Exames nacionais do ensino secundário

1999

Ponto 135 – 12º ano de escolaridade (Decreto nº 286/89, de 29 de Agosto)

Apresentamos de seguida as *versões 1 do Ponto 135*, para os cursos gerais e os cursos tecnológicos.

Observações iniciais

Todas as provas têm a duração de 120 minutos.
A primeira parte de todas as provas inicia-se com o seguinte conjunto de observações:
• As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
• Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
• Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
• Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
• Não apresente cálculos.

A cotação desta parte é de 81 pontos em 200. Cada resposta certa vale 9 pontos, cada resposta errada vale -3 pontos e cada questão não respondida ou anulada vale zero pontos.

Um total negativo nesta parte vale zero pontos.

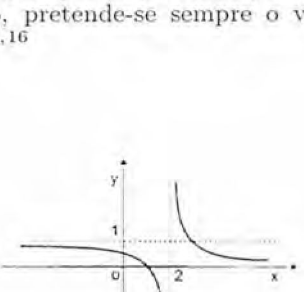
A segunda parte das provas inicia-se com as duas seguintes observações:

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.
Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pretende para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.[15,16]

1ª Fase 1ª Chamada

Primeira Parte

1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.



[15]**NR:** Esta chamada de atenção não ocorre na prova de época especial.

[16]**NR:** Indicamos as cotações de cada questão desta parte entre parênteses ao lado do número de ordem.

As rectas de equações $x = 2$, $y = 1$ e $y = 0$ são assímptotas do gráfico de f. Seja (x_n) a sucessão de termo geral

$$x_n = 2 - n^2$$

Indique o valor de $\lim f(x_n)$

(A) 0 (B) 1

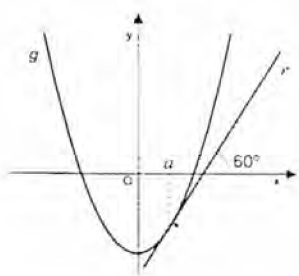
(C) $-\infty$ (D) $+\infty$

2. Na figura estão representadas:

   - Parte do gráfico da função g de domínio $\mathbb{R}$, definida por

     $$g(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$$

   - Uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa a



A inclinação da recta r é $60°$.

Indique o valor de a

(A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. De uma função h de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

   - $h(0) = 0$
   - h é estritamente crescente no intervalo $[0, 2]$
   - h é uma função par

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) h tem um máximo relativo para $x = 0$

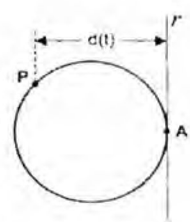
(B) $h(-1) < 0$

(C) h é estritamente crescente no intervalo $[-1, 0]$

(D) $h(-2) + h(2) = 0$

4. Na figura estão representadas:

   - Uma circunferência de raio 1
   - Uma recta r, tangente à circunferência no ponto A

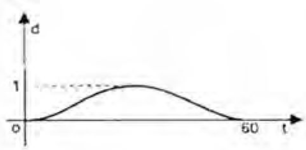


Admita que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos.

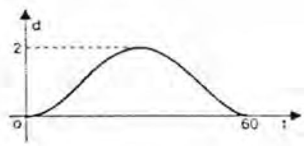
Seja $d(t)$ a distância do ponto P à recta r, t segundos após o início do movimento.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d?

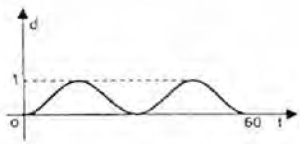
(A)



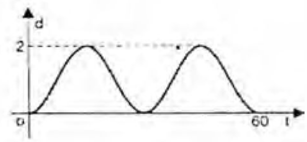
(B)



(C)



(D)



5. Num referencial o.n. xOy, uma parábola P tem vértice $V(3,6)$ e foco $F(-1,6)$. Indique qual das expressões seguintes é uma equação da directriz da parábola P.

(A) $x=-5$ **(B)** $x=1$

(C) $x=3$ **(D)** $x=7$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β, definidos pelas seguintes equações:

$$\alpha:\ x=1 \quad \text{e} \quad \beta:\ y=2$$

Seja r a recta de intersecção dos planos α e β.

Indique qual das expressões seguintes é uma equação vectorial da recta r.

(A) $(x,y,z)=(1,2,0)+k(0,0,2),\quad k\in\mathbb{R}$

(B) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(1,2,0),\quad k\in\mathbb{R}$

(C) $(x,y,z)=(1,1,0)+k(0,0,2),\quad k\in\mathbb{R}$

(D) $(x,y,z)=(1,2,0)+k(1,2,0),\quad k\in\mathbb{R}$

7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano definido pela equação $x+2y+3z=10$

Para um certo número real m, a condição $x=y-2=\frac{z}{m}$ define uma recta paralela ao referido plano.

Indique o valor de m

(A) -2 **(B)** -1

(C) 1 **(D)** 2

8. Lança-se quatro vezes consecutivas um dado com as faces numerads de 1 a 6. No primeiro lançamento sai face 1 e no segundo sai face 2.

Qual é a probabilidade de os número saídos nos quatro lançamentos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6\times5\times4\times3}{6^4}$ **(B)** $\frac{6\times5}{6^4}$

(C) $\frac{6\times5}{6^2}$ **(D)** $\frac{4\times3}{6^2}$

9. $\underline{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g}$ representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão substituídos por letras.

Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $c={}^6C_3$ **(B)** $c={}^6C_2$

(C) $c={}^7C_3$ **(D)** $c={}^7C_2$

Segunda Parte

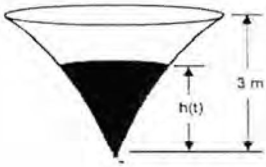
1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 e^{x+1} & se\ x \leq 0 \\ \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} & x > 0 \end{cases}$

   1.1.(12) Estude a função f quanto à continuidade.

   1.2.(15) Mostre que f admite um único máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e determine-o.

   1.3.(11) Seja r a recta de equação $y = 1$. Mostre que existem infinitos pontos de intersecção da recta r com o gráfico de f.

2. A figura representa um reservatório com três metros de altura.



   Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

   Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

   $$h(t) = \log_2(a - bt), \quad t \in [0, 4],$$

   onde a e b são constantes reais positivas.

   2.1.(12) Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$.

   2.2.(13) Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-0,2$.

   Interprete este valor no contexto da situação descrita.

3. A Joana tem na estante do seu quarto três livros de José Saramago, quatro de Sofia de Mello Breyner Andresen e cinco de Carl Sagan.

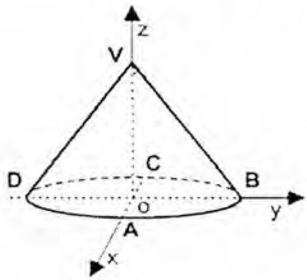
   Quando soube que ia passar as férias a casa da sua avó, decidiu escolher seis desses livros, para ler durante este período de lazer. A Joana pretende levar dois livros de José Saramago, um de Sofia de Mello Breyner Andresen e três de Carl Sagan.

   3.1.(8) De quantas maneiras pode fazer a sua escolha?

   3.2.(12) Admita agora que a Joana **já seleccionou** os seis livros que irá ler em casa da sua avó.

   Supondo aleatória a sequência pela qual estes seis livros vão ser lidos, qual é a probabilidade de os dois livros de José Saramago serem lidos um a seguir ao outro? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.



Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$ e $[BD]$ são diâmetros da base
- O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice V pertence ao semieixo positivo Oz

4.1.(12) Sabendo que uma equação do plano ABV é $4x + 4y + 3z = 12$, mostre que o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4.

4.2.(12) Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone.

4.3.(12) Designando por α a amplitude do ângulo BVD, determine o valor de senα.

FIM

1ª Fase 2ª Chamada

Primeira Parte

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & se\ x \leq 1 \\ 2x, & se\ x > 1. \end{cases}$$

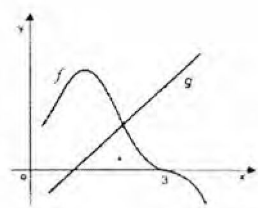
Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f(1 + \frac{1}{n})$

Indique qual das expressões sseguintes define o termo geral de (u_n)

(A) $1 + \frac{1}{n}$ **(B)** $2 + \frac{2}{n}$

(C) $3 + \frac{3}{n}$ **(D)** $5 + \frac{1}{n}$

2. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.



O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.

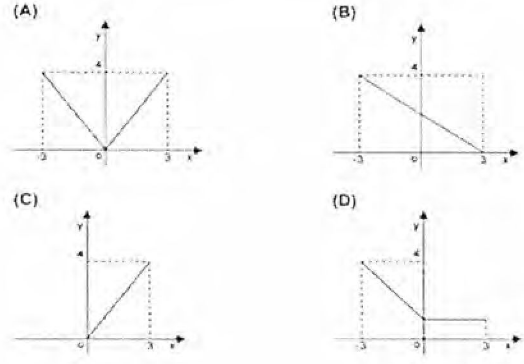
Indique o valor de $\lim_{x \to 3^-} \frac{g(x)}{f(x)}$

(A) 0 **(B)** 1

(C) $-\infty$ **(D)** $+\infty$

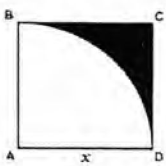
3. De uma certa função f sabe-se que o seu domínio é o intervalo $[-3, 3]$ e que o seu contradomínio é o intervalo $[-4, 4]$.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $|f|$?



4. Na figura estão representados:

- Um quadrado $[ABCD]$
- Um arco de circunferência BD de centro em A



Indique qual das funções seguintes dá a área, em cm^2, da região sombreada, em função do comprimento x, em cm, do lado do quadrado.

(A) $f(x) = \frac{4x-\pi x^2}{2}$

(B) $f(x) = \frac{(1-\pi)x^2}{2}$

(C) $f(x) = \frac{(4-\pi)x^2}{4}$

(D) $f(x) = \frac{\pi-1}{4}x^2$

5. Considere uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2. Seja P um ponto da elipse $\mathcal{E}$ tal que $\overline{PF_1} = 6$ e $\overline{PF_2} = 14$. Seja $[V_1V_2]$ o eixo menor da elipse $\mathcal{E}$.

Qual é a distância de V_1 a F_1?

(A) 4 **(B)** 8

(C) 10 **(D)** 20

6. Sejam α e β dois planos perpendiculares.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

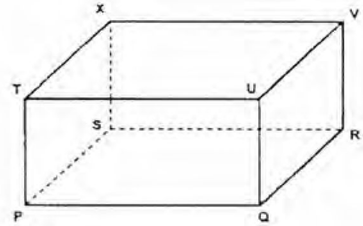
(A) Qualquer recta paralela a α é paralela a β.

(B) Qualquer recta paralela à intersecção de α e β é paralela a β.

(C) Qualquer recta perpendicular a α é perpendicular a β.

(D) Qualquer recta perpendicular à intersecção de α e β é perpendicular a β.

7. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo $[PQRSTUVX]$.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\overrightarrow{TP} \, . \, \overrightarrow{QU} = 0$

(B) $\overrightarrow{UQ} \, . \, \overrightarrow{TX} = 0$

(C) $\overrightarrow{PQ} \, . \, \overrightarrow{TU} = 0$

(D) $\overrightarrow{PQ} \, . \, \overrightarrow{PV} = 0$

8. O João tem no bolso do casaco uma moeda de 50\$00, duas moedas de 100\$00 e três moedas de 200\$00.

Retirando duas moedas ao acaso, qual é a probabilidade de, com elas, perfazer a quantia exacta de 250\$00?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{5}$

9. Uma nova marca de gelados oferece, em cada gelado, um de três bonecos: Rato Mickey, Peter Pan ou Astérix. Sete amigos vão comprar um gelado cada um.

Supondo que os três bonecos têm igual probabilidade de sair, qual é a probabilidade de o Rato Mickey sair exactamente a dois dos sete amigos?

(A) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5$

(B) $\frac{{}^7C_2}{7!}$

(C) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2$

(D) $\frac{{}^7A_2}{7!}$

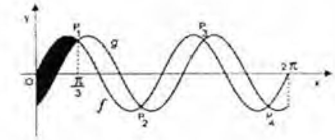
Segunda Parte

1. Na figura estão as representações gráficas de duas funções, f e g, de domínio $[0, 2\pi]$, definidas por:

$$f(x) = \text{sen}(2x)$$

$$g(x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

P_1, P_2, P_3 e P_4 são os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g. A abcissa de P_1 é $\frac{\pi}{3}$



1.1.(12) Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1

1.2.(12) Determine as coordenadas de P_2

1.3.(12) Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

2. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.

Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por

$$v(t) = -3\ln(1 - 0,005t) - 0,01t$$

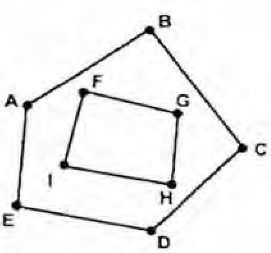
(ln significa logaritmo de base e). A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

2.1.(7) A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem á massa de combustível. Sabendo que o combustível é consumido á taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t \in [0, 160]$

2.2.(18) Verifique que a derivada da função v, no intervalo $[0, 160]$, é positiva e conclua qual é a velocidade máxima que o foguetão atinge neste intervalo. Apresente o resultado em quilómetros por segundo, arredondado às décimas.

3. Na figura estão representados dois polígonos.

- Um pentágono $[ABCDE]$
- Um quadrilátero $[FGHI]$

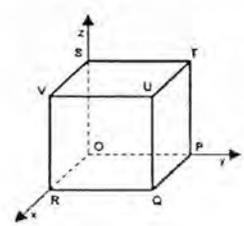


Dos nove vértices representados, não existem três colineares.

3.1.(10) Determine quantos triângulos têm como vértices três dos nove pontos, de tal modo que dois vértices pertençam a um dos polígonos e o terceiro vértice pertença ao outro polígono.

3.2.(12) A Sandra e o Jorge escolheram cada um, e em segredo, um dos nove vértices representados. Qual é a probabilidade de os dois vértices, assim escolhidos, pertencerem ambos ao mesmo polígono? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

4. Na figura está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$.



Sabe-se que:

- A face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- A face $[OSVR]$ está contida no plano xOZ
- A face $[OSTP]$ está contida no plano yOz
- Uma equação do plano VTQ é $x + y + z = 6$

4.1.(12) Mostre que o volume do cubo é 27.

4.2.(12) Determine uma equação da superfície esférica tal que:

- o centro é o simétrico de U, em relação ao plano xOy;
- o ponto Q pertence a essa superfície esférica.

4.3.(12) Seja α o plano que contém o ponto S e é paralelo a VTQ. Prove que a recta RP está contida em α.

FIM

2ª Fase

Primeira Parte

1. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x \leq 0 \\ x^2-4 & se\ x > 0 \end{cases}$$

Indique o conjunto dos zeros de f.

(A) $\{-2, 2\}$

(B) $\{-2, -1, 2\}$

(C) $\{2\}$

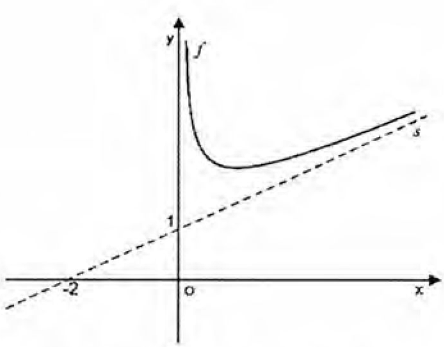
(D) $\{-1, 2\}$

2. Indique qual das expressões seguintes define uma função **injectiva**, de domínio $\mathbb{R}$.

(A) $\cos x$ **(B)** $x^2 - x$

(C) $|x| + 1$ **(D)** x^3

3. Na figura ao lado está representada graficamente uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.



A recta s, que contém os pontos $(-2, 0)$ e $(0, 1)$, é assímptota do gráfico de f.

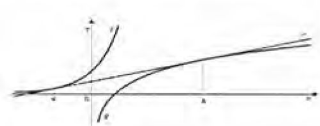
Indique o valor de $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

(A) -2 **(B)** 0

(C) $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

4. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções:

- a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$
- a função g, definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo na base e)



A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $e^a = \frac{1}{b}$

(B) $e^a = \ln b$

(C) $e^{a+b} = 1$

(D) $\ln(ab) = 1$

5. Num referencial o.n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma recta paralela ao eixo Oz?

(A) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

(B) $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, 1, 0), \quad k \in \mathbb{R}$

(C) $z = 1$

(D) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 2 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \end{cases}$$

define

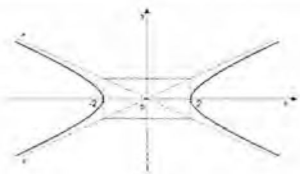
(A) um ponto

(B) o conjunto vazio

(C) uma recta

(D) um plano

7. Na figura abaixo está representada graficamente uma hipérbole.



Os vértices da hipérbole são os pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$. As assímptotas da hipérbole são as rectas r e s, de equações $y = -\frac{x}{2}$ e $y = \frac{x}{2}$, respectivamente.

Qual das condições seguintes é uma equação desta hipérbole?

(A) $y^2 - x^2 = 2$

(B) $x^2 - 4y^2 = 4$

(C) $2x^2 - y^2 = 8$

(D) $x^2 - y^2 = 4$

8. De quantas maneiras se podem sentar três raparigas e quatro rapazes, num banco de sete lugares, sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?

(A) 120 (B) 240

(C) 720 (D) 5040

9. Acabou o tempo de um jogo de basquetebol, e uma das equipas está a perder por um ponto, mas tem ainda direito a dois lances livres. O Manuel vai tentar encestar.

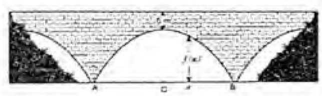
Sabendo que este jogador concretiza, em média, 70% dos lances livres que efectua e que cada lance livre concretizado corresponde a um ponto, qual é a probabilidade de o jogo terminar empatado?

(A) $0,14$ (B) $0,21$

(C) $0,42$ (D) $0,7$

Segunda Parte

1. A figura representa uma ponte sobre um rio.



A distância mínima do **arco central** da ponte ao tabuleiro é 6 metros.

Sejam A e B os pontos de intersecção do **arco central** com o nível da água do rio, e seja O o ponto médio de $[AB]$.

Considere a recta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto situado entre A e B, de abcissa x, a altura do arco, em metros, é dada por

$$f(x) = 36 - 9(e^{0,06x} + e^{-0,06x})$$

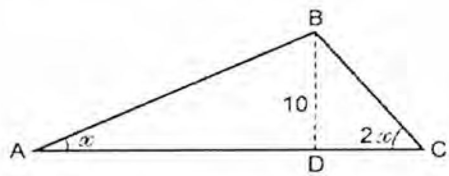
1.1.(12) Recorrendo ao estudo da derivada da função f, mostre que, tal como a figura sugere, é no ponto de abcissa zero que a altura do arco é máxima.

1.2.(10) Uma empresa está a estudar a hipótese de construir uma barragem neste rio. Se tal empreendimento se concretizasse, o nível das águas no local da ponte subiria 27 metros.

Nesse caso, a ponte ficaria totalmente submersa? Justifique a sua resposta.

1.3.(13) Mostre que a distância, em metros, entre A e B é um valor compreenddo entre 43 e 44.

2. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.



Tem-se que:

- x designa a amplitude do ângulo BAC
- a amplitude do ângulo BCA é igual ao dobro da amplitude do ângulo BAC
- a altura $\overline{BD}$ é igual a 10

Seja

$$g(x) = \frac{75 - 25\text{tg}^2 x}{\text{tg} x}$$

2.1.(14) Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $g(x)$, para qualquer $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

2.2.(12) Considere o triângulo $[ABC]$ quando $x = \frac{\pi}{4}$.

Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por $g(x)$.

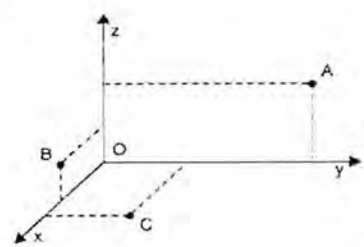
3. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados dez jogadores: dois guarda-redes, quatro defesas e quatro avançados.

3.1.(10) Sabendo que o treinador da selecção nacional opta por que Portugal jogue sempre com um guarda-redes, dois defesas e dois avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

3.2.(12) Um patrocinador da selecção nacional oferece uma viagem a cinco dos dez jogadores seleccionados, escolhidos ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois guarda-redes serem contemplados com essa viagem? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura estão representados três pontos, em referencial o.n. $Oxyz$



Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(0, 5, 2)$
- O ponto B pertence ao plano xOz
- O ponto C pertence ao plano xOy

- A recta BC tem equação vectorial

$$(x, y, z) = (5, 4, 1) + k(1, 2, -1),\ k \in \mathbb{R}$$

4.1.(12) Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3, 0, 1)$ e que o ponto C tem coordenadas $(4, 2, 0)$.

4.2.(12) Mostre que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C.

4.3.(12) Considere a superfície esférica de centro em A, cuja intersecção com o plano xOy é uma circunferência de raio 3. Determine uma equação dessa superfície esférica.

FIM

Formulário

$$\mathrm{sen}(2x) = 2.\mathrm{sen}x.\cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$$

$$\mathrm{tg}(2x) = \frac{2\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$$

Época especial

Primeira Parte

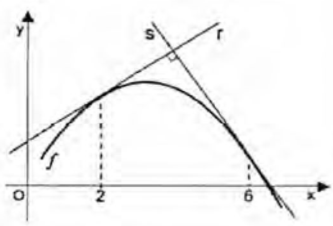
1. Considere a sucessão de termo geral $u_n = log_2\left(\frac{1}{n}\right)$

   Indique o valor de $lim\, u_n$

   (A) $-\infty$ **(B)** 0

   (C) 1 **(D)** $+\infty$

2. Na figura



estão representados:

- O gráfico de uma função f
- A recta r, tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2 e de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$
- A recta s, tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 6

Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares, indique o valor de $f'(6)$, derivada da função f no ponto 6.

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{4}{5}$

(C) $-\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{5}{3}$

3. Seja D o domínio de uma função g tal que $g(x) = \frac{1}{1-tg\, x}$.

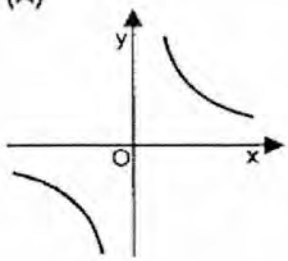
   Indique qual das expressões seguintes **é necessariamnete falsa**

   (A) $0 \in D$ **(B)** $\frac{3\pi}{4} \in D$

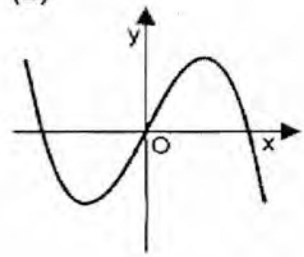
   (C) $\pi \in D$ **(D)** $\frac{5\pi}{4} \in D$

4. Indique qual dos gráficos seguintes pode ser o de uma função ímpar e injectiva.

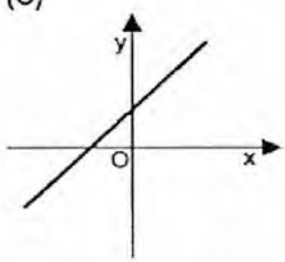
(A)



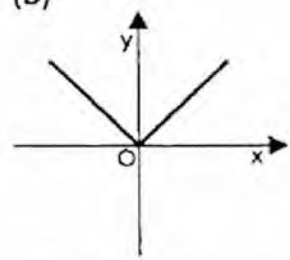
(B)



(C)



(D)



5. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ cujo gráfico é uma parábola tal que:

- o vértice é o ponto $(0, 0)$
- a directriz é a recta de equação $y = -1$.

Indique qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}$

(A) $h(x) = x^2$

(B) $h(x) = 2x^2$

(C) $h(x) = \frac{x^2}{4}$

(D) $h(x) = -\frac{x^2}{6}$

6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera $\mathcal{E}$ definida pela condição $x^2 + (y-7)^2 + z^2 \leq 9$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Na esfera $\mathcal{E}$ existem pontos do eixo Ox

(B) Na esfera $\mathcal{E}$ existem pontos do eixo Oy

(C) O ponto $(7, 7, 0)$ pertence à esfera $\mathcal{E}$

(D) O ponto $(0, 0, 7)$ pertence à esfera $\mathcal{E}$

7. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ define

(A) O conjunto vazio

(B) um ponto

(C) uma recta

(D) um plano

8. Escolhem-se aleatoriamente dois vértices de um cubo.

Qual é a probabilidade de o centro do cubo ser o ponto médio do segmento por eles definido?

(A) $\frac{1}{{}^8C_2}$ (B) $\frac{4}{{}^8C_2}$

(C) $\frac{1}{8!}$ (D) $\frac{4}{8!}$

9. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

(A) $(10^{20}+1)^6 = 10^{120} +6\times 10^{20}+1$

(B) $(10^{20}+1)^7 = 10^{140}+1$

(C) $(10^{20}+1)^8 = 10^{160} +8\times 10^{20}+1$

(D) $(10^{20}+1)^9 < 10^{180}+1$

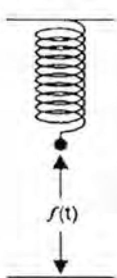
Segunda Parte

1. Considere a função $g : [0,+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = ln\,(1+x) - x$

   a)(12) Recorrendo à função derivada de g, mostre que g é decrescente.

   b)(11) Tendo em conta a alínea anterior e o valor de $g(0)$, indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação: $g(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$

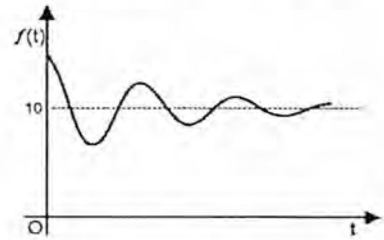
2. Uma bola suspensa de uma mola oscila verticalmente.



Admita que a distância (em cm) da bola ao solo, t segundos após um certo instante inicial, é dada por

$$f(t) = 10 + 5e^{-0,1t}cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

com $t \in [0,+\infty[$. Na figura abaixo, apresenta-se parte da representação gráfica da função f.



a)(10) Indique o valor de $\lim_{t\to+\infty} f(t)$. Interprete esse valor em termos do movimento da bola.

b)(14) Mostre que existe pelo menos um instante, entre o terceiro e o quarto segundos, em que a bola se encontra a sete cemtímetros do solo.

c)(14) Resolva a equação $f(t) = 10$.

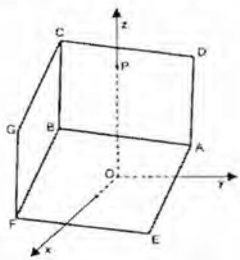
A partir do conjunto solução obtido, indique quantas vezes, nos primeiros quinze segundos, a bola passa a dez centímetros do solo. Justifique a sua resposta.

3. **(20)** Um grupo de jovens, formado por cinco rapazes e cinco raparigas, vai dividir-se em duas equipas, de cinco elementos cada uma, para disputarem um jogo de basquetebol.

   Supondo que a divisão dos dez jovens pelas duas equipas é feita ao acaso, determine a probabilidade de as equipas ficarem constituídas por elementos do mesmo sexo, isto é, de uma das equipas ficar só com rapazes e a outra, só com raparigas.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

4. A figura abaixo representa um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$.



- $[ABCD]$ é uma face do cubo.
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$ (O ponto H não está representado na figura)
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo
- O ponto A tem coordenadas $(3, 5, 3)$
- O ponto D tem coordenadas $(-3, 3, 6)$
- O ponto E tem coordenadas $(1, 2, -3)$

a)(**12**) Determine o volume do cubo.

b)(**12**) Determine as coordenadas do ponto H e comente a seguinte afirmação: o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.

c)(**14**) O ponto P é o ponto de intersecção do eixo Oz com a face $[ABCD]$. Determine as coordenadas de P.

FIM