Exames do 1º ano do Ensino Superior

Exame de Análise Infinitesimal 1
11 de Fevereiro de 1999 (Recorrência)
Duração: 3 horas

Luísa Mascarenhas

Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
mascar@lmc.fc.ul.pt

Ponto A

N. B.: Justifique com atenção todos os raciocínios. Uma justificação omissa ou errada pode anular uma afirmação correcta.

I

1. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

Toda a função contínua transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados e conjuntos fechados em conjuntos fechados.

2. Dada a sucessão de termo geral $u_n = n^3$, mostre, usando o método de indução, que

$$u_1+u_2+\cdots+u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Considere a sucessão (a_n) definida por

$$a_1 = 1/2\ ; \quad a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+1}.$$

Mostre que é convergente.

II

4. Determine os seguintes limites, justificando os cálculos:

a) $\lim_n \left(\frac{n+1}{na}\right)^n \ (a \in \mathbb{R}^+)$;

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1} \ (p \in \mathbb{N})$.

5. Diga quais os valores de x que tornam a série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}} \ (a \neq 0)$$

simplesmente convergente, absolutamente convergente, divergente.

III

6. Defina ponto fronteiro a um conjunto. Mostre, usando a definição dada, que:

Se $a \in \mathbb{R}$ é fronteiro a X, $X \subseteq \mathbb{R}$, então existe em X uma sucessão (x_n), convergente para a.

7. Seja $p(x)$ um polinómio de grau ímpar.

a) Mostre que $p(x)$ tem uma raiz real.

b) Sendo f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{2 + [p(x)]^2},$$

determine $f(\mathbb{R})$.

Ponto B

N. B.: Justifique com atenção todos os raciocínios. Uma justificação omissa ou errada pode anular uma afirmação correcta.

I

1. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

Toda a função contínua transforma sucessões de Cauchy em sucessões de Cauchy.

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a, a+b \in \mathbb{R}^+$, mostre, usando o método de indução, que

$$(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Considere a série absolutamente convergente

$$\sum a_n.$$

Estude a natureza de

$$\sum \frac{a_n}{1-a_n}$$

II

4. Determine os seguintes limites, justificando os cálculos:

a) $\lim\limits_{n} \left(a - \dfrac{1}{n}\right)^n \quad (a \in \mathbb{R}^+)$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x^p - 1)}{x - 1} \quad (p \in \mathbb{N})$.

5. Determine $a \in \mathbb{R}$ de forma a que a série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a^{n+1}}{n+1}\, x^n$$

seja convergente no ponto $x = -3$ e divergente no ponto $x = 3$.

III

6. Defina ponto de acumulação de um conjunto. Mostre, usando a definição dada, que:

Um conjunto finito não tem pontos de acumulação.

7. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e (a_n) uma sucessão em $[0,1]$, tal que $g(a_n) \to 0$.

a) Mostre que (a_n) tem um sublimite em $[0,1]$.

b) Mostre que g tem um zero em $[0,1]$.

Resolução de algumas questões[17]

Exercício 3A. Da definição de (a_n) obtém-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}+1} \end{aligned}$$

A série

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^k/(\sqrt{k}+1)$$

é convergente. Com efeito, trata-se de uma série alternada cujo termo geral, em módulo, tende para zero a decrescer: pelo critério de Leibniz a série converge e, portanto, a sucessão (a_n) é também convergente.

Exercício 4A b). Fazendo a mudança de variável $x = y^p$, obtém-se

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y-1}{y^p-1}.$$

Como

$$\frac{y^p-1}{y-1} = y^{p-1} + y^{p-2} + \cdots + y + 1$$

então

$$\lim_{y\to 1} \frac{y^p-1}{y-1} = p$$

donde se conclui que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[p]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{p}.$$

Exercício 5A.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(x+a)^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x+a}{a}\right)^n$$

Como

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x+a}{a}\right)^n$$

é uma série geométrica de razão $\frac{x+a}{a}$, ela converge absolutamente se

$$\left|\frac{x+a}{a}\right| < 1$$

e diverge se

$$\left|\frac{x+a}{a}\right| \geq 1$$

A primeira condição equivale a $|x+a| < |a|$ e, portanto, se $a > 0$ equivale a $x \in]-2a, 0[$ e se $a < 0$ equivale a $x \in]0, -2a[$.

Conclusão: se $a > 0$ a série em questão converge absolutamente no intervalo $]-2a, 0[$ e diverge no seu complementar; se $a < 0$ a série converge absolutamente em $]0, -2a[$ e diverge no complementar.

Exercício 7A a). Seja $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$. Suponhamos $a_0 > 0$ (se $a_0 < 0$ o raciocínio é análogo). Como n é ímpar e $\forall x \neq 0$ $p(x)$ $= x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)$ tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$$

Como consequência das definições de limite em $\overline{\mathbb{R}}$, existem $x_0 < x_1$ tais que $p(x_0) < 0$ e $p(x_1) > 0$. Como p é uma função contínua, o Teorema de Bolzano garante a existência de um zero de p em $]x_0, x_1[$.

Exercício 1B. A afirmação é falsa. Existem funções contínuas que transformam sucessões de Cauchy em sucessões

[17]NR: A autora dos exames apresentou resoluções para todos os problemas. A escolha das resoluções publicadas de seguida é da inteira responsabilidade dos editores.

que não são sucessões de Cauchy. Por exemplo, a função $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$, é contínua em $]0,1]$; a sucessão $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ é uma sucessão de Cauchy pois converge para zero.[18] No entanto, a sucessão $f(x_n) = n$, $n = 1, 2, \ldots$ não é de Cauchy pois não é convergente em $\mathbb{R}$.

Exercício 2B. Seja $S = \{n \in \mathbb{N} : (a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b\}$. O conjunto S é indutivo:

i) $1 \in S : (a+b)^1 \geq a^1 + 1a^0b = a+b$;

ii) $n \in S \Rightarrow n+1 \in S$:

Se $n \in S$ então $(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$. Como $a+b > 0$

$$(a+b)^n(a+b) \geq (a^n + na^{n-1}b)(a+b)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &\geq a^{n+1} + na^nb + a^nb + \\ &\quad + na^{n-1}b^2 \\ &= a^{n+1} + (n+1)a^nb + \\ &\quad + na^{n-1}b^2\end{aligned}$$

Como $a > 0$, $na^{n-1}b^2 \geq 0$, de onde

$$(a+b)^{n+1} \geq a^{n+1} + (n+1)a^nb.$$

Como S é indutivo e $S \subseteq \mathbb{N}$, tem-se $S = \mathbb{N}$.

Exercício 6B. Dado $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ diz-se ponto de acumulação de X se

$$\forall_{\delta>0}\ I(a,\delta) \cap (X \backslash \{a\}) \neq \emptyset$$

Seja $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto finito: $X \neq \emptyset$ e $X \neq \{a\}$.[19] Uma vez que todo o conjunto finito, não vazio, tem mínimo, seja $\varepsilon = \min\{|a_i - a| : a_i \neq a, 1 \leq i \leq n\}$.

Vejamos que $I(a,\varepsilon) \cap (X \backslash \{a\}) = \emptyset$: se $x \in I(a,\varepsilon) \cap (X \backslash \{a\})$ então ter-se-ia $|x - a| < \varepsilon$, $x \neq a$, $x = a_k$, para certo $a_k \in X$ $(1 \leq k \leq n)$, ou seja $|a_k - a| < \varepsilon \leq |a_k - a|$ o que é absurdo.

Do que foi dito deduz-se que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $I(a,\varepsilon) \cap (X \backslash \{a\}) = \emptyset$, ou seja, X não tem pontos de acumulação.

[18] Uma sucessão real é de Cauchy em $\mathbb{R}$ se e só se é convergente em $\mathbb{R}$.

[19] Se $X = \emptyset$ ou $X = \{a\}$ então $X \backslash \{a\} = \emptyset$ e a conclusão é imediata.