavia - e por agora, o leitor terá que confiar em mim - não é esse o caso destas entidades.

O que motiva então o seu desconhecimento por parte do público geral? A pergunta é complexa. Pode dizer-se, numa primeira análise simplista, que a culpa reside no hábito dos Matemáticos darem estranhos e complicados nomes às entidades com que lidam, e a partir das quais extraem as mais mirabolantes conclusões.

A ideia é tentadora, mas nunca poderá justificar tão completo oblívio. Afinal, pode o leitor nunca vir a saber quais as reais aplicações das matrizes, ou de grupos invariantes, para não falar de outros objectos, mas ainda assim faz uma ideia razoável daquilo em que consistem.

Na realidade, não nos podemos esquecer que, em última análise, a Matemática é essencialmente uma linguagem. Possui regras próprias e está em constante adaptação, sendo usada para descrever os mais variados fenómenos. Tem sofrido alterações ao longos dos séculos (e não poucas), mas nenhuma outra linguagem a bate em sucesso: 5 000 anos de duração, e isto se contarmos apenas a partir do período Egípcio. Conhecem melhor história de sucesso?

Mas voltemos à questão que aqui nos traz, ou seja, aos quaterniões. Se, pela parte do público, a reacção é de receio e desconfiança, a situação não se apresenta muito melhor quando encaramos a reacção da comunidade matemática. Com efeito, a generalidade parece reagir como se em presença de algo *demasiado simples* para merecer um segundo olhar de atenção. Bem diz a sabedoria popular que não se pode agradar a gregos e a troianos. Mas desagradar a ambos?...

Os factos que apresentaremos de seguida mostrarão que mesmo as ferramentas mais simples podem ser de grande utilidade, ajudando desta forma a desmistificar um pouco a (má) fama criada em torno dos quaterniões, em particular, e da Matemática, em geral.

2 Um Pouco de História

Por onde começar? Talvez pela principal vantagem dos quaterniões, que consiste numa fácil interpretação física, dado cada operação algébrica surgir associada a um efeito geométrico. Um exemplo disto é dado pela entidade *Spinor* [da qual nos basta saber ser um elemento particular na Álgebra Quaterniónica que expressa um tipo de rotação (em inglês, Spin)]. Como tudo na vida, este efeito é, simultaneamente, fruto do acaso e do propósito com que foi desenvolvida a álgebra.

A Geometria, um dos primeiros ramos da Matemática, se não *o* primeiro, esteve desde o princípio ligada a problemas concretos do dia-a-dia. Não é, portanto, de espantar as tentativas de construir, no século XVII, um sistema de cálculo que "operasse" com linhas, áreas e outros, de forma análoga ao cálculo numérico.

O célebre Matemático Leibniz (1646-1716) foi um dos primeiros a aperceber-se desta necessidade. Numa carta escrita ao seu amigo Huygens[1], abordava já o problema de estabelecer uma *geometria da situação* que permitisse operar com a posição de um objecto como se de um número se tratasse. Nesta carta, publicada apenas em 1833, Leibniz introduzia já certas propriedades a esperar de tal sistema. Mais tarde, esta carta viria a estar na base de uma competição nada amigável entre os diferentes sistemas apresentados como candidatos a "geometria de situação".

Paralelamente a estes acontecimentos, desenvolvia-se na Europa o estudo dos números complexos; com efeito, o paradoxo criado pelo facto de $\sqrt{-1}$ não ser ordenável relativamente ao elemento neutro para a adição esteve, entre outras razões, na base da difícil aceitação do sistema dos complexos.

O facto desta raíz não ser posicionável na recta real conduziu à ideia intuitiva da existência de uma representação planar para estes novos números. Neste sentido, o primeiro estudo com sucesso foi efectuado por Caspar Wessel (1745-1818), que o apresentou perante a Royal Academy of Denmark. Todavia, o estudo ficou por longo tempo ignorado devido à relutância do autor em comunicar os resultados aos restantes colegas europeus.

Neste trabalho, Wessel propunha o tratamento dos números complexos como entidades geométricas, em que $\epsilon = \sqrt{-1}$ seria ortogonal à unidade real 1 (o que permite ver que este tinha já presente o actual conceito de vector). Graças ao estabelecimento de adequadas regras de adição e produto para estas entidades, conseguiu criar um sistema de cálculo perfeitamente consistente.

[1] Christian Huygens, Físico Holandês. Conhecido pelos seus trabalhos no campo da óptica.

O desconhecimento deste trabalho manteve-se por um século, período durante o qual vários outros matemáticos se debruçaram sobre o assunto. Dentre estes, destacam-se os esforços (independentes) de D'Argand e Gauss. O primeiro, com a publicação, em 1806, de *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, estabeleceu a representação geométrica dos números complexos tal como hoje a conhecemos.

Todavia, fosse talvez o receio pelo modo como seria recebido tal ensaio, ou, tal como Wessel, a relutância em partilhar conhecimentos, a verdade é que o ensaio se manteve ignorado por mais de sete anos. Com efeito, seria necessário que um outro matemático chamasse a atenção para este trabalho de autor desconhecido (pois D'Argand deixara-o incógnito), para que este finalmente reclamasse a sua autoria.

Ainda assim, a aceitação destas novas ideias processou-se de modo lento até à publicação, em 1831, de um escrito de Gauss (curiosamente, sem título) onde se tratava da representação geométrica de complexos. Uma investigação apurada dos anteriores trabalhos de Gauss permite dar crédito à sua afirmação de possuir o conceito desta representação já em 1799.

E finalmente chegamos ao Matemático Irlandês Sir William Rowan Hamilton, inventor dos quaterniões.

3 Sir William Rowan Hamilton (1805-65)

Sir William Rowan Hamilton foi indubitavelmente um dos grandes Matemáticos da sua época. Natural de Dublin, seria nomeado, muito novo, Astrónomo Real, cargo este que manteve até ao fim da sua vida. Entre os seus trabalhos mais importantes contam-se os efectuados na área da Dinâmica e do Cálculo de Variações. Cite-se, por exemplo, Schrödinger, o qual louva o princípio Hamiltoniano como uma das pedras nucleares da Física Moderna.

Dando grande relevo ao que actualmente se designa por *Matemática Aplicada*, Hamilton influenciou as gerações de Matemáticos e Físicos que se seguiram.

Tendo iniciado a sua vida com grande projecção mundial - os seus estudos no Trinity College de Dublin foram a tal ponto brilhantes que lhe grangearam, ainda antes do curso concluído, uma justificada fama - os finais do século XIX viram a sua memória cair num quase completo esquecimento. Para tal, muito contribuiu a obcessão de Hamilton pelos quaterniões, nos quais via *o* sistema ideal para descrever modelos físicos, e aos quais dedicou os restantes 20 anos da sua vida.

Com efeito, no ensaio *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*[2] constava uma última parte dedicada à teoria dos "pares ordenados de números reais"; nesta, Hamilton apresentava uma sistematização do cálculo complexo sem, todavia, entrar em considerações de ordem geométrica.

A recepção favorável deste ensaio levou-o a virar-se para o problema de estender o seu método de cálculo a triplos ordenados (na altura, um problema ao qual vários Matemáticos se dedicavam). Nos anos que se seguiram, Hamilton procurou, em vão, uma regra de multiplicação de triplos, por ele já designados vectores[3].

[2]Publicado em 1837.

[3]O conceito de vector, tal como hoje o conhecemos, surgirá com o devido rigor apenas a partir

Reza a história que todas as manhãs, ao pequeno-almoço, os seus dois filhos lhe perguntavam "Então, Papá, já consegues multiplicar triplos?", ao que este respondia "Ainda não, só somar e subtrair.".

Procurando uma analogia com os complexos, Hamilton estabeleceu inicialmente um sistema em que as unidades fundamentais 1, i e j seriam ortogonais duas a duas. Deste modo, cada elemento teria a forma

$$q = x + yi + zj.$$

Dado pretender que os complexos estivessem incluídos neste novo sistema (à semelhança dos números reais, que surgem como caso particular dos complexos), então forçosamente devia exigir que $x + yi = x + yi + 0j$, ou seja, $i^2 = -1$.

Em face da ortogonalidade entre i e j, e da possibilidade de estabelecer um isomorfismo entre o espaço vectorial $\mathbb{C}$ e o espaço dos elementos da forma $x + zj = x + 0i + zj$, o mesmo raciocínio justificava $j^2 = -1$.

Logicamente, ter-se-ia então que $(ij)^2 = +1$, donde $ij = +1$ ou $ij = -1$. Todavia, esta simples conclusão entrava em contradição com outras propriedades a exigir dos triplos, nomeadamente, com a *lei dos módulos*.

Atendendo a que $|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ representaria a distância do triplo q à origem do referencial, então a lei dos módulos estabeleceria que, multiplicando dois triplos, a distância do triplo resultante à origem deveria ser dada pelo produto das distâncias associadas aos triplos originais, ou seja, se

$$(x_1 + y_1 i + z_1 j)(x_2 + y_2 i + z_2 j) = x_3 + y_3 i + z_3 j$$

então

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2. \tag{6}$$

Mas bastava um pequeno exemplo

$$\begin{aligned}(i + j)(i + j) &= i^2 + ij + ji + j^2 \\ &= -2 + 2ij\end{aligned}$$

para constatar que, quer ij assumisse o valor $+1$ ou -1, a lei (6) falharia.

Hamilton provou igualmente que, independentemente dos valores dos coeficientes $x_1, y_1, \ldots$, a lei (6) apenas se verificaria se impusesse a condição extra $ij = 0$. Porque esta condição não tinha significado físico, Hamilton rejeitou esta possibilidade.

O paradoxo do valor a atribuir a ij sugeriu-lhe a ideia de que talvez o sistema por ele proposto estivesse incompleto. Introduziu então uma quarta unidade fundamental $k = ij$, ortogonal às anteriores.

Assim, o novo sistema consistia agora em quádruplos ordenados, e já não em triplos. Porém, isso continuava a não resolver o problema (6). Seriam precisos seis anos para que Hamilton se apercebesse de que o verdadeiro problema do seu novo sistema residia na suposição implícita da comutatividade do produto.

Finalmente, a 16 de Outubro de 1843, enquanto se dirigia para a Royal Irish Academy na companhia da esposa, Hamilton teve a intuição da chave para o problema. Encontrando-se, nesse momento, sobre a ponte de Broughan, talhou a resposta

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

dos trabalhos de Gibbs, em 1881.

na pedra da ponte, como ainda hoje se pode ver. E passaria os restantes anos da sua vida a estudar as propriedades deste novo sistema.

4 Álgebra Quaterniónica

O novo sistema consiste então em quádruplos ordenados $q = (x, y, z, w) = x + yi + zj + wk$ que se podem adicionar e subtrair pelas regras usuais para vectores. Deste modo, o conjunto $\mathbb{H}$ dos quaterniões[4], constitui um espaço vectorial real.

À semelhança dos números complexos, denota-se por *parte escalar de* q o número real $Sc(q) = x$, e por *parte vectorial* o vector tridimensional $\vec{q} = yi + zj + wk$, donde a representação usual $q = x + \vec{q}$. De igual modo, define-se o *conjugado do quaternião* q como sendo o novo elemento $\overline{q} = x - \vec{q} = x - yi - zj - wk$.

Mais importante, é agora possível multiplicar quaterniões de acordo com as regras estabelecidas por Hamilton

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k;\ jk = -kj = i;\ ki = -ik = j$$

ou seja, efectuando os (fastidiosos) cálculos,

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (x_1 + y_1i + z_1j + w_1k)(x_2 + y_2i + z_2j + w_2k) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 - w_1w_2) + (x_1y_2 + y_1x_2 + z_1w_2 - w_1z_2)i + \\ &\qquad (x_1z_2 + z_1x_2 + w_1y_2 - y_1w_2)j + (x_1w_2 + w_1x_2 + y_1z_2 - z_1y_2)k \\ &= (x_1x_2 - \vec{q_1} \cdot \vec{q_2}) + x_1\vec{q_2} + x_2\vec{q_1} + \vec{q_1} \times \vec{q_2}, \end{aligned}$$

em que $\vec{q_1} \cdot \vec{q_2}$ e $\vec{q_1} \times \vec{q_2}$ representam, respectivamente, os produtos interno e externo usuais de $\mathbb{R}^3$. Deste modo, ter-se-á

$$\begin{aligned} Sc(q_1q_2) &= (x_1x_2 - \vec{q_1} \cdot \vec{q_2}) \\ &= \frac{q_1q_2 + q_2q_1}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(q_1q_2)} &= x_1\vec{q_2} + x_2\vec{q_1} + \vec{q_1} \times \vec{q_2} \\ &= \frac{q_1q_2 - q_2q_1}{2}. \end{aligned}$$

A análise destas expressões permite as seguintes observações:

- é fácil de constatar que a expressão $< q_1, q_2 >= -Sc(q_1q_2)$ representa um produto interno real em $\mathbb{H}$.
- o produto q pelo seu conjugado $\overline{q}$ é o real não-negativo $q\overline{q} = |q|^2 = x^2 + c^2 + z^2 + w^2$, que constitui o quadrado da distância do quaternião (visto como vector de $\mathbb{R}^4$) à origem do referencial. Designaremos por *norma de* q o real não-negativo $|q|$.

  Por outro lado, $< q, q >= |q|^2$, pelo que temos estabelecida no conjunto dos quaterniões uma métrica induzida por um produto interno.

[4]Conjunto designado pela letra "H" em honra de Hamilton.

- quando a parte escalar de ambos os quaterniões é nula (isto é, quando se está em presença de "puros" vectores em $\mathbb{R}^3$), então a parte vectorial do produto acima descrito corresponde ao bem conhecido produto vectorial, enquanto a sua parte escalar corresponde ao simétrico do produto interno.

- também da afirmação anterior resulta a existência de inverso para cada quaternião não-nulo, dado por $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\overline{q}$.

O conjunto $\mathbb{H}$ dos quaterniões fica assim munido da estrutura de Álgebra de Divisão. Todavia, existe uma importante diferença relativamente às Álgebras Real e Complexa pois o produto não é comutativo. Tal arrasta a existência de dois quocientes de um quaternião q_1 por um quaternião $q_2 \neq 0$, designados por *quociente à direita* $q_1 q_2^{-1}$ e *quociente à esquerda* $q_2^{-1} q_1$.

Igualmente da primeira observação, poderia argumentar-se que o trabalho de Gibbs na análise vectorial também se obtém por intermédio do de Hamilton. Todavia, note-se que há uma importante diferença na filosofia dos dois sistemas: o de Gibbs baseia-se mais numa compreensão intuitiva do espaço. Já o de Hamilton exige também conhecimentos na parte de estruturas algébricas, compensando esta dificuldade inicial com uma maior facilidade *à posteriori* do cálculo operacional.

Como curiosidade, registe-se que as exigências de Hamilton (recorde-se, a álgebra conter as de dimensão inferior e satisfazer a lei dos módulos (6)) apenas podem ser satisfeitas partindo de espaços vectoriais de dimensão 1, 2, 4 ou 8[5].

5 Implicações geométricas

Quais são as consequências da Álgebra Quaterniónica? Em primeiro lugar, para $q = x + yi + zj + wk$, podemos definir uma forma polar estabelecendo $\cos(\alpha) = \frac{x}{|q|}$ e, após normalizar a parte vectorial

$$I(q) = \frac{yi + zj + wk}{|yi + zj + wk|},$$

tomando $\sin(\alpha) I(q) = \frac{yi+zj+wk}{|q|}$. Então teremos

$$q = |q|(\cos(\alpha) + \sin(\alpha) I(q))$$

e o produto de q por um quaternião $\vec{X}$ com parte escalar nula e parte vectorial ortogonal a $\vec{q}$ (no sentido de $\mathbb{R}^3$), dá-nos

$$q\vec{X} = \cos(\alpha)\vec{X} + \sin(\alpha) I(q) \times \vec{X} \tag{7}$$

o que permite concluir que $q\vec{X}$ expressa a rotação de ângulo α do novo vector $\vec{X}$ em torno do eixo $I(q)$.

Veja-se a importância desta interpretação: lembrando-nos de que, para determinar uma rotação em $\mathbb{R}^3$ era, e ainda é, necessário recorrer ao cálculo dos respectivos ângulos de Euler e usar matrizes de 3×3, é imediato que este método gera uma

[5] Um resultado provado, entre outros, por Frobenius e Hurwitz.

enorme simplificação dos cálculos. Afinal, só precisamos do eixo de rotação $I(q)$ e do ângulo α. Todavia, o método acima descrito é restricto apenas a rotações em que o vector é perpendicular ao eixo de rotação ($\vec{X} \cdot \vec{q} = 0$).

Já depois de Hamilton, outros matemáticos conseguiram interpretar o produto para o caso geral, isto é, em que o vector $\vec{X}$ (com parte escalar nula) não é necessariamente ortogonal a $I(q)$, escrevendo o produto na forma

$$\begin{aligned} \vec{W} &= q\vec{X}\overline{q} \\ &= (x^2 - |\vec{q}|^2)\vec{X} + 2(\vec{q} \cdot \vec{X})\vec{q} + x(\vec{q} \times \vec{X}) \end{aligned} \tag{8}$$

e que se prova determinar a rotação de $\vec{X}$ em torno do eixo $I(q)$, de ângulo 2α (a ideia de um ângulo de valor duplo do original para a rotação pode ser facilmente intuida tendo em atenção (7) e o facto de que agora multiplicamos também à direita por $\overline{q}$).

Desta forma, o produto do tipo (8) expressa rotações no espaço de uma forma não só facilmente visualizável, como também simples de calcular.

Problemas que requeiram rotações são vários: desde o jogo de vídeo dos nossos filhos, em que as imagens mudam constantemente, consoante a posição do jogador (donde, rotação no espaço tridimensional), até aos problemas envolvendo a localização e estabilidade de satélites espaciais. Apesar da rapidez dos computadores actuais, cálculos simples e rápidos são sempre preferíveis (na estabilização de um satélite, uma demora de um segundo pode ser demasiada, e todos nós ouvimos os filhos queixarem-se "daquele jogo lento" ...).

6 Análise Quaterniónica

Estamos agora em condições de dar início a um estudo das funções que assumem valores em $\mathbb{H}$, ditas *funções quaterniónicas*. A continuidade de tais funções

$$f = f_0 + f_1 i + f_2 j + f_3 k$$

é obtida impondo a continuidade das funções componentes reais f_i.

A questão da diferenciabilidade, porém, revela-se mais delicada: as diferenças existentes entre as análises Real e Complexa deixam pressupor um crescendo de dificuldades, motivado pelo aumento da dimensão do espaço de partida. A primeira questão a surgir prende-se ao facto de, em ambas as análises referidas, haver lugar ao conceito clássico de *derivada total de uma função*. Será possível generalizar-se tal ideia para o caso quaterniónico?

Curiosamente, a resposta é não. E esta conclusão pode o leitor intuí-la do facto, sobejamente mencionado, da ausência de comutatividade da Álgebra $\mathbb{H}$. Com efeito, já em 1893, o Matemático G. Scheffers provara que a derivada no sentido clássico apenas poderia existir em álgebras que fossem simultaneamente associativas e *comutativas*.

Para contornar esta barreira, há que procurar a raíz do problema: na Análise Complexa, é bem conhecido o facto de que a teoria das funções holomorfas se pode desenvolver a partir três conceitos distintos, mas equivalentes. São eles o *conceito de derivada total*, da autoria de Cauchy, o de *séries de potências*, de Weierstrass, e o proposto por Riemann, baseado nas célebres *equações de Cauchy-Riemann*. A questão reside agora em saber qual destes métodos é generalizável a funções quaterniónicas.

Como visto, o primeiro conceito conduz a uma classe de funções demasiado restricta: a das funções lineares. De facto, após convencionarmos em que sentido assumir o quociente a efectuar[6] o limite

$$\lim_{q \to q_o} [f(q) - f(q_0)](q - q_o)^{-1}$$

existe na condição de $f(q) = \alpha q + \beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$. Note-se que este "simples" resultado não é de demonstração trivial.

Por outro lado, o recurso às séries dá origem a uma classe demasiado ampla, em virtude de toda a função real analítica nas variáveis x, y, z, e w se poder escrever como uma série de potências do quaternião $q = x + yi + zj + wk$. Assim, este caminho também não fornece a adequada abordagem.

Restam-nos as equações de Cauchy-Riemann.

Antes de uma discussão mais aprofundada sobre este aspecto, convém referirmos a operação diferencial introduzida por Hamilton em 1846,

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial y} + j\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial w}, \tag{9}$$

cujo principal interesse residia na propriedade do simétrico do seu quadrado simbólico

$$-\nabla^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}\right), \tag{10}$$

expressar um operador com múltiplas aplicações na Física Matemática[7].

Uma destas aplicações é usada precisamente nas *equações clássicas de Maxwell*, que expressam um campo electromagnético no vácuo. Dado o valor das componentes eléctrica $\vec{E}$ e magnética $\vec{H}$ desse campo num dado $t + xi + yj + zk \in \mathbb{H}$, então

$$Sc(\nabla \vec{E}) = Sc(\nabla \vec{H}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

estabelece a relação quaterniónica entre essas componentes no momento $t > 0$ e no ponto espacial $xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$.

Numa sequência de artigos publicados na década trinta, o Matemático Suiço Rudolf Fueter[8] retomou o operador (9), estendendo-o agora a $\mathbb{H}$,

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} + j\frac{\partial}{\partial z} + k\frac{\partial}{\partial w}, \tag{11}$$

e estudou as propriedades das funções quaterniónicas que satisfaziam $Df = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} Sc(Df) &= \left(\frac{\partial f_0}{\partial x} - \nabla \cdot \vec{f}\right) \\ (\vec{Df}) &= \frac{\partial}{\partial x}\vec{f} + \nabla f_0 + \nabla \times \vec{f} \end{aligned}$$

[6] Relembre-se que temos duas possibilidades: quociente à esquerda, ou à direita. No que se segue, consideraremos apenas o quociente à direita

[7] Como decerto reconheceu, estes são os operadores *gradiente* e de *Laplace*.

[8] Perfaz, neste ano, o quinquagésimo aniversário da sua morte.

por ele designadas *funções regulares*.

Nos anos que se seguiram os Matemáticos Mejlihson (em 1948) e Sudbery (em 1979) provaram que a abordagem de Fueter (que pode ser vista como a generalização a $\mathbb{H}$ das equações de Cauchy-Riemann) era a que fornecia uma classe de funções que generalizava a classe das funções complexas holomorfas.

Os anos cinquenta e sessenta viram o renascer dos quaterniões com o desenvolvimento da Análise Quaterniónica e as aplicações dos resultados daí resultantes à Física/Matemática.

7 Uma breve aplicação

A abordagem de problemas por meio dos quaterniões, de combinação com técnicas previamente conhecidas, permite muitas vezes a obtenção de resultados de uma forma elegante. O exemplo que se segue, tirado da Teoria dos Números, é disso uma clara prova.

O problema que aqui nos propomos resolver, por recurso à Álgebra quaterniónica, foi resolvido por J. L. Lagrange em 1770, e consiste em determinar se "*todo o natural n se pode expressar como soma de quatro quadrados perfeitos*". Para este efeito, apenas precisaremos de definir o conceito de *quaternião inteiro* como um quaternião cujos coeficientes são inteiros, bem como do seguinte lema de Euler (que apresentaremos sem demonstração).

Lema *Para todo o primo ímpar p, existem inteiros x, y e m tais que $x^2 + y^2 + 1 = mp$, com $0 < m < p$.*

Passemos então à resolução do problema de Lagrange: pelo Teorema Fundamental da Aritmética, todo o natural n se pode expressar como um produto de primos. Visto que a norma do produto de quaterniões é ainda o produto das suas normas, bastará mostrar que todo o número primo constitui a norma de um quaternião inteiro.

Quando o número primo $p = 2$ a relação é imediata, dado que $2 = 1^2+1^2+0^2+0^2$, pelo que é suficiente tratar-se o caso dos primos ímpares.

Seja p um tal primo. Pelo Lema de Euler, existe um quaternião inteiro $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ tal que a sua norma satisfaz $|q|^2 = mp$, para algum inteiro m compreendido estritamente entre 0 e p, tome-se m_0 como o menor m que satisfaz esta propriedade.

Em primeiro lugar, m_0 não pode ser par, pois $|q|^2 = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$ par implicará que também $x_0+x_1+x_2+x_3$ seja par. Três casos podem ocorrer: todos os coeficientes são pares, todos são ímpares ou dois, e apenas dois, são pares (sejam eles x_0 e x_1). Em qualquer das situações, teremos sempre $x_0 \pm x_1$ e $x_2 \pm x_3$ pares, donde

$$\frac{1}{2}m_0 = \left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_0-x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-x_3}{2}\right)^2$$

é a soma de quatro quadrados perfeitos. Desta forma, $\frac{1}{2}m_0$ é um natural menor que m_0, que satisfaz também a condição de $|q|^2 = mp$ para algum quaternião inteiro q. Isto contradiz a assumpção de que partimos e, portanto, m_0 terá de ser ímpar.

Sejam agora z_i os inteiros mais próximos de $\frac{x_i}{m_0}$. Teremos que

$$\left|\frac{x_i}{m_0} - z_i\right| < \frac{1}{2}$$

nunca se registando a igualdade; com efeito, se a igualdade fosse válida, então $m_0 = 2|x_i - m_0 z_i|$ donde m_0 seria par, com $z_0, \ldots, z_3 \in \mathbb{Z}$.

Tome-se o quaternião inteiro $w = q - m_0 z$, onde $z = z_0 + z_1 i + z_2 j + z_3 k$. Cada coeficiente w_i deste novo quaternião verifica, por sua vez, $|w_i| = |x_i - m_0 z_i| < \frac{m_0}{2}$, donde

$$|w|^2 < 4\left(\frac{m_0}{2}\right)^2 = m_0^2.$$

Por outro lado,

$$|w|^2 = |q|^2 - m_0(q\overline{z} + \overline{z}q) + m_0^2|z|^2$$

onde $(q\overline{z} + \overline{z}q)$ representa o dobro da parte escalar do produto $q\overline{z}$. Assim,

$$\begin{aligned}
|w|^2 &= m_0 p - 2m_0 Sc(q\overline{z}) + m_0^2|z|^2 \\
&= m_0(p - 2Sc(q\overline{z}) + m_0|z|^2) \\
&= m_0 m_1,
\end{aligned}$$

com $m_1 = p - 2Sc(q\overline{z}) + m_0|z|^2$.

Mas porque $m_0 m_1 < |w|^2 = m_0^2$, resulta $m_1 < m_0$. Considerando agora o produto

$$\begin{aligned}
w\overline{q} &= q\overline{q} - m_0 z\overline{q} \\
&= m_0(p - z\overline{q})
\end{aligned}$$

facilmente se constata que existe um quaternião inteiro $p - z\overline{q}$ para o qual $m_1 p = |p - z\overline{q}|^2$, pois que $(m_0 m_1)(m_0 p) = |w\overline{q}|^2 = m_0^2|p - z\overline{q}|^2$. Portanto, ou de novo nos encontramos na situação de m_0 não ser o menor natural satisfazendo esta condição, ou $m_1 = 0$. Neste último caso, teremos $w = 0$ e, com a igualdade $w = q - m_0 z$, que $q = m_0 z$. Daqui resulta $m_0 p = m_0^2|z|^2$, ou seja, $p = m_0|z|^2$. Portanto (não esquecer que p é primo) $m_0 = 1$ ou $m_0 = p$. Como m_0 é, por hipótese, inferior a p, só a primeira possibilidade é válida.

Este raciocínio prova, para cada primo p, a existência de um quaternião inteiro $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ cuja norma satisfaz a igualdade $|q|^2 = p$.

8 Considerações finais

O leitor não deve tomar este artigo como mais uma tentativa de impor os Quaterniões ao público geral. Esta estrutura algébrica, se bem que contasse inicialmente com a vantagem de o seu autor ser Hamilton, um dos mais famosos Matemáticos do seu tempo, apresentava a ideia, demasiado avançada para o tempo, de anticomutatividade. Muitos foram os Matemáticos da época que não entenderam esta nova álgebra, e se os Matemáticos a não entendiam, como a podia entender a gente comum? ...

Actualmente, o sistema de Gibbs está bem implementado e satisfaz as necessidades de cálculo. O que aqui defendo não é a sua substituição pelos Quaterniões, mas tão somente que estes não sejam rejeitados com base em argumentos do tipo "já temos um sistema que faz isso". Cada problema exige uma ferramenta adequada e creio ter mostrado que, em certos casos, essa ferramenta *é efectivamente* fornecida pelos Quaterniões. Que o digam os Físicos.

Referências

[Al] Altmann, Simon L. - *Hamilton, Rodrigues and the Quaternion Scandal*, Mathematical Magazine, 62, pag. 291-308, 1989.

[BDS] Brackx, F.,Delanghe, R., e Sommen, F. - *Clifford analysis*, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.

[Cr] Crowe, Michael J. - *A History of Vector Analysis*, Dover Publications, Inc., 1993.

[GM] Gilbert, J., e Murray, M. - *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[Ha] Habetha, K. - *Function Theory in Algebras*, reprint from Indianapolis Journal of Mathematics and Physics, combined vols. 1 & 2, 1982-83, pp. 43-64.

[Ku] Kuipers, Jack B. - *Quaternions and rotation sequences*, Princeton University Press, 1999.

[Wa] Waerden, B. L. van der - *Hamilton's Discovery of Quaternions* , Mathematical Magazine, 49, pag. 227-234, 1976.