Variações Sobre um exercicio de Cálculo Combinatório

António Pereira Rosa

Escola Secundária Maria Amália Vaz de Carvalho
Rua Rodrigo da Fonseca, nº 115
1069–99 Lisboa

O presente trabalho pretende ilustrar a utilização de um exercício aparentemente rotineiro de Cálculo Combinatório (a nível de 12ºano) para motivar a abordagem de algumas questões de técnicas de contagem aritmética (divisibilidade, decomposição em factores primos).

1 O exercício

Num conhecido manual para o 12ºano ([YG]), surge o seguinte exercício no capítulo dedicado ao cálculo Combinatório:

Quantos produtos diferentes de três factores distintos é possível formar com os números $2, 3, 5$ e 7 ?

A maioria dos alunos resolve-o rapidamente: dá ${}^4C_3 = 4$! Quando instados a explicar o raciocínio apresentam razões do tipo *"Como não pode haver repetições e a ordem não interessa (a multiplicação é comutativa), é com combinações e é evidente que têm de ser de 4 objectos tomados de* 3 *a* 3*, pelo que dá* ${}^4C_3 = 4$ *"*. O resultado obtido pode ser confirmado facilmente enumerando todos os possíveis produtos nas condições de enunciado: $2 \times 3 \times 5 = 30$, $2 \times 3 \times 7 = 42$, $2 \times 5 \times 7 = 70$ e $3 \times 5 \times 7 = 105$. Trata-se de um exercício considerado, em geral, muito fácil e de rotina; no manual surge integrado numa série de exercícios mais ou menos imediatos na margem das páginas dedicadas às combinações. Sucede porém que se podem construir algumas variantes deste exercício que levam à consideração de questões interessantes de técnicas de contagem e de aritmética, que normalmente não são abordadas no Ensino Secundário.

2 Algumas variações

Uma ideia que surge naturalmente é considerar produtos de dois factores escolhidos entre $2, 3, 5$ e 7; pelo raciocínio anterior, deveria haver ${}^4C_2 = 6$ desses produtos, o que é fácil de confirmar. Porém, se trabalharmos com números $2, 3, 4$, e 6, verifica-se que existem apenas 5 produtos distintos de dois factores, já que 2×6 e 3×4 valem ambos

12. Confrontados com esta situação, a maioria dos alunos atribui a discrepância à diferente natureza dos números nos dois casos, de modo muito vago (por exemplo, afirmam que no segundo exemplo todos os números são pares e no primeiro não). Sugerimos então aos alunos duas hipóteses de trabalho:

1. Será que diferença de comportamento tem algo a ver com o facto de no exercício inicial estarmos a considerar produtos de três factores escolhidos entre quatro e na segunda dois entre quatro ?

2. Será que diferença de comportamento tem algo a ver com os números particulares em causa ?

Salientamos ainda que qualquer que seja a causa, a discrepância verificada sugere que o raciocínio feito para resolver o problema inicial está, no mínimo, incompleto, ainda que o resultado final esteja certo (algo que não parece perturbar muitos alunos, que afirmam que estando o resultado certo, o raciocínio não importa muito ...)

2.1 A primeira hipótese

Sejam $x, y, z,$ e w quatro números naturais distintos. Será que os produtos de três factores distintos escolhidos entre eles têm de ser diferentes ? A chave de resposta encontra-se na seguinte observação: Dois quaisquer subconjuntos diferentes com 3 elementos de um conjunto com 4 elementos têm de ter dois elementos em comum. Com efeito, sejam A um conjunto com 4 elementos e B e C subconjuntos distintos de A com 3 elementos. Como $B \cup C = A$ e $\#(B \cup C) = \#B + \#C - \#(B \cap C)$ vem $4 = 3 + 3 - \#(B \cup C)$ e portanto $\#(B \cap C) = 2$, como desejávamos. Assim, se dois dos produtos referidos fossem iguais, teriam necessariamente dois factores iguais e os terceiros factores em cada um deles teriam de ser iguais também. Estabelece-se pois uma bijecção entre os subconjuntos de três elementos e os produtos de três factores distintos; como há exactamente ${}^4C_3 = 4$ subconjuntos nestas condições, fica completo o raciocínio feito quando da resolução inicial. É instrutivo ver porque motivo este argumento falha para produtos de dois factores: é que um conjunto com 4 elementos $\{x, y, z, w\}$ tem subconjuntos disjuntos com dois elementos como, por exemplo, $\{x, y\}$ e $\{z, w\}$.

Sugestão para um trabalho mais avançado:

Prove que, se a partir de n números naturais distintos, formarmos todos os possíveis produtos de $n-1$ factores diferentes, esses produtos são em número de ${}^nC_{n-1} = n$ (na prática, temos proposto generalizações mais simples, como o caso de $n = 5$).

2.2 A segunda hipótese

Será possível obter um resultado do tipo

"Se a partir de n números naturais distintos, formarmos todos os possíveis produtos de k factores diferentes $(2 \leq k \leq n-1)$, esses produtos são em número de ${}^nC_{n-1} = n$ ",

mediante a imposição de restrições razoáveis aos números considerados? (consideramos $k \neq 1$, já que o caso de $k = 1$ tem pouco interesse e, além disso, a generalidade dos alunos acha bizarra a ideia de produtos com um só factor). Como já referimos, muitos alunos inclinam-se para esta hipótese, embora não sejam capazes de formular hipóteses satisfatórias sobre a natureza dos números a considerar.

Voltemos aos números $2, 3, 5$, e 7. Como todos são primos, se dois quaisquer produtos de dois factores formados a partir deles fosssem iguais, teríamos duas decomposições em factores primos distintas do mesmo número, o que contraria a unicidade da factorização em números primos no conjunto dos números naturais. Naturalmente, este argumento não é aplicável ao caso dos números $2, 3, 4$ e 6. Um raciocínio análgo justifica a seguinte afirmação

> *"Se a partir de n números naturais primos distintos, formarmos todos os possíveis factores de k factores diferentes ($2 \leq k \leq n-1$), esses produtos são em número de ${}^nC_k$) ".*

Temos asssim uma restrição conveniente a impôr aos números em causa. É de referir que nesta propriedade está a justificação de uma antiga e curiosa designação das combinações (produtos diferentes), actualmente em desuso (ver[SS]).

Exercicío:

A exigência de todos os números serem primos é condição suficiente para o resultado. Será também necessária ?

Temos verificado que a análise desta segunda hipótese é muito mais difícil para os alunos. Na verdade, a nível do 12^oano, a generalidade dos alunos nem sequer sabe o que é um número primo, quanto mais questões "subtis" como a unicidade da decomposição.... Esta situação lamentável não é de estranhar, já que, depois de algum contacto com números primos e decomposição a nível do 2^ociclo e, a título de revisão, no 7^oano de escolaridade, estes assuntos nunca mais são estudados no ensino pré-universitário. Além disso, são em geral, abordados numa perspectiva utilitária como o uso de decomposição em factores primos para a determinação do menor múltiplo comum nos cálculos com fracções (que, diga-se de passagem, muitos alunos esquecem rapidamente). Não nos parece, aliás, razoável uma perspectiva mais ambiciosa com alunos dos 10 a 13 anos. Assim, numa tentativa de inverter esta situação, temos usado precisamente este problema como motivação para levar alunos já num estágio de desenvolvimento mais avançado a um estudo um pouco mais aprofundado da Aritmética.

Referências

[Ca] Calado, J.J.G. (1973). *Compêndio de Aritmética Racional*, Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa.

[YG] Lima, Y. e Gomes, F. (1994), *XeqMat 12*, Editorial O Livro, Lisboa.

[SS] Sebastião e Silva, J. e Silva Paulo, J. (1973), *Compêndio de Álgebra* (7^oano - 2^otomo), Livraria Popular de Francisco Franco, Lisboa.