

Os teoremas do cosseno e do seno na geometria esférica

D.A. Catalano

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro
domenico@mat.ua.pt

1 Introdução

Apesar da geometria plana ser fundamental nos currículos escolares, não se deveria esquecer o facto de que a Terra tem uma forma geométrica mais próxima de uma esfera do que de um plano. Por isso parece-nos importante apresentar algumas noções de geometria esférica. Um exemplo típico de aplicação prática é a navegação. Mas também na mecânica a geometria esférica tem muitas aplicações.

Do ponto de vista puramente teórico um dos objectos geométricos mais interessante é o triângulo. Iremos aqui expor partes da teoria sobre triângulos esféricos com o objectivo de mostrar os seguintes resultados:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior de π .
- É sempre possível, a partir de três quantidades escolhidas entre os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo esférico, calcular as outras.

No plano, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a π e triângulos semelhantes têm os mesmos ângulos internos. Portanto, dados só os ângulos internos de um triângulo plano, nada podemos dizer sobre o comprimento dos lados.

Mostraremos b) utilizando o teorema do cosseno e do seno da geometria esférica exemplificando as várias situações e os procedimentos de cálculo num diagrama. Por isto, fórmulas que serão utilizadas no diagrama terão uma numeração diferente.

Sendo a esfera unitária S^2 um subconjunto de \mathbb{R}^3 os seus elementos serão, dependendo do contexto, pontos do espaço tridimensional ou vectores de \mathbb{R}^3 . Sejam $a, b \in \mathbb{R}^3$, denotaremos por $a \cdot b$ e por $a \times b$, respectivamente, o produto interno usual de a com b e o produto externo de a com b .

2 Triângulos esféricos

Seja

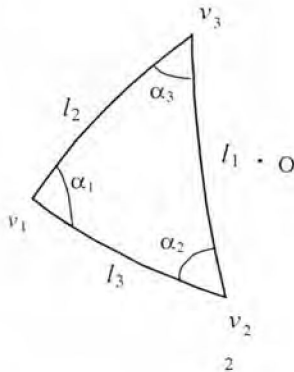
$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \right\}$$

a esfera unitária em \mathbb{R}^3 . A intersecção de um plano que contém a origem $O = (0, 0, 0)$ com S^2 é um círculo máximo. Dados $a, b \in S^2$ é fácil ver que há sempre um círculo máximo γ que os contém. Aliás, se $-b \neq a$, o círculo γ é único e uma equação do plano cuja intersecção com S^2 é γ será $(a \times b) \cdot v = 0$. Arcos de círculos máximos contêm os caminhos mais curtos em S^2 entre os seus

extremos. No plano, temos a mesma situação para segmentos de rectas.

Um *triângulo esférico* é um tripló (v_1, v_2, v_3) de pontos de S^2 , sendo v_1, v_2, v_3 vectores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 . Adoptaremos, como convenção, que o triângulo (v_1, v_2, v_3) é um tripló de vectores positivamente orientados, ou seja, tais que $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 > 0$. Note-se que $(v_1 \times v_2) \cdot v_3 = (v_2 \times v_3) \cdot v_1 = (v_3 \times v_1) \cdot v_2$.

Podemos imaginar um triângulo esférico como o conjunto formado pelos seus vértices v_1, v_2, v_3 e pelos seus lados l_1, l_2, l_3 como na figura:



onde:

- l_i é o arco de círculo máximo entre v_{i+1} e v_{i+2} ($i = 1, 2, 3$), sendo $(i, i+1, i+2)$ uma permutação cíclica de $(1, 2, 3)$ ¹⁴.
- α_i é o ângulo entre os dois planos que contêm a origem O e, respectivamente, l_{i+1}, l_{i+2} .

Denotando por s_i o comprimento do arco do círculo máximo l_i temos que

$$0 < s_i < \pi \quad \text{e} \quad 0 < \alpha_i < \pi$$

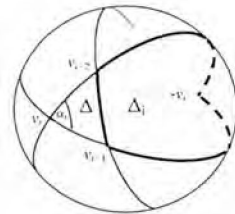
Mais, sendo s_i o ângulo em radianos entre os vectores v_{i+1} e v_{i+2} , então

$$\begin{aligned} \cos s_i &= v_{i+1} \cdot v_{i+2} \quad \text{e} \\ \sin s_i &= |v_{i+1} \times v_{i+2}| \end{aligned} \tag{1}$$

3 Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Para cada ângulo α_i do triângulo $\Delta = (v_1, v_2, v_3)$ seja Δ_i o triângulo $(v_{i+2}, v_{i+1}, -v_i)$.

$\Delta \cup \Delta_i$ é o diedro de vértices $v_i, -v_i$ e ângulo α_i .



Como sabemos a área da esfera é $A(S^2) = 4\pi$. Então a área do diedro $\Delta \cup \Delta_i$ será

$$A(\Delta) + A(\Delta_i) = \frac{\alpha_i}{2\pi} 4\pi$$

de onde concluímos

$$3A(\Delta) + \sum_{i=1}^3 A(\Delta_i) = 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i \tag{2}$$

¹⁴A adição para índices é dada pela tabela

+	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Seja $-\Delta$ o triângulo $(-v_1, -v_3, -v_2)$ e $-\Delta_i$ ($i = 1, 2, 3$) o triângulo $(-v_{i+1}, -v_{i+2}, v_i)$. Sendo, por simetria,

$$\begin{aligned} A(\Delta) &= A(-\Delta), \\ A(\Delta_i) &= A(-\Delta_i) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3)$$

e

$$\begin{aligned} A(\Delta) + \sum_{i=1}^3 A(\Delta_i) + A(-\Delta) \\ + \sum_{i=1}^3 A(-\Delta_i) = A(S^2) \end{aligned}$$

por outro lado, concluímos que

$$A(\Delta) + \sum_{i=1}^3 A(\Delta_i) = \frac{1}{2}4\pi \quad (3)$$

Subtraindo (3) de (2) temos que

$$2A(\Delta) = 2 \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i \right) - 2\pi \text{ ou seja}$$

$$A(\Delta) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Sendo assim, como $A(\Delta) > 0$, temos o seguinte resultado: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi > 0$, isto é:

A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior que π .

4 O triângulo polar

Seja Δ o triângulo (v_1, v_2, v_3) . O triângulo polar associado a Δ é o triângulo $\Delta' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ em que v'_1, v'_2 e v'_3 verificam

$$v'_i = \frac{v_{i+1} \times v_{i+2}}{|v_{i+1} \times v_{i+2}|}, \quad \text{isto é,}$$

$$\Delta' = \left(\frac{v_2 \times v_3}{|v_2 \times v_3|}, \frac{v_3 \times v_1}{|v_3 \times v_1|}, \frac{v_1 \times v_2}{|v_1 \times v_2|} \right).$$

Sejam s'_i e α'_i , respectivamente, os comprimentos dos lados e os ângulos do triângulo Δ' e seja Δ'' o triângulo polar associado a Δ' . Então temos a seguinte

Proposição 3 i) $\Delta'' = \Delta$ ii) $s'_i = \pi - \alpha_i$ iii) $\alpha'_i = \pi - s_i$.

Demonstração. i) O símbolo \parallel indicará proporcionalidade entre vectores sendo o factor de proporcionalidade positivo. Utilizando a identidade vectorial

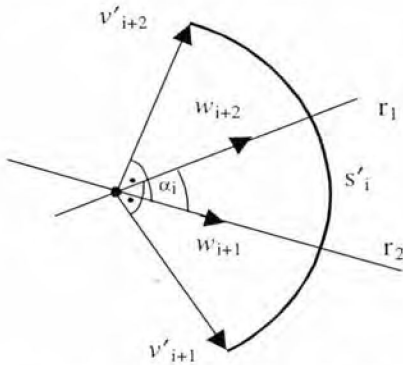
$$(a \times b) \times c = (c \cdot a)b - (c \cdot b)a \quad (4)$$

da definição de triângulo polar, sendo $a \cdot (a \times b) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} v''_i \parallel v'_{i+1} \times v'_{i+2} \parallel (v_{i+2} \times v_i) \\ \times (v_i \times v_{i+1}) \\ = [(v_i \times v_{i+1}) \cdot v_{i+2}] v_i \parallel v_i \end{aligned} \quad (5)$$

Mas como $|v''_i| = |v_i| = 1$ de (5) concluímos que $v''_i = v_i$. Em particular $s''_i = s_i$.

ii) A figura seguinte não é mais que a projecção ortogonal dos triângulos Δ e Δ' sobre o plano Π_i ortogonal a v_i que contém a origem O . Como v'_{i+1} e v'_{i+2} são ortogonais a v_i , então v'_{i+1} e v'_{i+2} pertencem ao plano Π_i . As projecções ortogonais dos planos que passam por O e contêm os lados l_{i+1} e l_{i+2} sobre o plano Π_i serão duas rectas r_1 e r_2 , sendo r_1 ortogonal a v'_{i+1} e r_2 ortogonal a v'_{i+2} . O ângulo entre r_1 e r_2 será então α_i . Denotaremos por w_{i+1} , w_{i+2} as projecções ortogonais de v_{i+1} , respectivamente, v_{i+2} sobre o plano Π_i .



Sendo $|v'_{i+1}| = |v'_{i+2}| = 1$, da figura anterior, concluímos: $s'_i = \pi - \alpha_i$.

iii) Utilizando i) e ii) temos $s_i = s''_i = \pi - \alpha'_i$. Então $\alpha'_i = \pi - s_i$.

5 O teorema do cosseno

Utilizando a igualdade ii) da proposição do parágrafo anterior, (1) e a identidade de Lagrange

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c),$$

vem

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \cos(\pi - s'_i) = -\cos s'_i \\ &= -v'_{i+1} \cdot v'_{i+2} \\ &= -\frac{v_{i+2} \times v_i}{|v_{i+2} \times v_i|} \cdot \frac{v_i \times v_{i+1}}{|v_i \times v_{i+1}|} \\ &= -\frac{(v_{i+2} \times v_i) \cdot (v_i \times v_{i+1})}{\sin s_{i+1} \sin s_{i+2}} \\ &= -\frac{(v_{i+2} \cdot v_i)(v_i \cdot v_{i+1})}{\sin s_{i+1} \sin s_{i+2}} \\ &\quad + \frac{(v_{i+2} \cdot v_{i+1})(v_i \cdot v_i)}{\sin s_{i+1} \sin s_{i+2}} \end{aligned}$$

e de (1) concluímos que

$$\cos \alpha_i = \frac{\cos s_i - \cos s_{i+1} \cos s_{i+2}}{\sin s_{i+1} \sin s_{i+2}} \quad (C1)$$

Resolvendo esta igualdade a $\cos s_i$, obtém-se: (**Teorema do cosseno**)

$$\cos s_i = \cos s_{i+1} \cos s_{i+2} - \sin s_{i+1} \sin s_{i+2} \cos \alpha_i \quad (C2)$$

Como na geometria plana, o teorema do cosseno permite-nos calcular o comprimento de um lado de um triângulo, conhecendo o comprimento dos outros dois lados e o ângulo entre eles.

Aplicando o teorema do cosseno ao triângulo polar Δ' associado a Δ e utilizando as igualdades ii) e iii) da proposição do parágrafo anterior, temos que

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= -\cos \alpha_{i+1} \cos \alpha_{i+2} \\ &\quad + \sin \alpha_{i+1} \sin \alpha_{i+2} \cos s_i \end{aligned} \quad (C3)$$

Mais, resolvendo a última igualdade relativamente a $\cos s_i$, vem

$$\cos s_i = \frac{\cos \alpha_i + \cos \alpha_{i+1} \cos \alpha_{i+2}}{\sin \alpha_{i+1} \sin \alpha_{i+2}} \quad (C4)$$

6 O teorema do seno

Sejam $\varepsilon = (v_i \times v_{i+1}) \cdot v_{i+2}$ e $\varepsilon' = (v'_i \times v'_{i+1}) \cdot v'_{i+2}$. Por um lado, de (5) sabemos que

$$(v_{i+2} \times v_i) \times (v_i \times v_{i+1}) = \varepsilon v_i \quad (6)$$

Por outro lado, de (1), i) e ii) da proposição do parágrafo 4, temos que

$$\begin{aligned} &(v_{i+2} \times v_i) \times (v_i \times v_{i+1}) \\ &= |v_{i+2} \times v_i| |v_i \times v_{i+1}| (v'_{i+1} \times v'_{i+2}) \\ &= \sin s_{i+1} \sin s_{i+2} |v'_{i+1} \times v'_{i+2}| v''_i \\ &= \sin s_{i+1} \sin s_{i+2} \sin s'_i v''_i \\ &= \sin s_{i+1} \sin s_{i+2} \sin \alpha_i v''_i \\ &= \sin s_{i+1} \sin s_{i+2} \sin \alpha_i v_i \end{aligned} \quad (7)$$

De (6) e (7) concluímos que

$$\sin s_{i+1} \sin s_{i+2} \sin \alpha_i = \varepsilon \quad (8)$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao triângulo polar Δ' associado a Δ , utilizando ii) e iii) da proposição do parágrafo 4, temos que

$$\sin \alpha_{i+1} \sin \alpha_{i+2} \sin s_i = \varepsilon' \quad (9)$$

Sendo (9) independente de i , esta continua a ser válida se escrevermos $i + 1$ em vez de i . Isto é,

$$\sin \alpha_{i+2} \sin \alpha_i \sin s_{i+1} = \varepsilon' \quad (10)$$

Dividindo ordenadamente (10) por (8) temos

$$\frac{\sin \alpha_{i+2}}{\sin s_{i+2}} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$$

e, como $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ não depende de i , podemos concluir que: (**Teorema do seno**)

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin s_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin s_2} = \frac{\sin \alpha_3}{\sin s_3}. \quad (S1)$$

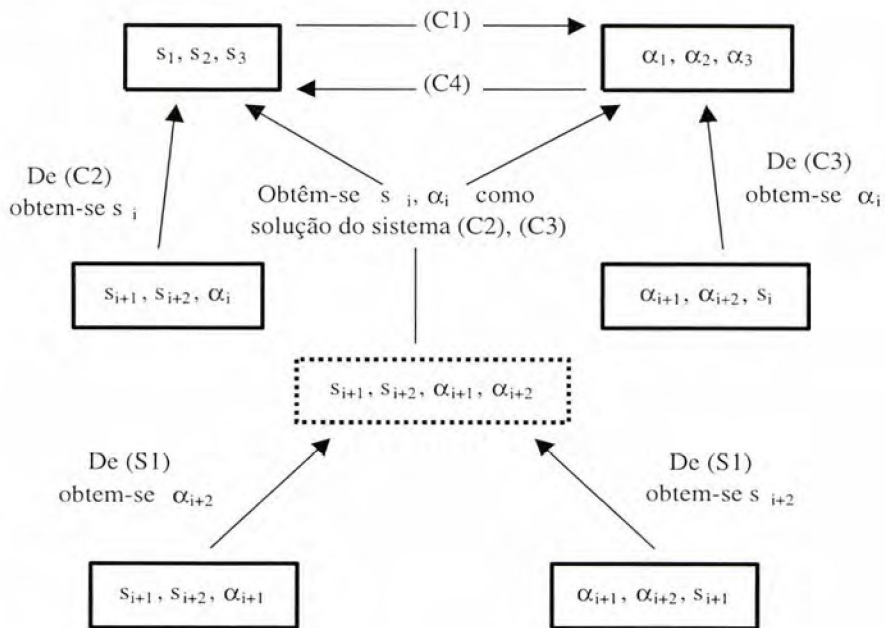
7 Conclusões

O diagrama da página seguinte descreve como, através das fórmulas do

parágrafo 5 e do teorema do seno, é sempre possível, a partir de três quantidades escolhidas entres os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo esférico, calcular as outras. Observamos que, de (C1), se obtêm os ângulos a partir dos comprimentos dos lados e que, de (C4), se obtêm os comprimentos dos lados a partir dos ângulos. Mais, sendo $\sin t = \sin(\pi - t)$, utilizando o teorema do seno (S1) para calcular um ângulo ou o comprimento de um lado, temos sempre duas soluções.

As setas do diagrama vão de um conjunto de quantidades supostas conhecidas a um conjunto de quantidades a calcular e, trazem a informação de qual a fórmula a utilizar e, eventualmente, qual a quantidade que se consegue calcular através dessa fórmula.

Creemos que é possível conseguir programar um computador ou uma máquina calculadora, a partir do diagrama, de modo a calcular todas as quantidades dadas apenas três delas.



Referências

- [1] M. Berger, *Geometry, Volume II*, Springer.