UNIVERSIDADE DO ALGARVE
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA I
1° Ano Matemática-1999/2000-Exame final
9 Fevereiro 2000-14h30/17h00

1. Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $n \in \mathbb{N}$ e $G = \{X \in M_n(\mathbb{K}) : X = X^\top\}$. Mostre que, para a soma de matrizes, G é um grupo.

2. Considere, em $M_2(\mathbb{R})$:

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : 2a - d = 0 \wedge b = 0 \right\}$$

$$G = \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

   (a) Prove que F é subespaço vectorial de $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Determine uma base e a dimensão de F.

   (c) Se possível, encontre $X, Y, Z \in F$, tais que (X, Y, Z) seja linearmente independente.

   (d) Determine uma base de $F + G$ e uma base para $F \cap G$.

   (e) F e G estão em soma directa? Justifique.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \\ & & 1 \\ 1 & & -3 \\ & & -2 \end{bmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 2 \\ \\ \end{bmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$.

   Se possível, complete A e B de modo a que o sistema $AX = B$ seja:

   (a) Possível e determinado.

   (b) Possível e indeterminado com grau de indeterminação 2.

4. Se possível, dê exemplos de:

   (a) Uma matriz equivalente a $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (b) Dois conjuntos de vectores, X e Y num espaço vectorial de dimensão finita V tais que $X \neq Y$ e $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$.

   (c) Uma aplicação linear f de $\mathbb{R}_3[x]$ para $\mathbb{R}_2[x]$ tal que $\mathrm{Imf} = \langle \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}, -\mathrm{x}^2 - 1 \rangle$ e
   $2x^3 - x^2 + 1 \in Nucf$.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1 & \alpha^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}$, com parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Discuta, em função dos parâmetros α e β, o sistema $AX = B$.

   (b) Resolva, **utilizando o método de eliminação**, o sistema $AX = B$, para $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, indicando a solução geral e duas soluções distintas do sistema.

6. Seja $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(p(x)) = (p(0), 2p(1), -p(0))$.

   (a) Mostre que f é uma aplicação linear.

   (b) Determine uma base do núcleo de f e classifique f.

   (c) Determine $f^{\leftarrow}(\{(1,1,1)\})$.

7. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

   (a) Se v_1, v_2 e v_3 são vectores de um espaço vectorial real V tais que $2v_1 + v_2 - v_3 = 0_V$, então (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente.

   (b) O subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$, $F = \langle (1,0,1,0), (0,-1,1,1) \rangle$ é o conjunto de soluções de um sistema de equações.

   (c) Qualquer aplicação linear de $M_2(\mathbb{R})$ para $\mathbb{R}_3[x]$ é um isomorfismo.

8. Sejam V um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F, G e H subespaços vectoriais de V. Mostre que se $V = F + G$ e $G = H \oplus (F \cap G)$, então $V = F + H$ e $F \cap H = \{0_V\}$.

Resolução

1. Fixe-se $n \in \mathbb{N}$. Repare-se que G é o conjunto das matrizes simétricas de ordem n. Sabe-se já que a soma de matrizes (quando definida) é associativa e tem por elemento neutro a matriz nula do tipo apropriado. Para verificar que G é grupo basta, portanto verificar os seguintes pontos:

   i) **G é fechado para a soma.**

   Sejam A e B dois elementos de G. Como se sabe que $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$, e $A^\top + B^\top = A + B$, porque $A, B \in G$, a matriz $A + B$ também pertence a G.

   ii) **G tem elemento neutro.**

   A matriz nula de ordem n, O_n, está em G, pois é uma matriz simétrica.

   iii) **Qualquer elemento de G tem simétrico em G.**

   Seja A um elemento de G. Como se sabe $(-A)^\top = -A^\top$; mas $-A^\top = -A$, porque $A \in G$, portanto a matriz $-A$ também pertence a G.

2. (a) É preciso verificar as condições da definição de subespaço vectorial

i) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pertence trivialmente a F.

ii) Sendo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ dois elementos de F, a sua soma é $\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}$.

Por hipótese $b = 0$, $b' = 0$, $2a - d = 0$ e $2a' - d' = 0$. Então $b + b' = 0$ e $2(a + a') - (d + d') = (2a - d) + (2a' - d') = 0 + 0 = 0$. Daqui se conclui que $\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix} \in F$.

iii) Sendo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$.

Por hipótese $b = 0$ e $2a - d = 0$. Então $\lambda b = 0$ e $2(\lambda a) - \lambda d = \lambda(2a - d) = 0$.

Daqui se conclui que $\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \in F$.

(b) Um vector genérico de F é uma matriz da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{bmatrix}$, com $a, c \in \mathbb{R}$.

Como $\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 2a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, o sistema de vectores $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$ forma um sistema de geradores de F. Sendo um sistema linearmente independente é uma base de F. Como o número de vectores de uma base de F é 2, $\dim F = 2$.

(c) Como foi visto na alínea anterior, $\dim F = 2$ e, por isso é impossível encontrar em F um sistema linearmente independente com três vectores.

(d) Sabemos que $F + G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Como $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e os restantes vectores formam um sistema linearmente independente, concluímos que $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $F + G$.

Sabendo que $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, concluimos $\dim(F \cap G) = 1$.

Como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ pertence a F e a G, uma base de $F \cap G$ pode ser $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$.

(e) F e G não estão em soma directa porque $\dim(F \cap G) = 1$.

3. (a) O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se $car\,[A|B] = car\,(A) = 3$ (pois o número de incógnitas é 3). Uma possível forma de completar as matrizes é então $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & 1 \\ 1 & \underline{0} & -3 \\ \underline{0} & \underline{0} & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ \underline{0} \\ 2 \\ \underline{0} \end{bmatrix}$. Uti-

lizando o método de condensação verifica-se facilmente que estas matrizes satisfazem a condição pretendida.

(b) O sistema $AX = B$ é possível e determinado se e só se $car\,[A|B] = car\,(A) = 2$ (pois no caso do sistema ser possível o grau de indeterminação é igual à diferença entre o número de incógnitas e a característica de A).

Uma possível forma de completar as matrizes é então $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \underline{-3} \\ \underline{0} & \underline{0} & 1 \\ 1 & \underline{2} & -3 \\ \underline{\frac{2}{3}} & \underline{\frac{4}{3}} & -2 \end{bmatrix}$

e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ \underline{0} \\ 2 \\ \underline{\frac{4}{3}} \end{bmatrix}$, que se verifica facilmente estarem nas condições pretendidas.

4. (a) Sabe-se que efectuando qualquer operação elementar nas linha ou colunas de uma matriz se obtém uma matriz com a mesma característica da primeira. Um possível exemplo pode ser a matriz $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ obtida da matriz inicial por multiplicação dos elementos da primeira linha por dois.

Outra possível resolução seria calcular a característica da matriz inicial e dar como exemplo qualquer matriz com a característica obtida, pois duas matrizes do mesmo tipo são equivalentes se e só se têm a mesma característica.

(b) No espaço vectorial $\mathbb{R}^2$, podem-se considerar os conjuntos $X = \{(1,0,0)\}$ e $Y = \{(2,0,0)\}$. $X \neq Y$ e $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$, pois $(1,0,0) \in \langle Y \rangle$ — $(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,0,0)$ — e $(2,0,0) \in \langle X \rangle$ — $(2,0,0) = 2(1,0,0)$.

(c) Considere-se o sistema de vectores $(2x^3 - x^2 + 1, x^2, x, 1)$, que se verifica facilmente ser uma base $\mathbb{R}_3[x]$ pois é um sistema linearmente independente com quatro vectores. Defina-se, por exemplo, a seguinte aplicação f através das imagens dos vectores dessa base:

$f(2x^3 - x^2 + 1) = 0$
$f(x^2) = x^2 + 2x$
$f(x) = -x^2 - 1$
$f(1) = -x^2 - 1.$

Por construção, $2x^3 - x^2 + 1 \in Nuc f$ e como se sabe que $Im f$ é gerado pelas imagens dos vectores de qualquer base tem-se que

$$Im f = \langle 0, x^2 + 2x, -x^2 - 1, -x^2 - 1 \rangle = \langle x^2 + 2x, -x^2 - 1 \rangle.$$

5. (a) Vamos condensar a matriz ampliada do sistema, de modo a poder proceder à discussão:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \beta \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \beta-1 \end{array}\right]$$

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, $car\,[A|B] = car\,(A) = 3$ - o sistema é possível e determinado.

Se $\alpha = 1$, os casos são

$\beta = 1$, $car\,[A|B] = car\,(A) = 1$ e - o sistema é possível e indeterminado, com g.i.= 2.

$\beta \neq 1$, $car\,[A|B] = 2$, $car\,(A) = 1$ e o sistema é impossível.

Se $\alpha = -1$ os casos são

$\beta = 1$, $car\,[A|B] = car\,(A) = 2$ e o sistema é possível e indeterminado, com g.i.=1.

$\beta \neq 1$, $car\,[A|B] = 3$, $car\,(A) = 2$ e o sistema é impossível.

(b) Utilizando os cálculos da alínea anterior, começamos a resolução do sistema com a condensação seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema inicial é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e o conjunto de soluções do sistema é $S := \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 1 \text{ e } x_2 = -x_3\}$.
Duas soluções do sistema podem ser, por exemplo, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, -1)$.

6. (a) Uma condição para que f seja linear é

$$\forall p, q \in \mathbb{R}_2[x] \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad f((\alpha p + \beta q)(x)) = \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x))$$

Esta condição é satisfeita, pois se p e q são elementos arbitrários de $\mathbb{R}_2[x]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{aligned} f((\alpha p + \beta q)(x)) &= ((\alpha p + \beta q)(0), 2(\alpha p + \beta q)(1), -(\alpha p + \beta q)(0)) \\ &= (\alpha p(0) + \beta q(0), 2(\alpha p(1) + \beta q(1)), -(\alpha p(0) + \beta q(0))) \\ &= (\alpha p(0), 2\alpha p(1), -\alpha p(0)) + (\beta q(0), 2\beta q(1), -\beta q(0)) \\ &= (\alpha p(0), 2p(1), -p(0)) + \beta(q(0), 2q(1), -q(0)) \\ &= \alpha f(p(x)) + \beta f(q(x)). \end{aligned}$$

(b) $Nucf = \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : f(p(x)) = (0,0,0)\}$, que também se pode escrever $\{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : (p(0), 2p(1), -p(0)) = (0,0,0)\}$. Sendo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, as três condições seguintes são equivalentes,

$$(p(0), 2p(1), -p(0)) = (0,0,0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} d=0 \\ 2(a+b+c+d)=0 \\ -d=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} d=0 \\ a+b+c=0 \end{array}\right.$$

Um vector genérico de $Nucf$ é, portanto, qualquer polinómio da forma

$$p(x)=(-b-c)x^3+bx^2+cx, \qquad (b,c\in\mathbb{R}).$$

Como $(-b-c)x^3+bx^2+cx=b\left(-x^3+x^2\right)+c\left(-x^3+x\right)$, os vectores $-x^3+x^2$ e $-x^3+x$ formam um sistema de geradores de $Nucf$ e como formam um sistema linearmente independente de vectores, $\left(-x^3+x^2,-x^3+x\right)$ é uma base de $Nucf$.

A função f não é injectiva porque $Nucf\neq\{0\}$ e não é sobrejectiva porque $Imf\neq\mathbb{R}^3$, pois $\dim Imf=4-\dim Nucf=4-2=2$.

(c) $f^{\leftarrow}(\{(1,1,1)\}) = \{p(x)\in\mathbb{R}_2[x]: f(p(x))=(1,1,1)\}$, que é o $\{p(x)\in\mathbb{R}_2[x]:(p(0),2p(1),-p(0))=(1,1,1)\}$ e este é $\emptyset$, pois $p(0)$ não pode ser simultaneamente 1 e -1.

7. (a) A afirmação é falsa pois $2v_1+v_2-v_3=0_V$ é uma combinação linear nula não trivial dos vectores v_1,v_2 e v_3.

(b) Verdadeira, qualquer subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$ é o conjunto de soluções de algum sistema de equações.

A justificação pode também ser dada determinando o sistema: $(x,y,z,w)\in F$ é equivalente a $(x,y,z,w)\in\langle(1,0,1,0),(0,-1,1,1)\rangle$ que também é equivalente a (x,y,z,w) é combinação linear de $\langle(1,0,1,0),(0,-1,1,1)\rangle$, ou seja $((x,y,z,w),(1,0,1,0),(0,-1,1,1))$ é linearmente dependente, ou ainda, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \end{bmatrix}$ tem característica dois.

Basta então determinar condições sobre x,y,z e w de forma a que a matriz tenha característica dois. Considere-se a condensação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \end{bmatrix} \xrightarrow{-xL_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & y & z-x & w \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{yL_2+L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z-x+y & w+y \end{bmatrix}$$

Concluímos que

$$(x,y,z,w)\in F \Leftrightarrow -x+y+z=0$$

e $y+w=0$, ou seja $F:=\langle(1,0,1,0),(0,-1,1,1)\rangle$ é o conjunto de soluções do sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} -x+y+z=0 \\ y+w=0 \end{array}\right.$$

(c) A afirmação é falsa, basta considerar a aplicação linear nula de $M_2(\mathbb{R})$ para $\mathbb{R}_3[x]$, que é trivialmente não injectiva nem sobrejectiva.

8. Sendo v um elemento arbitrário de V, como $V = F + G$, existem $f \in F$ e $g \in G$ tais que $v = f + g$ (1)

   Usando a hipótese de $G = H \oplus (F \cap G)$, existem $h \in H$ e $f_1 \in F \cap G$ tais que $g = h + f_1$. Substituindo em (1), obtém-se $v = (f + f_1) + h$. Conclui-se que $V = F + H$.

   Tem-se ainda

   $\dim V = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G)$ (2)

   $\dim G = \dim H + \dim (F \cap G)$ (3)

   Por (2) e (3), $\dim V = \dim F + \dim H$ o que implica $F \cap G = \{0_V\}$.