Óscar Felgueiras
Universidade
do Porto
olfelgue@fc.up.pt

NÚMEROS DE BERNOULLI

Uma sequência de números criada para sintetizar somas finitas, mas que deu origem a uma ponte paradigmática com as somas infinitas, acabando por ocupar um lugar de destaque na matemática moderna.

Historicamente, os números de Bernoulli surgiram na obra póstuma *Ars Conjectandi*[1], em 1713, do suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), na tentativa de descrever uma forma de calcular a soma de potências de inteiros consecutivos

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

para inteiros $n \geq 1$ e $k \geq 0$. Curiosamente e por coincidência, o japonês Takakazu Seki (1642-1708) também definiu os mesmos números de Bernoulli no seu livro póstumo *Katsuyo Sanpo*[2], em 1712. Tendo em conta as circunstâncias, este é um caso em que não haverá grandes dúvidas quanto à descoberta independente e quase simultânea de um mesmo conceito.

O interesse pela questão da determinação de fórmulas para somas de potências de inteiros consecutivos tem mais de dois milénios. Os pitagóricos no século VI a.C. já conheciam a fórmula quando $k = 1$,

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

e Arquimedes (287 a.C.-212 a.C) tinha determinado a regra para $k = 2$,

$$\begin{aligned} S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \end{aligned}$$

No ano de 499, o indiano Aryabhata publicou no seu livro *Aryabhatiya*, sem qualquer prova ou justificação, aquela que é a primeira fórmula explícita para o caso $k = 3$,

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Muitos outros matemáticos se dedicaram a este assunto, como pode ser consultado no artigo *online* de Janet Beery[3], que contém informação histórica bastante detalhada relativa aos principais intervenientes e métodos seguidos[4]. Em particular sobre Pascal, que no seu *Traité du triangle arithmétique*[5], em 1654, prova de forma simples, usando a expansão binomial, que,

$$\begin{aligned} (n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{i=1}^{n} ((i+1)^{k+1} - i^{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} i^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n)\,, \end{aligned}$$

permitindo obter a fórmula recursiva,

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \left((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \right),$$

$k \geq 1$ e mostrar indutivamente que $S_k(n)$ é um polinómio em n de grau $k+1$.

Bernoulli estuda estes polinómios e acaba por descobrir um padrão ao escrever os dez primeiros:

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2\\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n\\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2\\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n\\
S_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2\\
S_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n.
\end{aligned}
$$

Ele observa que se pode exprimir $S_k(n)$ a partir da sequência de coeficientes de n em $S_k(n)$ e são estes os números de Bernoulli originais[6]! Esta sequência denota-se habitualmente por B_k cujos primeiros valores se apresentam na tabela 1. A fórmula por ele apresentada é a seguinte:

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}n^{k+1}+\frac{1}{2}n^k+\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i},\quad k\geq 1. \tag{1}$$

Na verdade, Bernoulli apenas destaca a sequência B_{2m} para $m\geq 1$, usando letras maiúsculas $A=1/6$, $B=-1/30$, $C=1/42$, $D=-1/30,\ldots$ para denotar os seus elementos, dado que são os únicos não nulos que ocorrem em (1). Ele determina os valores de B_k de forma recursiva a partir da equação obtida ao se substituir n por 1, ou seja,

$$1=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}+\sum_{i=2}^{k}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}B_i,\quad k\geq 1. \tag{2}$$

Além disso, conclui, afirmando que com estas fórmulas descobriu (corretamente), em menos de um quarto de hora, que a soma das décimas potências dos mil primeiros números a partir da unidade é

$$91409924241424243424241924242500.$$

Note-se que as fórmulas (1) e (2) podem ser simplificadas, obtendo-se, respetivamente

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i},\quad k\geq 1$$

e

$$k+1=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i,\quad k\geq 1.$$

Por seu lado, Seki apresenta estas mesmas fórmulas e define toda a sequência B_k para $k\geq 0$[7].

Euler fornece uma prova completa da fórmula (1) para a soma de potências, na sua obra *Institutiones Calculi Differentialis*[8] (1755), e batiza aí os números de Bernoulli. Adicionalmente, apresenta uma ligação fascinante destes números com séries infinitas, nomeadamente através da demonstração de uma das suas célebres fórmulas,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{2n}}=\frac{|B_{2n}|\,2^{2n-1}}{(2n)!}\pi^{2n}.$$

Desde então, estes números tornaram-se uma presença incontornável em várias áreas da matemática, tais como a teoria dos números e a geometria diferencial. Basta dizer que em 2007 havia uma bibliografia sobre números de Bernoulli contabilizando perto de 3000 entradas[9]!

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_k	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

Tabela 1.

[1] *A arte de conjeturar.*

[2] *Fundamentos da Arte do Cálculo.*

[3] *http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers.*

[4] Para mais pormenores, ver A. Knoebel, R. Laubenbacherj, J. Lodder, D. Pengelley, *Mathematical Masterpieces - Further Chronicles by the Explorers,* Springer, 2007.

[5] Tratado do triângulo aritmético.

[6] Existem atualmente muitos autores que definem $B_1=-1/2$ devido a assumirem que $S_k(n)=0^k+1^k+\cdots+(n-1)^k$. Nesta convenção todos os restantes valores $B_k (k\neq 1)$ permanecem iguais e dão origem a fórmulas análogas. Ver *http://luschny.de/math/zeta/The-Bernoulli-Manifesto.html* para uma discussão interessante sobre o assunto.

[7] Ver T. Arakawa, M. Kaneko, T. Ibukiyama, *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer, 2014, p. 3, onde também se encontra a prova da fórmula (1).

[8] Fundamentos de cálculo diferencial.

[9] *http://www.mscs.dal.ca/~dilcher/bernoulli.html.*