# PROBLEMAS

Quer o estudante, quer o professor de matemática deparam aqui e ali com problemas cujo enunciado nem sempre denuncia a sua natureza — do trivial ao profundo. Nem por isso esses problemas deixam de ocupar, às vezes com teimosia, o tempo de quem os formulou ou simplesmente encontrou, constituindo-se em geral como subproduto da faina matemática. Aqui se apresentam hoje alguns problemas do foro da análise matemática real. Naturalmente que a *Gazeta de Matemática* fica à espera de respostas dos leitores que serão publicadas após selecção, bem como de novos problemas...

**1.** Sejam $f$, $f_n$ $(n = 1, 2, ...)$, funções reais de variável real; suponhamos que para todo $x \in \mathbf{R}$ e qualquer sucessão $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ se tem $f_n(x_n) \to f(x)$. Será que $f$ é necessariamente contínua?

**2.** Seja $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ contínua. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1) \, .$$

**3.** Sendo $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ contínua tal que $f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$ para todo $x \in \mathbf{R}$, será que $f$ tem de ser constante?

**4.** Dada a sucessão $(a_n)$ de números reais de termo geral $a_n > 0$, tal que $\sum a_n$ converge, será sempre possível encontrar uma sucessão $(c_n)$ de termos positivos $(c_n > 0)$, tal que $\lim c_n = +\infty$ e $\sum c_n\, a_n$ seja convergente?

**5.** Será que uma sucessão $(x_n)$ de números reais não negativos $(x_n \geq 0)$ tal que $x_{n+1} \leq x_n + \frac{1}{n^2}$ para todo $n$, é necessariamente convergente?

**6.** Seja $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ uma função real de variável real tal que:

**i)** Se $[a,b] \subset [0,1]$ então $f([a,b])$ contém o intervalo de extremos $f(a)$, $f(b)$;

**ii)** Para todo $c \in \mathbf{R}$, $f^{-1}(c)$ é fechado.

Será $f$ necessariamente contínua?

(Problemas propostos por *Jorge Nuno Oliveira e Silva*)