PONTOS DE EXAME

ENSINO SECUNDÁRIO

$12^{\underline{o}}$ Ano de Escolaridade –
– Via de Ensino
($1^{\underline{o}}$, $2^{\underline{o}}$ e $5^{\underline{o}}$ cursos)

$1^{\underline{a}}$ fase; $1^{\underline{a}}$ chamada – 1989
(Duração da prova: 1h 30m)

I

1. Prove que $(\mathbf{R}, \theta)$ é semigrupo, sendo $\mathbf{R}$ algebrizado pela operação θ definida por $a\,\theta\,b = a \cdot |b|$ ($\cdot$ multiplicação usual em $\mathbf{R}$).

2. Averigue se o semigrupo referido em 1. é comutativo.

3. Sendo $\mathbf{A} = \{x \in \mathbf{R} : |x^2 - 3| \geq 3\}$ e $\mathbf{B}$ o conjunto dos termos da sucessão de termo geral $u_n = \operatorname{tg}(4\,n + 1)\,\frac{\pi}{4}$, determine o conjunto dos pontos fronteiros de $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$.

II

1. Designando por $\overline{z}$ o conjugado do número complexo z, represente graficamente (diagrama de Argand) o conjunto definido pela condição

$$z\,\overline{z} \leq \left|\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right| \;\wedge\; \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\,\pi}{4}\ .$$

2. Considere o número complexo $z = \operatorname{cis}\alpha$, com $\alpha \in]0, \pi]$. Mostre que

$$|z - 1| = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\ .$$

III

Calcule

$$\lim_{n \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{n+3}\right)^{\frac{n+2}{5}}\ .$$

IV

Considere a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = x + \operatorname{sen} x - 1\ .$$

1. Prove que existe pelo menos um número real α, do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, tal que $\alpha + \operatorname{sen}\alpha = 1$.

2. Calcule, a partir da definição, a derivada de $f(2\,x)$ no ponto 0.

V

Resolva a equação

$$\log 5 + \log(x+1) = \log(9\,x - 3) - \log(x-1).$$

Parte de opção

(Responder a uma e só uma das questões **A** ou **B**)

A

1. Estabeleça uma das fórmulas de transformação em produtos da soma ou da diferença de dois senos ou de dois co-senos.

2. Como aplicação das fórmulas referidas em 1., resolva, em $\mathbf{R}$, a equação

$$\cos(2\,x) + \cos(6\,x) = \operatorname{sen}(3\,x) - \operatorname{sen}(5\,x).$$

B

1. Determine as assímptotas do gráfico da função definida por

$$y = x + \operatorname{arc\,tg} x \quad \left(\operatorname{arc\,tg} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right).$$

2. Prove que
"Se o gráfico de uma função ímpar tem assímptota para $x \to +\infty$, então tem assímptota para $x \to -\infty$, sendo iguais os respectivos declives e simétricas as ordenadas na origem."

Resolução:

I.1. $(\mathbf{R}, \theta)$ constitui um grupóide, pois se $(a,b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $a\,\theta\,b = a \cdot |b| \in \mathbf{R}$. A propriedade associativa é verificada já que

$$\begin{aligned}(a\,\theta\,b)\,\theta\,c &= (a \cdot |b|)\,\theta\,c = (a \cdot |b|) \cdot |c| = \\ &= a \cdot (|b| \cdot |c|) = a \cdot (|b \cdot |c||) = \\ &= a\,\theta(b\,\theta\,c)\ .\end{aligned}$$

Logo $(\mathbf{R}, \theta)$ é um semigrupo.

I.2. $a\,\theta\,b = b\,\theta\,a \Leftrightarrow a \cdot |b| = b \cdot |a|$, relação que não é válida, por exemplo, para $a = 1$ e $b = -1$.

I.3. Dizer que $x \in A$, equivale a ter $x^2 - 3 \geq 3$ ou $x^2 - 3 \leq -3$, ou seja, $x^2 \geq 6$ ou $x^2 \leq 0$. Logo

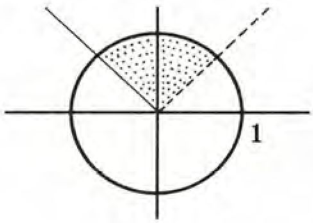
$$\mathbf{A} =]-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty] \cup \{0\}\ .$$

Por outro lado, para cada número natural, n, $u_n = \operatorname{tg}(\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Assim,

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} =]-\infty, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, +\infty[\cup \{0, 1\}$$

e o conjunto dos seus pontos fronteiros é dado por $\{-\sqrt{6}, 0, 1, \sqrt{6}\}$.

II.1. A condição $z\,\overline{z} \leq |\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}|$ equivale a $|z|^2 \leq 1$. Logo o conjunto que a condição dada define é constituído pelos pontos do círculo de raio 1 e centro em $(0,0)$, do plano complexo, cujo argumento é maior que $\frac{\pi}{4}$ e menor ou igual que $\frac{3\pi}{4}$, representado na figura:



II.2. Com $z = \operatorname{cis}\alpha$,

$$\begin{aligned}|z-1|^2 &= |(\cos\alpha - 1) + i\operatorname{sen}\alpha|^2 = \\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \operatorname{sen}^2\alpha = \\ &= 2\,(1 - \cos\alpha) \quad (\alpha \in]0, \pi])\ .\end{aligned}$$

Por outro lado, $1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ o que implica que $|z-1|^2 = 4\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. Logo $|z-1| = 2\,|\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}| = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, pois $\frac{\alpha}{2}$ é um ângulo do primeiro quadrante.

III. Tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n+3}\right)^{\frac{n+2}{5}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-2}{n+3}\right)^{n+3} \cdot \left(1 + \frac{-2}{n+3}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{5}} =$$

$$= (e^{-2} \cdot 1)^{\frac{1}{5}} = e^{-\frac{2}{5}}\ .$$

IV.1. Como $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, temos que $f(0)\,f(\frac{\pi}{2}) < 0$. Logo existe pelo menos um real $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que $f(\alpha) = 0$, conforme o pretendido.

IV.2. Seja $g(x) = f(2x)$. Temos que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(0)}{x} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x+\operatorname{sen} 2x}{x} = \\ &= 2 + \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} 2x}{2x} = 2+2 = 4\,. \end{aligned}$$

V. Se x satisfaz a equação dada, então necessariamente $\log 5\,(x+1) = \log(\frac{9x-3}{x-1})$, ou seja, $5\,(x^2-1) = 9\,x-3$. Resolvendo esta equação do segundo grau, obtemos como raízes 2 e $-\frac{1}{10}$. Há que ver agora se estes valores pertencem ao domínio das funções envolvidas na equação. Como $9\,(-\frac{1}{10}) - 3 < 0$ e $-\frac{1}{10} - 1 < 0$, concluímos que $-\frac{1}{10}$ não pode ser solução da equação. Para o valor 2, tais entraves não se verificam, pelo que $x = 2$ é a única solução que a equação tem.

VI.A.1. De

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$

e

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b\ ,$$

obtemos, adicionando termo a termo,

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos b.$$

Assim, se a e b forem soluções do sistema

$$\begin{cases} a+b=\alpha \\ a-b=\beta\ , \end{cases}$$

concluímos que

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\ .$$

Para a diferença obteríamos

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\ ,$$

procedendo analogamente. O mesmo se passa para a soma e diferença de dois cosenos, a partir das fórmulas correspondentes para o coseno da soma e da diferença de dois ângulos, obtendo-se então, respectivamente,

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

e

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\tfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\alpha-\beta}{2}\ .$$

VI.A.2.

$$\begin{aligned} &\cos 2x + \cos 6x = \operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} 5x \iff \\ &2\cos 4x\cos(-2x) = 2\operatorname{sen}(-x)\cos 4x \iff \\ &2\cos 4x\,(\cos 2x + \operatorname{sen} x) = 0 \iff \\ &2\cos 4x\,(1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x) = 0\ . \end{aligned}$$

Ora,

$$\cos 4x = 0 \iff x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

No que respeita à equação $-2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0$, concluímos, pela resolução de uma equação do segundo grau, que x deverá satisfazer $\operatorname{sen} x = 1$ ou $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$. Logo para além dos indicados acima, x poderá assumir os valores $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ou $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

VI.B.1. Como

$$\lim_{x\to -\pi/2} (x + \operatorname{arc\,tg} x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to \pi/2} (x + \operatorname{arc\,tg} x) = +\infty\ ,$$

as rectas dadas por $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$, constituem as assímptotas verticais. Atendendo a que

$$\lim_{x\to \pm\infty} (x + \operatorname{arc\,tg} x) = \pm\infty\ ,$$

concluímos não existirem assímptotas horizontais. No que respeita às assímptotas oblíquas, se existirem, elas são da forma $y = m\,x + b$, onde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - m\,x)\ .$$

Ora,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{arc\,tg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\Big)=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (x \operatorname{arc\,tg} x - x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}\ ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(\frac{x+\operatorname{arc\,tg} x}{x}\Big) = 1\ ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x + \operatorname{arc\,tg} x - x) = -\frac{\pi}{2}\ .$$

Logo, $y = x + \frac{\pi}{2}$ e $y = x - \frac{\pi}{2}$ constituem as assímptotas oblíquas do gráfico da função.

VI.B.2. Sendo $f(-x) = -f(x)$ temos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},$$

e com

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}\ ,$$
$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x)\ ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - m\,x) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (f(-x) + m\,x) =$$
$$= -\lim_{x\to+\infty} (f(x) - m\,x) = -b\ ,$$

donde se conclui facilmente o requerido.

(Resolução de *Maria Edite do Rosário*)

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Matemática I

Exame final - 2ª época - 1988

1. Sendo $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{x+1}{x}$ para cada $x \neq 0$,

a) estude a função do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade;

b) calcule os limites de f e f' nos pontos $+\infty$ e $-\infty$ e os limites laterais das mesmas funções no ponto 0;

c) estude o sinal dos valores de f, f' e f'' em todos os pontos em que estas funções estão definidas;

d) determine uma equação da tangente ao gráfico de f no seu ponto de inflexão;

e) esboce o gráfico da função f.

2.1. Determine os pontos em que convergem, absoluta e simplesmente, as séries de potências:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}\, x^n$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{2n-1}\Big)^n (x+2)^n$.

2.2. Desenvolva em série de Mac-Laurin a função $\log(1 + \frac{1}{x+1})$ e indique o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função.

2.3. Estude, quanto à convergência pontual no intervalo $[0, +\infty[$, a sucessão de funções $f_n(x) = \frac{1}{1+n\,x}$. Será a convergência uniforme nesse intervalo? E em $[1, +\infty[$?

3.1. Sendo $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função contínua limitada, indique, justificando

a) os limites nos pontos $+\infty$ e $-\infty$ da função f, definida por:

$$f(x) = x^3 + \frac{\varphi(x)}{1+|x|} \ ;$$

b) o contradomínio da função f.

3.2. Sendo $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbf{R}$ e $g(x) = f(x \operatorname{sen} x)$

a) calcule $g'(x)$ e $g''(x)$, expressos em função de derivadas de f em pontos convenientes;

b) supondo $f'(0) > 0$, justifique que g tem um extremo no ponto 0; máximo ou mínimo?

3.3. Sendo $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ uma função diferenciável verificando a condição $\varphi(n) = \varphi(n+1)$ para cada inteiro positivo n,

a) Quantas raízes tem a equação $\varphi'(x) = 0$?

b) Se existir o $\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x)$, qual será o seu valor?

4. Sendo f e g funções uniformemente contínuas,

a) prove que a soma, $f+g$, é uma função uniformemente contínua;

b) prove que se f e g são limitadas, o produto $f\,g$ é uma função uniformemente contínua;

c) mostre, por meio de um exemplo, que se f ou g não forem limitadas, a função $f\,g$ poderá não ser uniformemente contínua.

Resolução:

1.a) f é diferenciável — e portanto contínua — em cada ponto do seu domínio, $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ (no ponto 0 tem uma descontinuidade de 1ª espécie).

b) Como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \ ,$$

é

$$f(+\infty) = f(-\infty) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4} \ .$$

Por outro lado, de $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$, decorre $f(0^+) = \frac{\pi}{2}$, $f(0^-) = -\frac{\pi}{2}$. Para $f'(x) = -\frac{1}{2\,x^2+2\,x+1}$ $(x \neq 0)$ vem $f'(+\infty) = f'(-\infty) = 0$ e $f'(0^+) = f'(0^-) = -1$.

c) O sinal de $f(x)$ é o de $\frac{x+1}{x}$: a função é positiva em $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, nula no ponto -1 e negativa em $]-1, 0[$; como $2\,x^2 + 2\,x + 1 > 0$ para qualquer $x \in \mathbf{R}$, é $f'(x) < 0$ para qualquer $x \neq 0$. Quanto a

$$f''(x) = \frac{4\,x+2}{(2\,x^2+2\,x+1)^2} \quad (\text{para } x \neq 0) \ ,$$

o seu sinal é o de $4\,x+2$:

$$f''(x) > 0 \quad \text{em }]-\tfrac{1}{2}, 0[\cup]0, +\infty[\ ,$$

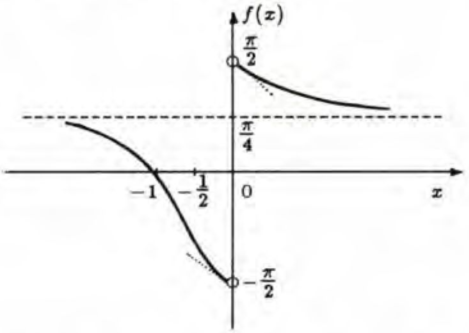
$$f''(-\frac{1}{2}) = 0 \ ,$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{em }]-\infty, -\tfrac{1}{2}[\ .$$

d) O gráfico de f tem uma inflexão no ponto $-\frac{1}{2}$; como $f'(-\frac{1}{2}) = -2$, uma equação da tangente ao gráfico no ponto com essa abcissa é:

$$y + \frac{\pi}{4} = -2\left(x + \frac{1}{2}\right) \ .$$

e) Gráfico (ver figura).



2.1.a) O raio de convergência da série é

$$r = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\log n}{\log(n+1)}\Big) = \\ = \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log n + \log(1+\frac{1}{n})} = \\ = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\log n}\log(1+\frac{1}{n})} = 1\ ;$$

há, portanto, convergência absoluta para $|x| < 1$, divergência para $|x| > 1$. Para $x = 1$, atendendo a que $\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$ para $n \geq 3$ e à divergência da série harmónica, pode concluir-se que a série diverge. Para $x = -1$ trata-se de uma série alternada, cujo termo de ordem n tende para zero; como a condição

$$\frac{\log n}{n} > \frac{\log(n+1)}{n+1}$$

é equivalente a $\log n^{n+1} > \log(n+1)^n$ e portanto também a $n > (1+\frac{1}{n})^n$ (desigualdade certamente verificada a partir de alguma ordem, visto que $(1+\frac{1}{n})^n$ converge para e), pode concluir-se, pelo critério de Leibnitz, que a série converge (convergência simples, dada a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}$).

b) O raio de convergência da série é $r = 1/(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}) = 2$; a série á absolutamente convergente se $|x+2| < 2$, divergente se $|x+2| > 2$. Para $x = 0$ ou $x = -4$ o módulo do termo de ordem n é superior a 1, não podendo portanto convergir para zero: a série diverge em ambos os extremos do seu intervalo de convergência.

2.2. A condição $1+\frac{1}{x+1} > 0$ equivale a $x > -1$ ou $x < -2$; segue-se que, se a função dada for igual à soma da sua série de Mac-Laurin num intervalo $]-r, r[$, se terá necessariamente $r \leq 1$ (vamos ver que essa igualdade se verifica em $]-1, 1[$, sendo portanto este o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função). Para $x > -1$ é

$$f(x) = \log\Big(1+\frac{1}{x+1}\Big) = \\ = \log(x+2) - \log(x+1)$$

e, portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{x}{2}} - \frac{1}{1+x}\ .$$

Como, para $|x| < 1$, se tem:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, x^n$$

e para $|x| < 2$

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^n}{2^n}\ ,$$

vem, para $|x| < 1$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\Big)\,x^n\ .$$

Primitivando e atendendo a que $f(0) = \log 2$, obtém-se:

$$f(x) = \log 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) x^{n+1}$$

($|x| < 1$). Pode observar-se que, no ponto 1, a soma da série ainda é igual ao valor da função.

2.3. A sucessão converge pontualmente em $[0, +\infty[$ para a função:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{se } x > 0 \,, \end{cases}$$

como se verifica imediatamente. A convergência não pode ser uniforme nesse intervalo, visto que as funções f_n são contínuas em $[0, +\infty[$ e f é descontínua no ponto 0.

Sendo $\delta > 0$ arbitrário e $x \in [1, +\infty[$, a condição:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1 + n\,x} < \delta \,,$$

equivalente a $n\,x > \frac{1}{\delta} - 1$, será certamente verificada desde que seja $n > \frac{1}{\delta} - 1$. Pode portanto concluir-se que a convergência é uniforme em $[1, +\infty[$.

3.1.a) Sendo φ limitada e k um número real tal que $|\varphi(x)| \leq k$ para qualquer $x \in \mathbf{R}$, ter-se-á

$$\left|\frac{\varphi(x)}{1 + |x|}\right| \leq \frac{k}{1 + |x|} \,,$$

e portanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{1 + |x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{1 + |x|} = 0 \,.$$

Daí resulta imediatamente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \,.$$

b) A função é contínua, como logo se reconhece atendendo a que φ é contínua, por hipótese; nestas condições, assumindo f valores — tanto positivos como negativos — de módulo arbitrariamente grande (como decorre da alínea anterior) o teorema do valor intermédio permite concluir facilmente que $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$.

3.2.a)

$$g'(x) = f'(x \operatorname{sen} x)\,(\operatorname{sen} x + x \cos x) \,,$$

$$g''(x) = f''(x \operatorname{sen} x)\,(\operatorname{sen} x + x \cos x)^2 + \\ + f'(x \operatorname{sen} x)\,(2 \cos x - x \operatorname{sen} x) \,.$$

b) Como $g'(0) = 0$, $g''(0) = 2\,f'(0) > 0$, a função g tem um mínimo no ponto 0.

3.3.a) De acordo com o teorema de Rolle, em cada intervalo $]n, n+1[$ deve existir pelo menos um ponto em que φ' se anule; a equação $\varphi'(x) = 0$ tem, portanto, infinitas raízes.

b) Designando por x_n um ponto do intervalo $]n, n+1[$ que verifique $\varphi'(x_n) = 0$, deverá ter-se $\lim_{n \to \infty} \varphi'(x_n) = 0$ e também $\lim_{n \to \infty} \varphi'(x_n) = \alpha$ se for $\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x) = \alpha$. Assim, se este último limite existir, terá de ser igual a zero.

4.a) Dado $\delta > 0$, determinem-se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$, se tenha

$$|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2}$$

e

$$|x - y| < \beta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\delta}{2}.$$

Sendo $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$ e $|x - y| < \varepsilon$, ter-se-á:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq \\ \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \delta \,.$$

b) Suponha-se $|f(x)| < M$ e $|g(x)| < N$ para qualquer $x \in \mathbf{R}$. Dado $\delta > 0$, determinem-se números positivos α e β por forma que, para quaisquer $x, y \in \mathbf{R}$:

$$|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\delta}{2N}$$

e

$$|x-y| < \beta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\delta}{2M}.$$

Com $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$ e $|x-y| < \varepsilon$ ter-se-á:

$$\begin{aligned} &|(f\,g)(x) - (f\,g)(y)| \leq \\ &\quad \leq |f(x)\,g(x) - f(x)\,g(y) + \\ &\qquad + f(x)\,g(y) - f(y)\,g(y)| \leq \\ &\quad \leq |f(x)|\,|g(x) - g(y)| + \\ &\qquad + |f(x) - f(y)|\,|g(y)| < \\ &\quad < \delta\,. \end{aligned}$$

c) Serve de exemplo o produto $f\,g$, com $f(x) = x$ e $g(x) = \operatorname{sen} 2\,\pi\,x$. Reconhece-se imediatamente que f e g são uniformemente contínuas em $\mathbf{R}$ e que só g é limitada; para ver que $f\,g$ não é uniformemente contínua basta observar que, com $x_n = n + \frac{1}{n}$ e $y_n = n$, se tem $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ e

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} [(f\,g)(x_n) - (f\,g)(y_n)] = \\ &\quad = \lim_{n\to\infty} \left(n \operatorname{sen} \frac{2\,\pi}{n}\right) = 2\,\pi\,. \end{aligned}$$

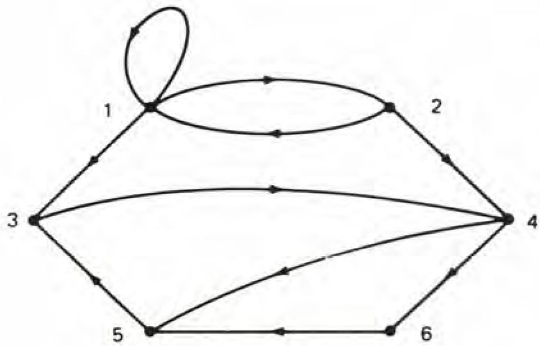
(Resolução de *Jaime Campos Ferreira*)

UNIV. DA BEIRA INTERIOR–COVILHÃ

Algoritmos(*)

Exame Final - 1987/88

1. O grafo direccionado



pode ser representado pela sua matriz de adjacência A tal que $A[I; J]$ é 1 sse houver um "caminho" do nó I para o nó J:

$$\begin{array}{cccccc} & & A & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(*) **Nota:** Na disciplina de Algoritmos, do 4º ano da licenciatura em Matemática/Informática da Universidade da Beira Interior em 1987/88 foi usada a linguagem *APL*, não como metodologia de programação mas como veículo de expressão algorítmica. Os pontos de exame reflectem esta escolha. Uma excelente referência bibliográfica é a lição proferida aquando da atribuição do Prémio Turing a Kenneth E. Iverson: Notation as a tool of thought, *Communications of the Association for Computing Machinery*, Vol. 23, pp. 444–465, August 1980.

a) Calcule $A \vee . \wedge A$;

b) Mostre que o produto interno de a) representa os "caminhos" de I para J com 2 percursos, isto é, toma o valor 1 sse existir um K tal que $A[I;K] \leftrightarrow A[K;J] \leftrightarrow 1$.

2. Prove que com ω vector de elementos numéricos todos distintos se verifica a identidade $⍋\omega \leftrightarrow \phi⍒\omega$.

Mostre com um exemplo que a identidade não se verifica no caso de haver elementos repetidos.

3. As diferentes maneiras de distribuir ω objectos distintos por $I = 1, 2, ..., \omega$ células ordenadas constituem os *números de Stirling* do 2º tipo de ordem ω. Por exemplo, com $\omega \leftrightarrow 4$ e $I \leftrightarrow 2$ há 7 maneiras:

1 2 3 | 4
1 3 4 | 2
1 2 4 | 3
2 3 4 | 1

1 2 | 3 4
1 3 | 2 4 .
1 4 | 2 3

Com $I \leftrightarrow 1$ só há 1 hipótese (todos os objectos na mesma célula) e analogamente com $I \leftrightarrow 4$ (todos os objectos em células distintas).

Por contagem directa obter-se-ía para $I \leftrightarrow 3$ o valor 6 de modo que os números de Sterling do 2º tipo e ordem 4 são $STE\,4 \leftrightarrow 1\ 7\ 6\ 1$.

O cálculo de STE 5 a partir de STE 4 (ou de uma ordem qualquer para a seguinte) é feito recursivamente multiplicando $0, STE\,4$ por $0, \iota 4$, e o resultado rotado de uma componente e somado com o vector originário: $0\,1\,7\,6\,1 + 1\,14\,18\,4\,0$.

Logo,

$$STE\,5$$
$$1\ 15\ 25\ 10\ 1\ .$$

Escreva uma função que calcule recursivamente $STE\,\omega$ para ω inteiro e positivo.

4. Uma matriz quadrada A diz-se *equi-somável* se:

i) Com $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, ..., n)$;

ii) $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}$ para $k = 1, ..., n$;

iii) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 2/7 & 2/7 & 0 \\ 1/7 & 0 & 1/7 \\ 1/7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é equi-somável. Estas matrizes desempenham um papel importante não só na teoria dos grafos como nos processos estocásticos com um número finito de estados.

Escreva uma função que aplicada a um quadro de ordem 2 tenha como resultado 1 se for uma matriz equi-somável e 0 no caso contrário.

5. Dum "texto" constituído por um vector de caracteres onde as "palavras" são separadas por um único carácter, por exemplo o espaço em branco, pretende-se construir a matriz das palavras, pela ordem das ocorrências, eventualmente preenchidas à direita por espaços.

Escreva expressões que permitam essa operação. Se essas expressões constituirem uma função *PALAVRAS* deverá ser, por exemplo:

```
    M ← PALAVRAS 'O ESFORCO E GRANDE
        E O HOMEM E PEQUENO'
    M
O
ESFORCO
E
GRANDE
E
O
HOMEM
E
PEQUENO
    ρM
9 7
```

Resolução:

1. Quanto a a),

$$A \vee . \wedge A$$

1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0

Para o cálculo podia ter-se em consideração que, para argumentos booleanos, $\vee . \wedge \leftrightarrow \lceil . \times$.

b) Para a demonstração bastaria notar que $(A \vee . \wedge A)\,[I;J] = 1 \leftrightarrow 1 = \vee / A[I;] \wedge A[;J] \leftrightarrow$ existir no vector booleano $A[I;] \wedge A[;J]$ pelo menos um $1 \leftrightarrow$ existir pelo menos um K tal que $1 = A[I;K] \wedge A[K;J] \leftrightarrow A[I;K] = 1 \wedge A[K;J] = 1$.

2. Com os elementos de ω todos distintos, fazendo $A \leftarrow \omega[\text{⍋}\omega]$, $B \leftarrow \omega[\text{⍒}\omega]$ e usando a notação matemática convencional tem-se:

$$A[1] < A[2] < \ldots < A[\rho\omega] \; .$$

Ou, em notação APL, $\wedge /, {}^{-}1 \downarrow A < 1 \phi A$ ou ainda $A < . \geq 1 \phi A$.

Analogamente $B[1] > B[2] > \ldots > B[\rho\omega]$ ou, em APL, $\wedge / {}^{-}1 \downarrow B > 1 \phi B$ ou $\wedge /, (B \circ . > B) = (\iota \rho B) \circ . > \iota \rho B$ ou ainda $B < . < 1 \phi B$.

Mas isso verifica-se sse $A[1] = B[\rho\omega]$, $A[2] = B[{}^{-}1 + \rho\omega]$, ..., $A[\rho\omega] = B[1]$ simultaneamente, logo $A = \phi B$ e isso sse

$$\omega[\text{⍋}\omega] \leftrightarrow \phi\omega[\text{⍒}\omega] \leftrightarrow \omega[\phi\text{⍒}\omega]$$

e, como os elementos de ω são todos distintos é assim porque $\text{⍋}\omega \leftrightarrow \phi\text{⍒}\omega$.

3. Do enunciado sai imediatamente

$$STE : (0, R) + \omega \uparrow (\iota \rho R) \times R \leftarrow STE\ \omega - 1$$
$$: \omega = 1 : \iota 1 \; .$$

4. Também do enunciado

$$EQUI : (1 = + /, \omega) \wedge \wedge / (+ / \omega) = + \not/ \omega$$
$$: (\vee /, \omega < 0) \vee \neq / \rho\omega : 0 \; .$$

5. Uma hipótese é

$$Z \leftarrow MAT\ \ W; B; E; I$$
$$W \leftarrow (\sim W \square SS\ '\ \ ')/W$$
$$W \leftarrow ('\ \ ' = {}^{-}1 \uparrow W) \downarrow ('\ \ ' = 1 \uparrow W) \downarrow W$$
$$B \leftarrow '\ \ ' = W \leftarrow '\ \ ', W, '\ \ '$$
$$E \leftarrow {}^{-}1 + 1 \downarrow I - {}^{-}1 \phi I \leftarrow B / \iota \rho B$$
$$Z \leftarrow ((\rho E), \lceil / E)\, \rho (, E \circ . \leq \iota \lceil / E) \backslash ('\ \ ' \neq W) / W$$

(Resolução de *J. Marques Henriques*)

Instituto Superior de Agronomia

Estatística

Exame final – 1ª chamada – 1990

I

(Nota: Para responder às diferentes questões, utilize os cálculos auxiliares constantes na observação final ao enunciado deste grupo)

Os seguintes dados referem-se a classificações obtidas por 10 estudantes num dado exame, ao seu Q.I. e ao nº de horas dispendidas na preparação do exame:

Classif. (y)	79	97	51	65	82	93	81	68	60	86
Q.I. (x_1)	112	126	111	109	112	121	120	113	111	124
Horas (x_2)	8	13	3	7	11	9	8	4	6	4

1. Construa um diagrama de extremos e quartis para as classificações obtidas por aquele grupo de estudantes.

2. Estime um modelo de regressão linear múltipla das classificações em função do Q.I. e das horas de estudo.

3. Considere o exame realizado por estudantes que possuem o mesmo Q.I.. Qual a variação esperada nas classificações por cada hora a mais de tempo de estudo?

4. Qual a nota que se prevê para um aluno com um Q.I. de 110 e com 6 horas de estudo? Indique a precisão da sua resposta.

5. Se lhe fosse pedido que escolhesse apenas um dos factores acima considerados (Q.I. ou horas) para explicar a classificação dos estudantes, qual escolheria e porquê? Escreva então a equação do modelo de regressão linear simples baseado nesse factor, fazendo os comentários que considerar adequados quanto ao uso desta equação de regressão em vez da obtida no ponto 2.

Observação: Cálculos auxiliares

Matriz de correlações

	y	x_1	x_2
y	1.000	0.808	0.708
x_1	0.808	1.000	0.361
x_2	0.708	0.361	1.000

Soma dos quadrados

Regressão	1675.7
Residual	289.9
Total	1965.6

Estimativas dos coeficientes de regressão

Constante	−115.7
x_1	1.516
x_2	2.214

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 762 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{1i} = 1159 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{2i} = 773$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 60030 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{1i}^2 = 134673 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{2i}^2 = 625$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i x_{1i} = 88981 \qquad \sum_{i=1}^{10} y_i x_{2i} = 5864 \qquad \sum_{i=1}^{10} x_{1i} x_{2i} = 8525.$$

II

1. A média e variância de uma primeira série de 15 observações são respectivamente:

$$\overline{x_1} = 30\,, \quad s_1^2 = 25\,,$$

e a média e variância de uma segunda série de 20 observações são:

$$\overline{x_2} = 40\,, \quad s_2^2 = 36\,.$$

Qual a média e a variância do conjunto das 35 observações?

2. Seja $p(x)$ uma distribuição de probabilidade para $x = 1, 2, ..., n, ..., 2n-1$. Se $p(n+k) = p(n-k)$, mostre que:

a) $E(X) = n$;

b) Todos os momentos de ordem ímpar em torno do valor médio se anulam.

III

Um cultivador tem na sua cave duas categorias de vinhos engarrafados: garrafas de vinho tinto e garrafas de vinho branco.

Supõe-se que nesta cave só há vinhos de três anos (1968, 1969 e 1970) e que há o mesmo número de garrafas de cada ano.

A percentagem de garrafas de vinho tinto entre as engarrafadas em cada um daqueles anos (1968, 1969 e 1970) é de 70%, 50% e 90%, respectivamente.

1. Um ladrão leva uma garrafa ao acaso que verifica ser de vinho branco. Qual é a probabilidade de ter sido engarrafado em 1969?

2. Depois de ter provado o vinho branco, o referido ladrão achou que ele era muito bom. Decide então fazer nova 'visita' à cave com o objectivo de levar consigo pelo menos três garrafas de vinho branco. Considerando que a escolha é feita ao acaso, quantas garrafas deverá ele levar de modo a garantir a satisfação do seu desejo em pelo menos 60%.

IV

Um comerciante pretende adquirir frutos de um pomar A ou B. Como o peso dos frutos é factor preferencial, o comerciante toma uma amostra casual de 36 frutos em cada pomar escolhe aquele a que corresponde a amostra com maior peso médio. Se o peso dos frutos for normalmente distribuído, sendo

Pomar	Valor Médio (grs)	Desvio Padrão (grs)
A	20	2
B	18	5

com que probabilidade escolhe o comerciante o pomar B?

V

Numa experiência agronómica pretende-se avaliar o crescimento total das plantas (expresso em peso seco) relativamente a dois regimes de fertilização A e B.

Ao fim de determinado tempo procedeu-se a medições, tendo-se obtido os seguintes resultados:

A	5.44	5.36	5.60	6.46	6.75	6.03	4.15	4.44
B	5.12	3.80	4.96	6.43	5.03	5.08	3.22	4.42

1. Numa experiência anterior (com um elevado número de plantas da mesma cultivar) relativa ao tratamento A, obteve-se uma variância de 0.42. Verifique se os dados actuais são consistentes com esse valor. Diga, justificando, se haveria alguma(s) hipótese(s) necessária(s) à resolução do problema.

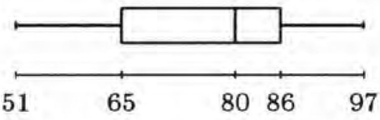
2. Verifique se os dois regimes de fertilização A e B evidenciam diferenças significativas no que respeita ao crescimento das plantas. Explicite e verifique as hipóteses necessárias à resolução do problema.

Resolução:

I

1. O que é necessário para a construção do diagrama de extremos e quartis:

- ordenação dos dados:
  51 60 65 68 79 81 82 86 93 97;
- $x_{\min} = 51, \;\; x_{\max} = 97$;
- $\tilde{x} = \frac{x_{(5)}+x_{(6)}}{2} = 80$;
- $Q_1 = q_{0.25} = x_{(3)} = 65$;
- $Q_3 = q_{0.75} = x_{(8)} = 86$;



2. Por consulta dos cálculos auxiliares constantes na observação final do enunciado, obtém-se que o modelo de regressão linear múltipla é:

$$\widehat{y} = -115.7 + 1.516\,x_1 + 2.214\,x_2 \ .$$

3. Considerando constante o Q.I., a variação esperada na resposta quando o nº de horas de estudo aumenta de uma unidade é dada pelo coeficiente de regressão associado a essa variável. Logo há um aumento esperado de 2.214 na classificação.

4.

$$y = -115.7 + 1.516 \times 110 + 2.214 \times 6 = \\ = 64.344 \ .$$

A resposta é dada com a precisão de

$$R^2 = \frac{SQR}{SQT} = 0.8525 \ .$$

5. Escolheria Q.I. porque é o que apresenta um coeficiente de correlação com a variável resposta, mais elevado: $r_{x_1 y} = 0.808$

$$b = \frac{n \sum x_{1i}\, y_i - \sum x_{1i} \sum y_i}{n \sum x_{1i}^2 - (\sum x_{1i})^2} = 1.929 \ .$$

A equação é

$$\widehat{y} = -147.3 + 1.929\,x_1 \ ,$$

com $R^2 = 0.6529$, que é muito baixo.

Portanto ambos os factores (Q.I. e horas) têm de ser considerados na regressão.

II

1.

$$n_1 = 15, \quad \overline{x_1} = 30, \quad s_1^2 = 25 \ ;$$
$$n_2 = 20, \quad \overline{x_2} = 40, \quad s_2^2 = 36 \ .$$

Para o conjunto das $n = 35$ observações temos:

$$\overline{x} = \frac{n_1\,\overline{x_1} + n_2\,\overline{x_2}}{35} = 35.71 \ ,$$
$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\,\overline{x}^2}{n-1} \ .$$

Sendo assim é necessário calcular para a 1ª série de observações $\sum x_{1i}^2$ e para a 2ª série $\sum x_{2i}^2$. Então

$$s_1^2 = \frac{\sum x_{1i}^2 - n_1\,\overline{x_1}^2}{n_1 - 1} \ \Rightarrow\ \sum x_{1i}^2 = 13\,850 \ ,$$
$$s_2^2 = \frac{\sum x_{2i}^2 - n_2\,\overline{x_2}^2}{n_2 - 1} \ \Rightarrow\ \sum x_{2i}^2 = 32\,684 \ ,$$
$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\,\overline{x}^2}{n-1} = \\ = \frac{(13\,850 + 32\,684) - 35 \times (35.71)^2}{34} = \\ = 55.9370 \ .$$

2. a)

$$E(X) = \sum_{x=1}^{2n-1} x\,p(x) = \\ = 1\,p(1) + 2\,p(2) + \ldots + (n-1)\,p(n-1) + \\ + n\,p(n) + (n+1)\,p(n+1) + \ldots + \\ + (2\,n-1)\,p(2\,n-1) \ .$$

Se $p(n-k) = p(n+k)$, podemos escrever

$$E(X) = 2\,n\,p(1) + 2\,n\,p(2) + \ldots + \\ + 2\,n\,p(n-1) + n\,p(n) = \\ = n\Big[2\,p(1) + 2\,p(2) + \ldots + \\ + 2\,p(n-1) + p(n)\Big] = \\ = n\sum_{x=1}^{2n-1} p(x) = n\,.$$

b)

$$\mu^{2k+1} = E\Big[(X-n)^{2\,k+1}\Big] = \\ = \sum_{x=1}^{2n+1}(x-n)^{2\,k+1}\,p(x) = \\ = (1-n)^{2\,k+1}\,p(1) + (2-n)^{2k+1}\,p(2) + \\ + \ldots + (n-n)^{2k+1}\,p(n) + \ldots + \\ + (2\,n-2-n)^{2k+1}\,p(2\,n-2) + \\ + (2\,n-1-n)^{2k+1}\,p(2\,n-1).$$

As parcelas equidistantes de $(n-n)^{2k+1}\cdot$ $\cdot p(n)$ são iguais em valor absoluto, mas de sinais contrários, logo $\mu^{2k+1} = 0$.

III

1. A probabilidade de extrairmos uma garrafa de cada um daqueles anos é igual para todos: $P(68) = P(69) = P(70) = 1/3$.

$$P(\mathrm{T}/68) = 0.70, \quad P(\mathrm{T}/69) = 0.50, \\ P(\mathrm{T}/70) = 0.90\,,$$

sendo assim

$$P(\mathrm{B}/68) = 0.30, \quad P(\mathrm{B}/69) = 0.50, \\ P(\mathrm{B}/70) = 0.10\,,$$

donde

$$P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}/68)\cdot P(68) + P(\mathrm{B}/69)\cdot P(69) + \\ + P(\mathrm{B}/70)\cdot P(70) = 0.30$$

$$P(69/\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{B}/69)\cdot P(69)}{P(\mathrm{B})} = \frac{5}{9}\,.$$

2. Como vimos $P(\text{Branco}) = 0.3$.

Seja X o nº de garrafas de vinho branco que ele retira aleatoriamente das existentes na cave (onde se supõe, como é óbvio, que existem muitas).

Tem-se então

$$X \cap \mathrm{B}(n; 0.3)\,.$$

Pretende-se determinar n de modo que

$$P[X \geq 3] \geq 0.60 \iff P[X \leq 2] \leq 0.40\,.$$

Consultando as tabelas da binomial, temos que terá de ser $n \geq 10$.

IV

$n_1 = n_2 = 36$.

Sejam X_A e X_B as variáveis aleatórias que designam o peso dos frutos do pomar A e B, respectivamente. Temos

$$X_\mathrm{A} \cap \mathcal{N}(20, 2) \text{ e } X_\mathrm{B} \cap \mathcal{N}(18, 5), \text{ donde}$$

$$\overline{X}_\mathrm{A} \cap \mathcal{N}(20, \tfrac{1}{3}) \text{ e } \overline{X}_\mathrm{B} \cap \mathcal{N}(18, \tfrac{5}{6})\,.$$

A probabilidade de o comerciante escolher o pomar B é dada por

$$P[\overline{X}_\mathrm{B} > \overline{X}_\mathrm{A}] = P[\overline{X}_\mathrm{B} - \overline{X}_\mathrm{A} > 0] = \\ = 1 - \Phi\Big(\frac{2}{\sqrt{29/36}}\Big) \simeq 0.0113\,.$$

V

1. Podemos realizar um teste de hipóteses

$$H_0: \sigma_0^2 = 0.42 \; ,$$

$$H_1: \sigma_0^2 \neq 0.42 \; .$$

Considerando como hipótese a normalidade dos comprimentos das plantas ao ser usado o fertilizante A, a estatística do teste é

$$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \cap \chi^2_{(n-1)} \; .$$

Tomando como nível de significância $\alpha = 0.05$, a região crítica é

$$\text{R.C.} =]-\infty, \chi^2_{0.975\,(7)}[\cup]\chi_{0.025\,(7)}, +\infty[=$$

$$=]-\infty; 1.69[\cup]16.01; +\infty[\; .$$

O valor da estatística é $13.66 \notin$ R.C., logo a um nível de significância de 0.05 não há motivos para rejeitar que os dados actuais sejam consistentes com aquele valor para a variância.

2. Dado tratar-se de amostras independentes e considerando a hipótese da normalidade de cada uma das populações de medições, vamos verificar em primeiro lugar se é de admitir a hipótese da igualdade de variâncias.

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \; ,$$

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \; ,$$

Estatística do teste: $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \cap F_{(7,7)}$,

$$F_{\text{cal}} = 0.8771 \; .$$

A um nível de significância de 0.05 temos a região de rejeição

$$]-\infty, 0.2002[\cup[4.9949, +\infty[\; ;$$

como F_{cal} não pertence à região de rejeição, não se rejeita H_0.

Para estudar a existência de diferenças significativas no uso dos dois fertilizantes temos o teste

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \; ,$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \; ,$$

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cap t_{(14)} \quad \text{e}$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\,S_1^2 + (n_2 - 1)\,S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \; ,$$

$$T_{\text{cal}} = 1.6486 \; .$$

Considerando um nível de significância de 0.05

$$\text{R.C.} =]-\infty; -2.145[\cup]2.145; +\infty[\; ,$$

sendo assim $T_{\text{cal}} \notin$ R.C.. Logo para um nível de significância de 0.05 não rejeitamos a hipótese de os dois fertilizantes serem semelhantes.

(Resolução de ***Manuela Neves Figueiredo***)

Convidamos todos os professores a enviarem enunciados de pontos de exame relativos ao 12º ano de escolaridade e aos primeiros anos da Universidade, com as respectivas resoluções.

A *Gazeta de Matemática* ficará reconhecida.