Gazeta de Matemática nº 139
Julho de 2000

Reflexão sobre um teorema de Jacques Bernoulli relativo a secções cónicas

Rosa Maria Ribeiro e Maria do Céu Silva

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Resumo

Quando pensamos na parábola como curva plana definida como o conjunto dos pontos que estão a igual distância de um ponto fixo (o foco) e de uma recta dada (a directriz), associamos-lhe inevitavelmente uma equação do tipo $y^2 = px$, que se diz *equação reduzida da parábola*, onde p é o *parâmetro*. Mas, nem a parábola nem a elipse e a hipérbole, foram sempre interpretadas desta maneira. Apolónio obteve estas curvas seccionando um cone oblíquo de base circular por um plano em condições especiais e indicou, para cada uma delas, uma propriedade que a caracterizava. No caso da parábola, a propriedade característica envolvia um segmento, que Apolónio designou por *latus erectum* e ao qual corresponde actualmente o parâmetro. Para o latus erectum, Apolónio determinou uma expressão dependente do cone gerador e do vértice da cónica; contudo, a sua interpretação não permite um reconhecimento geométrico imediato desta grandeza.

Em finais do século XVII, Jacques Bernoulli deduziu um processo simples de reconhecer geometricamente, no cone gerador, um segmento de comprimento igual ao do parâmetro, tomando como suporte a definição de parábola dada por Apolónio (Apolónio, *Conicas*, Livro I, proposição XI).

É esse teorema de Bernoulli, *Novum Theorema Pro Doctrina Sectionum Conicarum*, que vai ser objecto da nossa reflexão.

1 Definição de parábola dada por Apolónio

> *"Se um cone é cortado por um plano que passa pelo eixo e por um outro plano que corta a base do cone segundo uma recta perpendicular à base do triângulo passando pelo eixo; se, além disso, o diâmetro da secção é paralelo a um dos lados do triângulo que passa pelo eixo, o quadrado de qualquer recta conduzida da secção do cone paralelamente à secção comum*

do plano secante e da base do cone até ao diâmetro da secção equivale ao rectângulo delimitado pela recta que ela corta sobre o diâmetro, do lado do vértice da secção, e por uma certa recta cuja razão para a recta situada entre o ângulo do cone e o vértice da secção é a mesma que a do quadrado da base do triângulo passando pelo eixo para a do rectângulo delimitado pelos dois outros lados do triângulo. Chamaremos a tal secção uma parábola"

(Ver Eecke, *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, p.21).

Convém explicitar, no que ficou dito, que a teoria que Apolónio desenvolveu sobre cónicas começou com uma definição inovadora de *cone* (cujo eixo não era obrigatoriamente perpendicular à base) e utilizou nela o conceito de *triângulo axial* (triângulo passando pelo eixo). Definiu *eixo do cone* como a recta que une o vértice do cone ao centro do círculo da base, *plano axial* como o plano que contém o eixo e é perpendicular à base e designou por triângulo axial a intersecção do plano axial com o cone. Dois dos lados deste triângulo são geratrizes do cone e a sua base é um diâmetro do círculo da base. Relativamente ao *plano de secção*, Apolónio tomou-o perpendicular ao triângulo axial, de modo a intersectar a base deste triângulo (ou o seu prolongamento) segundo uma recta perpendicular a essa base. No caso particular da parábola o plano de secção é, também, paralelo a um dos lados do triângulo axial e intersecta o outro lado e a base desse triângulo em dois pontos que têm papel preponderante na definição da cónica. O primeiro é o *vértice da parábola* e o segundo define com o vértice o *eixo da parábola*, segmento que Apolónio designou por *latus transversum*.

Com base nestes conceitos, designando por H o vértice da parábola e por HO o seu eixo; designando ainda por K um ponto qualquer da curva e por G o seu projectado ortogonal sobre o eixo, a propriedade definidora da parábola pode traduzir-se pela relação $GK^2 = HT \cdot HG$. (Fig.1)

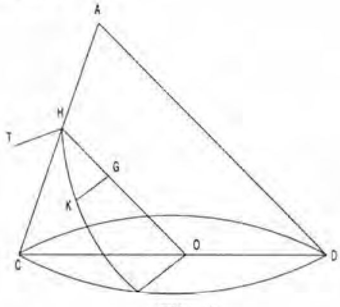

Fig.1

Na figura encontra-se também representado o segmento HT utilizado por Apolónio na definição da curva e designado por *latus erectum*. Este segmento era obtido por um processo [9] correntemente utilizado na Geometria Clássica Grega e em termos actuais pode exprimir-se pela relação

$$\frac{HT}{HA} = \frac{CD^2}{AC \cdot AD},$$

[9]Referimo-nos ao processo de aplicação de áreas.

ou seja, depende apenas do triângulo axial e do vértice da parábola, como, aliás já atrás referimos.

Estão agora reunidas as condições para apresentarmos o teorema de Jacques Bernoulli, que atrás referimos, e que Chasles, na sua obra *Aperçu Historique des Méthodes en Géométrie* enuncia como se segue.

2 *Novum theorema pro doctrina sectionum conicarum*

"*Tomando um plano paralelo à base de um cone e situado à mesma distância do seu vértice que o plano da secção cónica dada, este plano intersectará o cone segundo um círculo cujo diâmetro será o* latus rectum [10] *da cónica.*" *(Bernoulli,*Obra completa, *vol. I, pp. 45 e 46)*

Apresentamos a demonstração no caso particular em que o plano de secção é paralelo a uma geratriz, isto é, quando a secção cónica é uma parábola. Consideremos um cone de vértice A e base circular σ e designemos por α o plano de secção. Seja ACD o triângulo axial e HO o eixo da parábola. Note-se que $HO \| AD$ (pela natureza da cónica). Tracemos $AI \perp \sigma$ e $AB \perp HO$; tomemos N em AI, tal que $d(A,N)=d(A,\alpha)=d(A,HO)=d(A,B)$. Consideremos, agora, um plano β, paralelo a σ passando por N. O plano β intersecta o triângulo axial ACD nos pontos F e E, que são as extremidades do diâmetro do círculo produzido no cone pelo plano β. (Fig.2)

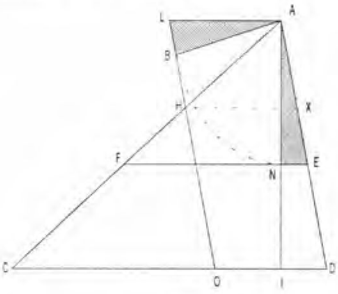

Fig.2

Mostraremos que EF é o latus rectum.

Comecemos por traçar por A uma recta paralela à base, CD, do triângulo axial; esta recta intersecta HO em L. Por H tracemos outra recta paralela a CD que intersecta a geratriz AD em X.

Os triângulos ABL e ANE são congruentes pois $AB = AN$ (por construção), $\angle ABL = \angle ANE$ (rectos) e $\angle BAL = \angle NAE$ (pois $\angle BAL = \angle NAL - \angle NAB = \angle EAB - \angle NAB = \angle NAE$). Desta congruência podemos concluir que $AL = AE$. Por outro lado, do facto de $HXAL$ ser um paralelogramo (pois $XH \parallel AL$ e $HL \parallel XA$) resulta que $XH = AL$. Assim, $XH = AL$ e $AL = AE$, donde, $XH = AE$. Como,

[10] A designação *latus erectum*, utilizada por Apolónio, foi substituída, na Renascença por *latus rectum*.

além disso, os triângulos AHX, AFE e ACD são semelhantes (pois têm os ângulos iguais cada um a cada um), vem

$$\frac{EF}{XH} = \frac{AE}{AX}, \quad \frac{CD}{AC} = \frac{XH}{HA} \quad \text{e} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{XH}{AX}.$$

Das igualdades $\frac{EF}{XH} = \frac{AE}{AX}$ e $XH = AE$, resulta $XH^2 = EF \cdot AX$.
De acordo com a relação $\frac{HT}{HA} = \frac{CD^2}{AC \cdot AD}$ atrás estabelecida, vem:

$$\frac{HT}{HA} = \frac{CD^2}{AC \cdot AD} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{XH}{HA} \cdot \frac{XH}{AX} = \frac{XH^2}{HA \cdot AX} = \frac{EF \cdot AX}{HA \cdot AX} = \frac{EF}{HA},$$

donde $HT = EF$. Este teorema de Bernoulli permite colocar, com facilidade, uma cónica dada sobre um cone também dado. Referindo-se a ele Chasles diz o seguinte:

> *"Apolónio e os geómetras que escreveram depois dele, deram diferentes expressões geométricas, tomadas no cone, do comprimento do latus rectum, para cada secção, mas nenhuma nos pareceu tão simples e tão elegante como a de Jacques Bernoulli."*
>
> (Chasles, *Aperçu Historique des Méthodes en Géométrie*, p.19)

3 Bibliografia

Referências

[1] Bernoulli, Jacques. *Obra Completa*, vol.I, Lips, 1699.

[2] Chasles, M. *Aperçu Historique sur l'Origine et le Developpement des Méthodes en Géométrie.* Paris, Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires, 1889.

[3] Eves, H. *Introdução à História da Matemática* - trad. Hygino H. Domingues. Campinas, S.P.: Editora da UniCamp, 1995.

[4] Heath, T. *Apollonius of Perga Treatise on Conic Sections.* Cambridge: at the University Press, 1896.

[5] Katz, V. *A History of Mathematics: An Introduction.* New York: Harper Collins College Publishers, 1993.

[6] Veloso, E. *Geometria, Temas Actuais.* Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

[7] ——,H. Fonseca, J. P. Ponte e P. Abrantes. *Ensino da Geometria no virar do milénio.* Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999.

[8] Ver Eecke, P. *Les Coniques d'Apollonius de Pergue-Oeuvres traduites pour la première fois du grec en français, avec une introduction et des notes.* Brugges, Desclée, de Brouwer et C, 1923.