# ARQUIMEDES E O VOLUME DA ESFERA

Fátima Vinagre
Escola Secundária da Azambuja
mfatimavinagre@gmail.com

Arquimedes de Siracusa (287 a.C.– 212 a.C.) é muito provavelmente um dos maiores matemáticos de sempre. Tendo realizado os seus estudos em Alexandria, no Egito, capital do mundo helénico, manteve correspondência com matemáticos alexandrinos como Eratóstenes e Aristarco.

A sua vasta obra matemática não padeceu de grande divulgação, uma vez que o próprio Arquimedes contribuiu, em parte, para isso. Os seus trabalhos dedicados à quadratura do círculo e da parábola, ao estudo da espiral, ao volume da esfera e de outros corpos redondos, ao estudo do centro de gravidade e aos problemas da flutuação eram escritos na forma de breves tratados, dirigidos aos matemáticos da escola de Alexandria. O estilo elíptico, a densidade de referências internas e a dificuldade das demonstrações não favoreceram a difusão, mesmo entre os matemáticos, apesar da grande originalidade dos seus trabalhos.

Foi apenas em 1906 que o filósofo e historiador dinamarquês Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) estudou um palimpsesto[1], o qual continha além de textos matemáticos de Arquimedes subjacentes a um texto religioso do século X, um texto grego, "Sobre os corpos flutuantes". Mas foi entre os textos de Arquimedes que fez a sua maior descoberta, "O método sobre teoremas mecânicos", atualmente conhecido por "O Método", no qual Arquimedes apresentava a Eratóstenes, de Alexandria, o procedimento heurístico que empregava para obter as suas conclusões, que consistia na descrição de um "método mecânico" para investigar questões matemáticas, explicando várias das suas descobertas, entre as quais aquela que pode ser considerada uma das maiores descobertas matemáticas de todos os tempos, a fórmula para calcular o volume de uma esfera.

Arquimedes sabia que o volume de cone é igual a um terço do volume de um cilindro com a mesma altura e a mesma base e que o volume de um cilindro é dado pelo produto da área de uma das suas bases pela sua altura, e apresentou uma dedução teórica da **lei da alavanca** na sua obra "Sobre o Equilíbrio dos Planos" ou "Sobre os Centros de Gravidade das Figuras Planas", tendo-a engenhosamente aplicado na demonstração da fórmula de cálculo do volume de uma esfera.

Tenhamos, por base, o conceito de centro de gravidade de um corpo de Arquimedes:

> "Dois pesos $w_1$ e $w_2$ nas extremidades de uma barra de peso desprezável e distantes $x_1$ e $x_2$ respetivamente de um ponto de apoio estão em equilíbrio se $w_1 x_1 = w_2 x_2$."

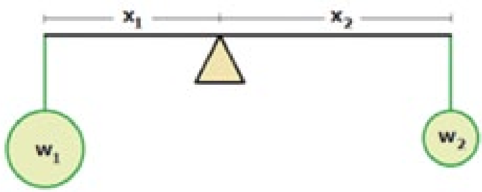


Figura 1: Ilustração do conceito de centro de gravidade de um corpo.

Segundo o geómetra, o centro de gravidade de qualquer corpo é um ponto, pertencente ao corpo ou localizado no espaço vazio, tal que, se for concebido que o corpo está suspenso por este ponto, o corpo assim sustentado permanece em repouso e preserva a sua posição original, sem se inclinar em nenhuma direção, qualquer que seja a sua orientação inicial em relação à Terra [1] e que todo o corpo, suspenso por qualquer ponto, assume um estado de equilíbrio quando o ponto de suspensão e o centro de gravidade do corpo estão ao longo de uma mesma linha vertical.[2]

Considere-se, ainda, o postulado 6 (no qual assenta a lei da alavanca) e os resultados teóricos tratados por Arquimedes na sua obra "Sobre o Equilíbrio dos Planos", relevantes para o presente artigo:

Existem diversas formas de demonstrar como se calcula o volume de uma esfera em função do seu raio. Contudo, neste artigo, pretende-se fazê-lo com base na lei da alavanca de Arquimedes de Siracusa (287 a.C.– 212 a.C.).

[1] Um pergaminho usado para nele se escrever várias vezes.

[2] Segundo Arquimedes afirma, no decorrer da demonstração da proposição 6, que comprovou o enunciado ao qual a autora se refere, num outro trabalho, hoje perdido.

**Postulado 6:** *Se grandezas se equilibram a certas distâncias*[3], *então grandezas equivalentes*[4] *a estas grandezas equilibrar-se-ão, por sua vez, nas mesmas distâncias.*[5] *[1]*

**Proposição 4:** *Se duas grandezas iguais não possuem o mesmo centro de gravidade, o centro de gravidade da grandeza composta por estas [duas] grandezas estará no ponto médio do segmento de reta ligando os centros de gravidade das [duas] grandezas. [3]*

**Proposições 6 e 7:** *Se [duas] grandezas são comensuráveis [proposição 6] ou incomensuráveis [proposição 7], elas equilibrar-se-ão em distâncias inversamente proporcionais às grandezas. [3]*

Façamos, agora, algumas considerações acerca do que se entende por alavanca.

A alavanca consiste num corpo rígido, geralmente linear, capaz de girar ao redor de um eixo horizontal fixo em relação à Terra (o fulcro ou ponto de sustentação PS). O eixo de rotação é, em geral, ortogonal à alavanca, com os dois ficando usualmente no plano horizontal quando a alavanca está parada em relação à Terra.

É como se fosse uma balança, mas com a possibilidade de colocarmos pesos a distâncias diferentes do fulcro.

Chamamos braço da alavanca à distância horizontal, $d$, entre o ponto de apoio de um corpo sobre o travessão (ou haste da alavanca) e o plano vertical passando pelo fulcro. Para facilitar a linguagem, usaremos a expressão de distância entre o peso e o fulcro, mas em geral deve entender-se distância horizontal entre o ponto de atuação do peso na alavanca e o plano vertical passando pelo fulcro.

Quando falarmos de dois braços da alavanca, deve entender-se que estes estão em lados opostos do plano vertical que passa pelo fulcro.

Para se utilizar a lei da alavanca, pressupõe-se que a alavanca seja sensível, isto é, tenha liberdade de oscilação e de giro ao redor do fulcro; verifique as razões $\Delta P/PA$ (onde $\Delta P$ é a diferença entre os pesos que estão dos dois lados da alavanca e $PA$ é o peso da alavanca) e $d/h$ (onde $h$ é a distância vertical entre o ponto de sustentação e centro de gravidade do travessão, e a distância $d$ é o menor dos braços da alavanca).

Os dois lados do travessão da alavanca devem ter-lhes apostas diversas distâncias iguais em relação à vertical que passa pelo fulcro.

Mais, para que haja equilíbrio de dois corpos numa alavanca, apenas é relevante o seu peso e a sua distância ao fulcro.

A lei da alavanca determina, tal como Arquimedes expressou com a proposição 6 suprarreferida, que ao colocar-se um número $N_A$ de corpos com o mesmo peso $P(P_A \equiv N_A P)$ atuando juntos num dos braços $d_A$ de uma alavanca e um número $N_B$ de corpos com o mesmo peso $P(P_B N_B P)$ atuando juntos no outro braço da alavanca $d_B$ e soltando-a do repouso na horizontal, ela permanece parada na horizontal quando $d_B/d_A = P_A/P_B = N_A/N_B$.

Este princípio determina que ao se colocar $N$ pesos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ de um dos lados da alavanca suspensos, respetivamente, nas distâncias $d_1, d_2, \ldots, d_N$ do plano vertical que passa pelo fulcro e $M$ pesos $P_{N+1}, P_{N+2}, \ldots, P_{N+M}$ do outro lado da alavanca suspensos, respetivamente, nas distâncias $d_{N+1}, d_{N+2}, \ldots, d_{N+M}$ do plano vertical que passa pelo fulcro e soltar-se do repouso a alavanca com esta na horizontal, a alavanca permanece em equilíbrio, verificando-se

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0} = \sum_{i=N+1}^{N+M} \frac{P_i}{P_0}\frac{d_i}{d_0}.$$

Para determinarmos algebricamente o centro de gravidade entre dois corpos, procedemos da seguinte forma:

Considere-se uma alavanca em equilíbrio estável[6] na horizontal sem a colocação de outros corpos. Suponha-se que essa alavanca tem uma haste homogénea tal que quando o fulcro fica ao longo de um plano vertical que divide a haste em duas partes com o mesmo comprimento, a alavanca permanece em equilíbrio ao ser solta do repouso, parada na horizontal. O centro de gravidade do travessão está verticalmente abaixo do fulcro, ou do ponto de sustentação.

Sabemos que este equilíbrio mantém-se caso sejam colocados dois corpos $A$ e $B$ suspensos em lados opostos da alavanca, desde que se verifique $d_B/d_A = P_A/P_B$, onde $d_A$ e $d_B$ são as distâncias horizontais entre os pontos de suspensão de $A$ e de $B$ até ao plano vertical passando pelo fulcro, sendo $P_A$ e $P_B$ os pesos de $A$ e de $B$, respetivamente. Isto significa que o centro de gravidade destes dois corpos também se encontra no plano vertical que passa pelo fulcro.

Tomemos um eixo horizontal, $x$, ao longo da haste da alavanca de comprimento $L$ e com origem (escolhida de forma arbitrária) em $x = 0$.

Suponha-se que as extremidades da haste da alavanca estão localizadas em $X_E$ e $X_D = X_E + L$, que colocamos os corpos $A$ e $B$ suspensos nas posições $X_A$ e $X_B$ do eixo $X$, respetivamente, e que a alavanca permanece em equilíbrio ao ser solta do repouso com os corpos $A$ e $B$

atuando nestas posições, conforme se pode observar na figura seguinte.

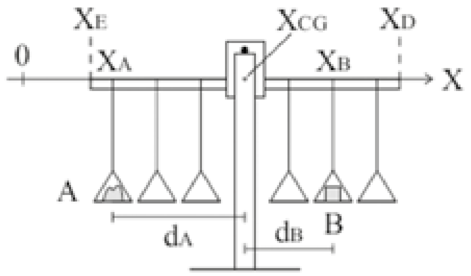


Figura 2: Encontrando a expressão algébrica
para o centro de gravidade.

O centro de gravidade deste sistema tem de estar sobre o plano vertical que passa pelo fulcro quando $d_B/d_A = P_A/P_B$, uma vez que a alavanca permanece em equilíbrio.

Represente-se a localização do centro de gravidade dos corpos $A$ e $B$ por $X_{CG}$.

Então, $d_A = X_{CG}X_A$ e $d_B = X_BX_{CG}$.

Pela lei da alavanca, a posição $X_{CG}$ do centro de gravidade deste sistema de dois corpos ao longo do eixo $X$ é dada por:

$$\frac{X_B - X_{CG}}{X_{CG} - X_A} = \frac{P_A}{P_B},$$

ou seja,

$$X_{CG} = \frac{P_A}{P_T}X_A + \frac{P_B}{P_T}X_B,$$

onde $P_T = P_A + P_B$ é o peso total dos dois corpos.

Facilmente se observa que quando $P_A = P_B$, $X_{CG}$ é o ponto médio entre $X_A$ e $X_B$.

Feitas as considerações anteriores, estamos em condições de deduzir, utilizando a lei da alavanca de Arquimedes, a fórmula para calcular o volume de uma esfera de raio $r$.

Pretende-se colocar os sólidos a seguir descritos suspensos nas extremidades de uma alavanca, como mostra a figura 3.

Para tal, comecemos por considerar os três sólidos de revolução seguintes: uma esfera gerada pela rotação do seu círculo maior de raio $r$ em torno do seu diâmetro, um cone de raio e altura iguais ao diâmetro da esfera e um cilindro de raio e altura iguais ao diâmetro da esfera cujo eixo coincide com o diâmetro da esfera, dispostos conforme a figura 4.

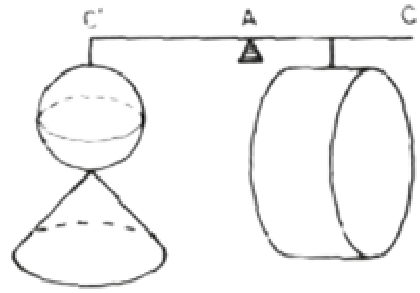


Figura 3: Alavanca com os sólidos suspensos
e com fulcro em $A$.

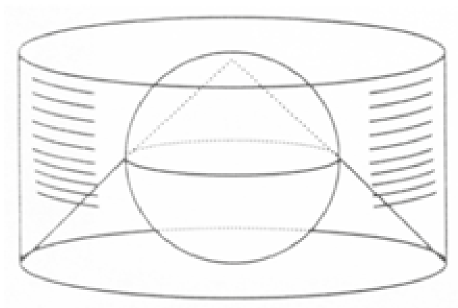

Figura 4: Posição dos sólidos.

Deixemos a cargo do leitor a justificação da importância da posição dos sólidos.

Tomemos o ponto de suspensão dos sólidos no vértice do cone. Então, os centros de gravidade dos três sólidos encontram-se numa mesma linha reta vertical.

Considere-se uma alavanca $HC$ de braços $HA$ e $AC$ em equilíbrio sem os sólidos suspensos, cujo comprimento dos braços é $2r$ e com fulcro no ponto médio de $HC$

[3] Entenda-se "grandezas a certas distâncias" como "grandezas cujos centros de gravidade estão às mesmas distâncias do fulcro."

[4] Entenda-se "grandezas equivalentes" como "grandezas com o mesmo peso."

[5] Este postulado permitia a Arquimedes substituir um corpo $A$ suspenso numa alavanca através do seu centro de gravidade localizado à distância horizontal $d$ do plano vertical passando pelo fulcro, por outro corpo $B$ conveniente que tivesse o mesmo peso que $A$, sem afetar o equilíbrio da alavanca, desde que o centro de gravidade deste corpo $B$ também estivesse pendurado na alavanca à mesma distância horizontal $d$ do plano vertical passando pelo fulcro.

[6] Equilíbrio estável é quando qualquer perturbação na posição do corpo fizer com que o centro de gravidade suba em relação à sua posição anterior.

(para que o plano vertical que passa pelo fulcro divida ao meio o travessão da alavanca). Seja $A$ o fulcro.

Comece-se por considerar que o fulcro se encontra no vértice do cone e, por comodidade, faça-se um corte transversal nos três sólidos passando pelo fulcro e suponha-se que os sólidos estão suspensos neste ponto de apoio[7]. Obtém-se a figura 5.

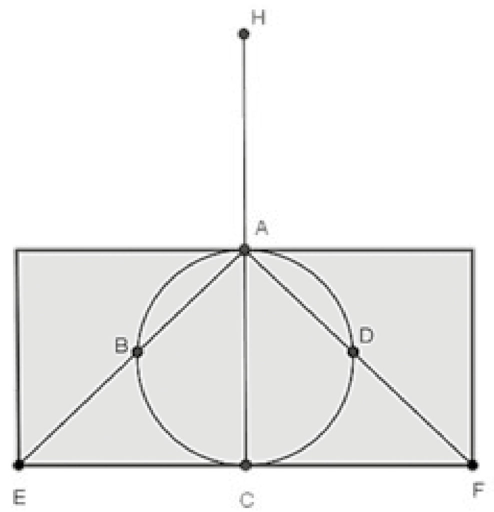


Figura 5: Secção transversal dos sólidos.

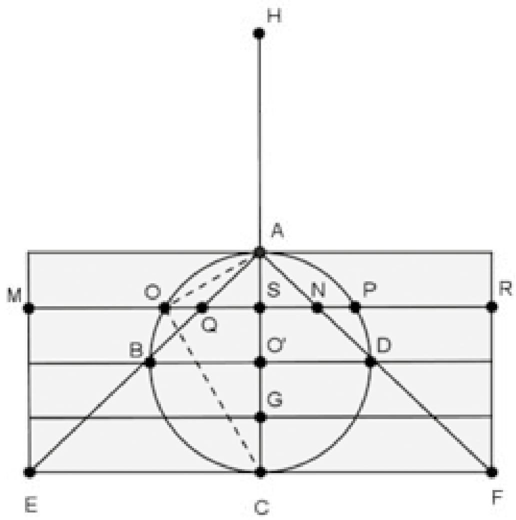


Figura 6: Designação de pontos da secção.

De seguida, através deste corte transversal, tentemos encontrar pontos de suspensão para os sólidos em ambos os braços da alavanca, que não perturbem o equilíbrio da mesma.

Para tal, façam-se três cortes nos sólidos segundo planos paralelos à base do cilindro, tais que o cilindro fique dividido em quatro partes iguais[8]. Tais planos cortam $AC$ em quatro partes iguais.

Denominem-se por $S$, $O'$ e $G$ os pontos de interseção dos planos com o eixo de rotação do cilindro.

Centremo-nos, agora, na secção transversal dos sólidos.

Designem-se pelas letras $O$ e $P$ os pontos de interseção do círculo com a reta $MR$ e $Q$ e $N$ os pontos de interseção da reta $MR$ com o triângulo $AEH$, assinalados na figura 6 e considere-se o triângulo $AOC$.

Como

$$\frac{AS}{AC} = \frac{AS}{AC} \cdot \frac{AC}{AC} =$$

$$= \frac{AS \cdot AC}{AC^2} = \frac{AS \cdot (AS + SC)}{AC^2} = \frac{AS^2 + AS \cdot SC}{AC^2}$$

e $AS \cdot SC = OS \cdot SP$, dado que $AC$ e $OP$ são cordas da circunferência que se intersetam em $S$, podemos afirmar que

$$\frac{AS}{AC} = \frac{AS^2 + OS \cdot SP}{AC^2} = \frac{AS^2 + OS^2}{AC^2}$$

e, portanto,

$$AS \cdot AC^2 = AC \cdot (AS^2 + OS^2). \tag{1}$$

Como, por construção, se sabe que $AH = AC = MS$, atendendo a que o triângulo $AQS$ é isósceles (porque os ângulos $\angle QAS$ e $\angle AQS$ têm as mesmas amplitudes, são ambos de 45°), tem-se que $QS = AS$.

Consequentemente, a igualdade (1) é equivalente a

$$AS \cdot MS^2 = AH \cdot (QS^2 + OS^2),$$

ou seja,

$$\frac{AS}{AH} = \frac{QS^2 + OS^2}{MS^2} \Leftrightarrow \frac{AS}{AH} = \frac{\pi \cdot (QS^2 + OS^2)}{\pi \cdot MS^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AS}{AH} = \frac{\pi \cdot QS^2 + \pi \cdot OS^2}{\pi \cdot MS^2}.$$

Assim, como $\pi \cdot QS^2, \pi \cdot OS^2$ e $\pi \cdot MS^2$ representam as áreas dos círculos de raios $QS$, $OS$ e $MS$, respetivamente, e como o equilíbrio de dois corpos se mantém, se as distâncias horizontais entre os pontos de suspensão destes forem inversamente proporcionais ao seu peso, podemos concluir que o equilíbrio da alavanca não é perturbado, se colocarmos os círculos de raios $QS$ e $OS$ suspensos na extremidade $H$ da alavanca e o círculo de raio $MS$ suspenso no ponto $S$ pertencente ao outro braço da alavanca, ou seja, a uma distância horizontal do fulcro igual a $r/2$.

Tendo em conta que todos os resultados deduzidos através da secção transversal mantêm as mesmas propriedades se considerarmos $S$ a variar de $A$ até $O'$, tomemos o cilindro como união infinita dos círculos de raio igual a $MS$, o cone como união infinita dos círculos de raio igual a $QS$ e a semiesfera como união infinita dos círculos de raio igual a $OS$, com $S$ a variar de $A$ até $O'$.[9]

Podemos concluir que o equilíbrio da alavanca não é perturbado se remontássemos os sólidos e os colocássemos suspensos no travessão da alavanca da seguinte forma: a semiesfera e o cone na extremidade $H$ da alavanca e o cilindro no ponto de suspensão $S$ situado no outro braço da alavanca.

Designem-se por $V_S$, $V_C$ e $V_i$ os volumes da semiesfera, do cone e do cilindro, respetivamente.

Como a alavanca se mantém equilibrada com a suspensão dos sólidos, verifica-se a relação $\frac{V_c+V_s}{V_i} = \frac{AS}{AH}$ ou seja,

$$\frac{V_c + V_s}{V_i} = \frac{r}{2}2r \Leftrightarrow \frac{V_c + V_s}{V_i} = \frac{1}{4}. \tag{2}$$

Atendendo a que $V_c = 1/3 \cdot \pi r^2 \cdot r$ e $V_i = (2r)^2 \pi r$, substituindo em (2), vem:

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r + V_s}{(2r)^2 \cdot \pi r} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi r^3 + V_s = \frac{(2r)^2 \cdot \pi r}{4}$$

$$\Leftrightarrow V_s = \pi r^3 - \frac{1}{3} \cdot \pi r^3 \Leftrightarrow V_s = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3.$$

Como o volume da esfera inicial é o dobro do volume desta semiesfera, podemos concluir que o volume da esfera inicial é $4/3 \cdot \pi r^3$.

## REFERÊNCIAS


[1] A. K. T. Assis. *Archimedes, the Center of Gravity, and the First Law of Mechanics*. Apeiron, Montreal, 2008.

[2] G. Ávila. "Arquimedes, a esfera e o cilindro", *Revista do Professor de Matemática* 10, 2010.

[3] Archimedes. *The Works of Archimedes*. Dover, New York, 2002. (Translated and edited in modern notation by T. L. Heath.)

[4] A.Silva. *Arquimedes e o volume da esfera*. Belo Horizonte, 2005.



SOBRE A AUTORA

**Fátima Vinagre** é professora de Matemática na Escola Secundária da Azambuja, licenciada em Matemática - Ramo Educacional, pela FCT-UNL, e mestre em Matemática – Grupos Cristalográficos Tridimensionais, pela Universidade de Aveiro. Exerceu funções de professora auxiliar de Álgebra Linear e Geometria Analítica e Análise Matemática I na FCT-UNL, foi responsável pela coordenação de Cursos de Especialização Tecnológica, presidente de um Conselho Técnico-Pedagógico, orientadora de estágios – profissionalização em serviço, avaliadora de pessoal docente e não docente, subdiretora e vice-presidente da Escola Secundária de Montejunto, entre outras funções.


[7] Desta forma temos a garantia de que o sistema continua em equilíbrio.

[8] O cilindro é dividido em partes iguais, para que tenham pesos iguais.

[9] Tem em conta os procedimentos adotados por Arquimedes. [2].