ANTOLOGIA

O texto que reproduzimos, da autoria de I.R. Šafarevič (lê-se Chafarevitch) é uma tradução da secção introdutória do tomo I, dedicado à *Álgebra* da colecção *Problemas da Matemática Contemporânea e Rumos Fundamentais — Resultados da Ciência e da Técnica*, vol. 11 (ed. de A.I. Kostrikin e I.R. Šafarevič, publicado por Viniti, Moscovo, 1986).

O que é a álgebra?

por *I.R. Šafarevič*

O que é a álgebra? É um ramo da matemática, um método, ou um referencial do pensamento? Estas questões não têm respostas claras e curtas. Podemos tentar descrever o lugar ocupado pela álgebra na matemática dirigindo a nossa atenção para aquilo que Hermann Weyl referia com uma palavra um tanto ou quanto impronunciável: "coordenatização" (veja-se H. Weyl, The classical groups, 1939). Um indivíduo poderia fazer-se uma ideia do mundo baseando-se exclusivamente nos seus órgãos dos sentidos, na vista, no tacto, na sua experiência na manipulação de objectos do mundo exterior e na intuição que dela resulta. No entanto, outro ponto de vista seria possível: as impressões subjectivas podem transformar-se em marcos objectivos, em números, através de *medidas*, que podem preservar-se indefinidamente e comunicar-se a outros indivíduos que não experimentaram as mesmas impressões; além disso, é possível operar sobre esses números obtendo novas informações sobre os objectos que se medem, o que é ainda mais importante.

O mais velho exemplo é a ideia de *contar* (coordenatização) e de *calcular* (operação), o que nos permite tirar conclusões sobre um certo número de objectos sem os abarcar todos de uma vez. As tentativas de *medir* ou de "exprimir em números" uma variedade de objectos deram lugar às fracções e aos números negativos, estendendo os números naturais. A tentativa de exprimir como um número a diagonal de um quadrado de lado 1 levou à famosa crise da matemática da antiguidade e à construção dos números irracionais.

As medidas determinam os pontos de uma recta através de números reais e mais geralmente, exprimem muitas quantidades físicas como números. Deve-se a Galileu a definição mais radical, no seu tempo, da ideia de coordenatização: "medir tudo o que é mensurável e tornar mensurável tudo o que ainda o não é". A partir da época de Galileu, esta ideia teve um brilhante sucesso. A criação da geometria analítica permitiu representar os pontos do plano como pares de números, os pontos do espaço como ternos de números e através de operações sobre números, conduziu à descoberta de mais e mais factos geométricos. O êxito da geometria analítica deve-se porém sobretudo ao facto de reduzir a números não apenas os pontos, mas também as curvas, as superfícies, etc.. Por exemplo, uma curva plana é dada por uma equação $F(x, y) = 0$; no caso de uma recta, F é um polinómio linear, determinado pelos seus 3 coeficientes: os coeficientes de x, de y e o termo constante. No caso de uma secção cónica temos uma curva de grau 2, determinada pelos seus 6 coeficientes. Se F é um polinómio de grau n é fácil ver que tem $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ coeficientes; a curva correspondente é determinada por estes coeficientes, na mesma forma em que um ponto é dado pelas suas coordenadas.

Para exprimir as raízes de uma equação através de números, introduziram-se os números complexos o que constituíu um passo num ramo completamente novo da matemática, que inclui a teoria das funções elípticas e das superfícies de Riemann.

Durante muito tempo deve-se ter julgado que o caminho indicado por Galileu consistia em medir "tudo" em termos de uma colecção de números conhecida e fora de discussão, consistindo o único problema na obtenção de métodos de medida cada vez mais subtis, como sejam a introdução das coordenadas cartesianas ou de novos instrumentos físicos. É certo que de vez em quando os números considerados conhecidos (simplesmente chamados números) se revelavam inadequados: isto conduziu a uma "crise" que só seria resolvida com a extensão da noção de número, criando novas formas de números que viriam a tornar-se em breve, por sua vez, como a única possibilidade. Seja como for, em geral, em dada altura a noção de número era considerada perfeitamente clara e o desenvolvimento fazia-se no sentido da sua extensão:

"1, 2, muitos" → números naturais →
→ inteiros → racionais →
→ reais → números complexos.

Mas as matrizes, por exemplo, formam um mundo completamente independente de "objectos do tipo dos números" que não podem ser englobados nesta sequência. Ao mesmo tempo descobriram-se os quaterniões e outros "sistemas hipercomplexos" (hoje chamados álgebras). As transformações infinitesimais levaram aos operadores diferenciais para os quais a operação natural resulta ser algo de inteiramente novo: o colchete de Poisson. Os corpos finitos surgem na álgebra e os números p-ádicos em teoria dos números. A pouco e pouco tornava-se claro que qualquer tentativa de tudo abarcar com um conceito de número, estava votada ao fracasso. Deste modo o princípio declarado por Galileu revelava-se pouco tolerante; a ideia de "tornar mensurável *tudo* o que ainda o não é" discrimina claramente tudo aquilo que teimosamente se recusa a ser medido, ficando assim excluído da esfera de interesses da ciência a até mesmo da razão (tornando-se uma *qualidade segunda* ou *secunda causa* na terminologia de Galileu. Mesmo se, mais modestamente, restringíssemos o polémico termo "tudo" aos objectos da física e da matemática, sempre apareceriam muitos deles que não poderiam ser "medidos" em termos de "números habituais".

O princípio da coordenatização pode porém ser preservado se admitirmos que o conjunto de "objectos tipo-número" a utilizar com esse fim seja tão diverso quanto o é o mundo dos objectos físicos e matemáticos a coordenatizar. Os objectos a servir como "coordenadas" deveriam satisfazer apenas certas condições de carácter bastante geral.

Devem ser individualmente discerníveis. Por exemplo, apesar dos pontos de uma recta terem propriedades idênticas (uma recta é homogénea) e um ponto poder assinalar-se apenas com um dedo, os números são individuais: 3, $\frac{7}{2}$, $\sqrt{2}$, π, etc.. (O mesmo princípio se usa para distinguir dois bichinhos de estimação recém-nascidos que o dono destrinça atando-lhes ao pescoço fitas de cores diferentes.)

Devem ser suficientemente abstractos para reflectir propriedades comuns a uma vasta gama de fenómenos.

Alguns dos aspectos fundamentais das situações em estudo deverão reflectir-se em *operações* a efectuar entre os objectos usados como coordenadas: adição, multiplicação, comparação de grandezas, diferenciação, formação de colchetes de Poisson e por aí fora.

Podemos precisar o nosso ponto de vista da maneira seguinte:

Tese. *Tudo o que é objecto de estudo matemático (curvas e superfícies, funções, simetrias, cristais, quantidades da mecânica quântica, etc.) pode ser "coordenatizado" ou "medido". No entanto, para lograr uma tal "coordenatização" os números "ordinários" não são de modo algum adequados.*

Reciprocamente, quando encontramos um novo tipo de objecto, somos forçados a construir (ou a descobrir) novos tipos de "quantidades" para o "coordenatizar". A construção e o estudo das quantidades que surgem desta forma é o que caracteriza o lugar da álgebra na matemática (de uma maneira muito aproximada, evidentemente).

Deste ponto de vista, o desenvolvimento de qualquer ramo da álgebra consiste em duas etapas. A primeira é o nascimento do novo tipo de objectos algébricos a partir de algum problema de coordenatização. A segunda etapa é a sua carreira subsequente, ou seja, o desenvolvimento sistemático da teoria dessa classe de objectos; nesta fase, a relação com os objectos de partida, ora se mantém íntima ora desaparece quase completamente. No que se segue(*) tentaremos não perder de vista estas duas etapas. Mas como os cursos de álgebra só se ocupam em geral da segunda etapa, manteremos o equilíbrio prestando um pouco de atenção à primeira.

Concluiremos esta secção com dois exemplos de coordenatização que são menos referidos do que os considerados até agora.

(*) Recordamos que o texto desta *Antologia* é o texto introdutório de um livro (N. do T.).

Exemplo 1. *O Dicionário da Mecânica Quântica.* Em mecânica quântica as noções físicas básicas são "coordenatizadas" através de objectos matemáticos, da forma que se representa no quadro 1.

Exemplo 2. *Modelos Finitos para os Sistemas de Incidência e os Axiomas de Paralelismo.* Comecemos com uma pequena digressão. Na construção axiomática da geometria é frequente considerar apenas uma parte dos axiomas em vez de os tornar na totalidade; para ser claro limitamo-nos à geometria plana. Põe-se então a questão de saber que realizações são possíveis do sistema de axiomas escolhido: existirão outros sistemas de objectos, além da geometria plana "usual", para os quais o conjunto de axiomas é satisfeito? Consideramos agora um conjunto de axiomas muito natural relativos a "incidência e paralelismo".

a) Dois quaisquer pontos distintos determinam uma e uma só recta.

b) Dada uma recta e um ponto que não lhe pertence existe uma e uma só recta que passa pelo ponto e que não intersecta aquela recta (ou seja que lhe é paralela).

c) Existem pelo menos três pontos não colineares.

Sucede que este conjunto de axiomas admite muitas realizações, algumas delas em franco conflito com a nossa intuição, compreendendo apenas um número finito de pontos e de rectas. Duas realizações desse tipo estão representadas nas figuras 1 e 2. O modelo da figura 1 tem 4 pontos A, B, C, D e 6 rectas AB, CD; AD, BC; AC, BD. O da figura 2 tem 9 pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e 12 rectas ABC, DEF, GHI; ADG, BEH, CFI; AEI, BFG,

Quadro 1

Noção física	Noção matemática
Estado de um sistema físico	Recta φ num espaço de Hilbert complexo de dimensão infinita
Grandeza física escalar	Operador auto-adjunto
Grandezas simultaneamente mensuráveis	Operadores que comutam
Grandeza no estado φ com o valor preciso λ	Operador admitindo o vector próprio φ de valor próprio λ
Conjunto dos valores possíveis como medidas de uma grandeza	Espectro de um operador
Probabilidade de transição de um estado φ para um estado ψ	$\lvert(\varphi, \psi)\rvert$, onde $\lvert\varphi\rvert = \lvert\psi\rvert = 1$

CDH; *CEG*, *BDI*, *AFH*. É fácil verificar que os axiomas a), b) e c) são satisfeitos; na nossa lista de rectas, as famílias de rectas paralelas estão separadas com ponto e vírgula.

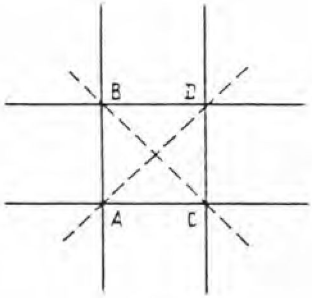

Fig. 1

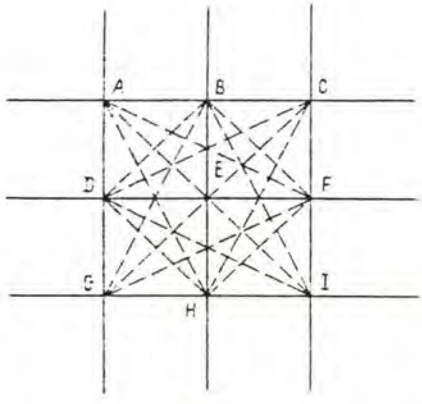

Fig. 2

Voltemos ao nosso tema principal e tentemos coordenatizar os modelos para os axiomas a), b), c) acabados de construir. Para o primeiro caso usaremos a seguinte construção: escreveremos **0** ou **1** para a propriedade de um inteiro ser par ou ímpar respectivamente; definiremos então operações sobre os símbolos **0** e **1** por analogia com as propriedades desses inteiros relativos à adição e multiplicação. Por exemplo, como a soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar escreveremos $\mathbf{0}+\mathbf{1}=\mathbf{1}$, e assim por diante. O resultado pode exprimir-se nas "tabelas da adição e da multiplicação" das figuras 3 e 4.

+	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

Fig. 3

×	0	1
0	**0**	**0**
1	**0**	**1**

Fig. 4

O par de entidades **0** e **1** com as operações assim definidas servir-nos-á para coordenatizar a "geometria" da figura 1. Com este propósito atribuiremos aos pontos, coordenadas (x, y) de acordo com:

$$A=(\mathbf{0},\mathbf{0}),\quad B=(\mathbf{0},\mathbf{1})\ ,$$
$$C=(\mathbf{1},\mathbf{0}),\quad D=(\mathbf{1},\mathbf{1})\ .$$

É fácil verificar que as rectas da geometria são então definidas pelas equações lineares seguintes:

$$AB\colon\ \mathbf{1}\,x=\mathbf{0};\quad CD\colon\ \mathbf{1}\,x=\mathbf{1};$$
$$AD\colon\ \mathbf{1}\,x+\mathbf{1}\,y=\mathbf{0};$$
$$BC\colon\ \mathbf{1}\,x+\mathbf{1}\,y=\mathbf{1};$$
$$AC\colon\ \mathbf{1}\,y=\mathbf{0};\quad BD\colon\ \mathbf{1}\,y=\mathbf{1}.$$

Na verdade estas são as 6 únicas equações não triviais que podem formar-se usando as quantidades **0** e **1**.

A construção é análoga para a geometria da figura 2, embora seja ligeiramente mais complicada: suponhamos que repartíamos o conjunto dos inteiros em três conjuntos U, V e W, da maneira seguinte:

U = inteiros divisíveis por 3,

V = inteiros com resto 1 na divisão por 3,

W = inteiros com resto 2 na divisão por 3.

As operaçõés com os símbolos U, V, W definem-se como no primeiro exemplo; assim, um número em V mais um número em W dá sempre um número em U, de modo que fazemos $V + W = U$; analogamente, o produto de dois números em W é sempre um número em V de modo que pomos $W \cdot W = V$. É fácil elaborar as correspondentes tabelas de adição e multiplicação.

Não custa então verificar que a geometria da figura 2 é coordenatizada com U, V, W através de:

$$A = (U,U), \quad B = (U,V), \quad C = (U,W)\ ,$$
$$D = (V,U), \quad E = (V,V), \quad F = (V,W)\ ,$$
$$G = (W,U), \quad H = (W,V), \quad I = (W,W)\ ;$$

mais uma vez, é possível exprimir as rectas através de todas as equações lineares que podem escrever-se usando os símbolos U, V, W; por exemplo, AFH é dada por $Vx + Vy = U$ e DCH por $Vx + Wy = V$.

Construímos assim sistemas finitos de números para coordenatizar geometrias finitas. Voltaremos mais tarde à discussão destas construções.

Estes poucos exemplos já dão uma primeira ideia de que espécie de objectos pode ser usada numa ou noutra versão de "coordenatização". Para começar, a colecção de objectos a usar deve ser rigorosamente delineada; por outras palavras devemos indicar um conjunto (ou mesmo vários conjuntos) de que esses objectos possam ser elementos. Em segundo lugar devemos poder operar sobre esses objectos, isto é, devemos definir *operações* que nos permitam obter novos elementos, a partir de um ou mais elementos do conjunto (ou conjuntos).

Para já mais nenhuma restrição terá de ser imposta, na natureza dos conjuntos a usar; do mesmo modo uma operação pode ser uma regra completamente arbitrária que a k elementos associa um novo elemento. É certo que essas operações preservarão usualmente algumas semelhanças com as operações entre números. Em particular em todas as situações que encontraremos, $k = 1$ ou 2. Os exemplos básicos de operações com as quais todas as construções subsequentes devem comparar-se serão: a operação $a \mapsto -a$ que a um número associa o seu oposto; a operação $b \mapsto b^{-1}$ que a cada número diferente de zero associa o seu inverso (nestes casos $k = 1$); e as operações $(a, b) \mapsto a + b$ e $a\,b$ de adição e multiplicação (aqui $k = 2$).