# Sobre a obra lógica de José Sebastião e Silva

por *António Marques Fernandes*

José Sebastião e Silva foi um dos mais proeminentes matemáticos portugueses de todos os tempos. Nasceu a 12 de Dezembro de 1914 em Mértola, no Alentejo. Licenciou-se em matemática no ano de 1937 na Faculdade de Ciências de Lisboa e foi sempre com grande brilhantismo que evoluiu na sua carreira, quer enquanto estudante quer posteriormente. É fundamentalmente conhecido pelos seus trabalhos no domínio da Análise Funcional onde se encontram importantes contribuições suas. No entanto, o primeiro grande trabalho de Sebastião e Silva situou-se num plano diverso daquele e pode encontrar-se na sua tese inédita "*Para uma teoria geral dos homomorfismos*", trabalho elaborado em 1944 em Roma. É sem dúvida uma exposição rica em ideias e também profícua em novas direcções de pesquisa. Trata-se de uma incursão nos domínios da Lógica Matemática que resulta, numa parte, de uma preocupação unificadora traduzida na procura de uma base comum de ramos da própria matemática, que até então eram encarados como fundamentalmente distintos; de uma outra parte no reconhecimento de que uma qualquer "*estrutura*" possui uma "*geometria*", procurando então saber se uma vez dada essa "*geometria*" poderemos recuperar a "*estrutura*" em si. Quanto à preocupação unificadora é importante não a confundir com algumas tentativas frustradas de reduzir a matemática à lógica (nas palavras de J.S. e Silva, à *Mathematica Universalis*) pois a existência de paradoxos quer sintáticos quer semânticos, já então impossibilitavam uma tal tarefa e Sebastião e Silva sabia-o bem. O que ele procurava era um conjunto de proposições de grande generalidade. Se quisermos agora esclarecer aquilo que deve ser entendido por "*geometria*" de uma "*estrutura matemática*" teremos de fazer algumas considerações preliminares que serão no entanto heurísticas na sua forma. Comecemos com a seguinte:

**Consideração 1:** (*Linguagem*) Uma linguagem é em larga medida um conjunto de símbolos que se agrupam de determinada forma de modo a transmitir ideias num processo comunicativo. Uma linguagem como o português insere-se numa classe de linguagens ditas *naturais*. Tais linguagens não são contudo livres de contradição, isto é, podemos formular nelas juízos contraditórios. Assim nasceu a necessidade de, pelo menos, isolar algumas linguagens capazes de serem utilizadas em matemática, já que para isso temos que banir qualquer possibilidade de contradição. Embora não exista uma noção geral de linguagem matemática, existem contudo diversos exemplos de tais linguagens, mais ou menos estudados, sendo que aquele que é simultaneamente o mais estudado e o mais utilizado é o de linguagem de primeira ordem. Uma linguagem será então um conjunto de palavras que se formam a partir de alguns símbolos básicos utilizando algumas regras sintácticas; tais palavras destinam-se a terem uma determinada interpretação, isto do ponto de vista semântico. À primeira vista uma linguagem matemática não seria muito diferente de uma linguagem natural, mas esta primeira vista olha para a génese, para o processo formativo, e esse é essencialmente semelhante, no entanto quer a sintaxe quer a semântica de uma linguagem matemática encontram-se suficientemente enfraquecidas e remodeladas de modo a não encerrar as contradições típicas de uma linguagem natural. As palavras são fundamentalmente de dois tipos — termos e fórmulas — um termo é por exmplo a expressão $x + y$, já que quando substituímos as variáveis por elementos (por exemplo de $\mathbf{N}$) obtemos (feitas as contas) um elemento (de $\mathbf{N}$, neste caso); uma fórmula é, por outro lado, um juízo feito acerca de determinados elementos, por exemplo $\forall x$ $(x \geq 0)$, que é verdadeira em $\mathbf{N}$ mas é falsa em $\mathbf{R}$.

**Consideração 2:** (*Modelo de uma Linguagem*) Uma vez fixada uma sintaxe e uma semântica, de um modo geral especificamos uma determinada linguagem discriminando os seus símbolos básicos. Alguns desses símbolos são símbolos lógicos ($\sim$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $=$, as variáveis) outros destinam-se a serem interpretados como relações (exemplos de relações são a relação binária "menor que" definida em $\mathbf{N}$ ou a relação unária definida no mesmo conjunto "$x$ é par") e podem por exemplo ser $R$, $\in$, $<$ ou $\geq$; outros destinam-se a serem interpretados como operações: $+$, $\otimes$, $\oslash$, $f$. Deste modo e já que todas as linguagens possuem os mesmos símbolos lógicos, identificamos uma determinada linguagem como o conjunto dos seus símbolos não lógicos. Consideremos então a seguinte linguagem $\mathcal{L} = \{f\}$ onde $f$ é para ser interpretado como uma operação binária. $\mathcal{M}$ diz-se um modelo de $\mathcal{L}$ se $\mathcal{M} = (U, g)$, onde $U$ é um certo conjunto e $g$ é uma operação binária definida em $U$, isto é, $g : U \times U \to U$ é uma aplicação.

Esta noção de modelo de uma linguagem, pode ser considerada como uma especificação de um conceito ainda muito impreciso — o de estrutura matemática. De facto trata-se de um problema complexo e talvez mesmo insolúvel, aquele de definir o que deve ser entendido por estrutura matemática. No entanto e no que se segue quando se falar de estrutura matemática isso deve ser entendido como sinónimo de modelo de uma certa linguagem.

**Consideração 3:** (*Automorfismo*) Consideremos uma linguagem

$$\mathcal{L} = \left\{f_1, ..., f_n, R_1, ..., R_m\right\},$$

onde os $f_i$ se destinam a ser interpretados como operações de ordem $p_i$ e os $R_j$ se destinam a ser interpretados como relações de ordem $q_j$ (para simplificar diremos que uma relação $R$ definida num conjunto $X$ é de ordem $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, se $R$ for um subconjunto de $X^n$). Consideremos um modelo $\mathcal{M} = (X; g_1, ..., g_n, T_1, ..., T_m)$ da linguagem anterior, onde:

(1) $$g_i : X^{p_i} \to X$$

são aplicações e:

(2) $$T_j \subseteq X^{q_j} \ ;$$

então uma aplicação $\sigma : X \to X$ que seja bijectiva, diz-se um automorfismo de $\mathcal{M}$ se:

$$\forall i \leq n \quad \forall a_1, ..., a_{p_i} \in X$$
$$\sigma\Big(g_i(a_1, ..., a_{p_i})\Big) = g_i\Big(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_{p_i})\Big)$$

e:

$$\forall j \leq m \quad \forall a_1, ..., a_{q_j} \in X$$
$$(a_1, ..., a_{q_j}) \in T_j \text{ sse } \Big(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_{q_j})\Big) \in T_j.$$

Um automorfismo é por assim dizer uma reorganização dos elementos, de tal modo que os elementos permutados desempenham relativamente à estrutura o mesmo papel.

**Consideração 4:** (*Definibilidade*) Esta noção é muito importante em todo o processo matemático. Se pensarmos numa certa estrutura $\mathcal{M} = (U; ...)$ modelo de uma certa linguagem $\mathcal{L}$ e numa certa operação ou relação definida sobre $U$, pode acontecer que uma ou outra possa ser descrita por meio de palavras da própria linguagem $\mathcal{L}$. Por exemplo se considerarmos uma linguagem com um único símbolo que se destina a ser interpretado por uma operação binária, então $(\mathbf{N}, +)$ onde "$+$" é a operação de adição em $\mathbf{N}$, é um modelo dessa linguagem. Consideremos agora a relação binária definida em $\mathbf{N}$ do seguinte modo:

$$T = \Big\{(a, b) \in \mathbf{N}^2 : a < b\Big\} \ ,$$

onde "$<$" é a ordem usual de $\mathbf{N}$. Temos que $(a, b) \in T$ se e só se $\exists t \ (a+t=b \wedge t \neq 0)$ e esta última expressão é uma fórmula de $\mathcal{L}$. Sempre que isto acontece dizemos que a operação ou relação em causa é $\mathcal{L}$-definível.

Voltando ao trabalho de Sebastião e Silva, podemos agora descrever aquilo que deve ser entendido como "*geometria*" de uma determinada estrutura matemática $\mathcal{M}$. Para ele essa "*geometria*" residia no conjunto das propriedades dessa estrutura (isto deve ser entendido como as relações definidas sobre essa estrutura) que ficavam invariantes para os seus automorfismos (se $T$ é uma relação de ordem $n$ definida sobre $X$ onde $\mathcal{M} = (X; ...)$, se $(a_1, ..., a_n) \in X^n$ e se $\sigma$ é um automorfismo de $\mathcal{M}$ então $T$ diz-se invariante para $\sigma$ se qualquer que seja aquele $(a_1, ..., a_n)$ se tem que $(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)) \in T$ se e só se $(a_1, ..., a_n) \in T$.

A investigação de Sebastião e Silva passou então a orientar-se no sentido de caracterizar essa geometria. Ao longo do seu trabalho obtém uma generalização da teoria de Galois e introduz um conceito de definibilidade mais geral do que o anteriormente mencionado, obtendo por esta via as ferramentas necessárias para alcançar aquele que é talvez o maior objectivo da tese, o teorema seguinte:

**Teorema.** *Dada uma linguagem $\mathcal{L}$ e um seu modelo $\mathcal{M}$, a geometria de $\mathcal{M}$ é constituída pelas relações $\mathcal{L}$-definíveis.*

Impõem-se algumas chamadas de atenção:

**1)** Em primeiro lugar a linguagem que Sebastião e Silva utiliza é uma linguagem particular, pelo que ele não resolveu o problema em geral, mas apenas num caso concreto.

**2)** A resolução do problema para outras linguagens encontra-se portanto em aberto. Existem pelo menos indícios de que a sua resolução depende não apenas da linguagem, mas da própria estrutura.

Uma outra questão levantada pelo próprio Sebastião e Silva e que está ainda intimamente relacionada com as considerações anteriores é a seguinte: dado um grupo de transformações bijectivas de um conjunto $U$ saber como e quando é possível construir um modelo $\mathcal{M} = (U; ...)$ de uma determinada linguagem $\mathcal{L}$, de tal modo que o conjunto de transformações previamente dado seja o grupo de automorfismos de $\mathcal{M}$. Aqui está um problema delicado e de difícil resolução, como aliás é reconhecido pelo próprio Sebastião e Silva.

A tese inédita termina com algumas considerações de ordem filosófica que dizem essencialmente respeito, por um lado aos objectivos da própria matemática que na opinião do próprio Sebastião e Silva deve ser um jogo imaginativo que não pode perder de vista a própria realidade, por outro lado ao método da matemática que ele defende dever ser o mais construtivo possível, mas não apenas isso, isto é, devemos tomar como válidos, métodos que transcendem o construtível no caminho para alcançar a "*verdade matemática*".

Uma última palavra para o conteúdo da tese inédita, que como já foi referido é do ponto de vista científico muito rica, até pelos problemas que deixa em aberto. Mas uma riqueza igualmente grande pode ainda ser encontrada do ponto de vista pedagógico, já que não é vulgar que uma obra que aborde assuntos desta ordem os exponha de forma tão intuitiva e inteligível.

Por todos estes motivos a "*Tese inédita*" é sem dúvida um trabalho que deve ser lido e estudado.

## BIBLIOGRAFIA

[1] JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA – *Para uma Teoria Geral dos Homomorfismos*, trabalho escrito em Roma em 1944 e mantido inédito até à sua publicação em Portugal pelo Instituto Nacional de Investigação Científica, em 1985, nas "Obras de José Sebastião e Silva", Vol. I, pp. 133–363.

[2] JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA – *Sugli Automorfismi di un Sistema Matematico Qualunque*, Pontificia Academia Scientiarum, Commentationes, Vol. IX, Nº 9, memória apresentada em 1945. Este trabalho foi traduzido para inglês e apresentado por A.J. Franco de Oliveira sob o título "On Automorphisms of Arbitrary Mathematical Systems", na revista History and Philosophy of Logic, 6, 1985.

[3] NATHAN JACOBSON – *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. III, Van Nostrand Company Inc., 1964.