

Harmónicas esféricas

por Rui João Baptista Soares

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Introdução

A necessidade de expandir uma função $F(\theta, \lambda)$ em série de harmónicas esféricas de superfície levou-nos às considerações que a seguir apresentamos.

Tal desenvolvimento permite aos especialistas uma interpretação dos modelos criados e a sua conseqüente aceitação ou negação de acordo com as realidades.

1.1. Campos de vectores

Uma região do espaço diz-se um *campo de vectores* se a cada ponto dessa região corresponder um vector — vector campo — com o ponto de aplicação nesse ponto e de componentes

$$1) \quad X_i = X_i(x, y, z) \quad i = 1, 2, 3.$$

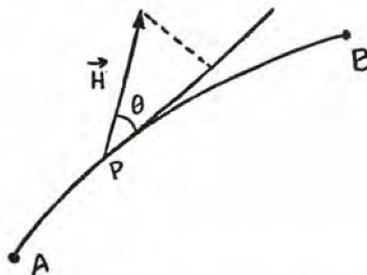
Sempre que no campo de vectores exista uma função $V(x, y, z)$ tal que

$$2) \quad X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3$$

diz-se que ele admite um potencial.

O significado da função potencial é simples: ao pretendermos calcular o trabalho efectuado pelo campo no deslocamento AB , dW é uma diferencial total pelo que: a diferença de potencial entre os pontos A e B é independente do percurso e representa o trabalho efectuado pelo vector campo quando

o seu ponto de aplicação se desloca de A a B .



$$3) \quad \int_{AB} dW = W_B - W_A.$$

Num campo de vectores, toda a superfície em que se verifique

$$4) \quad V(x, y, z) = \text{constante}$$

diz-se *superfície equipotencial*.

Convém desde já salientar algumas propriedades importantes das superfícies equipotenciais:

- P_1 : o vector campo num dado ponto é normal à superfície equipotencial que passa por esse ponto;
- P_2 : a derivada do potencial segundo a normal a uma superfície equipotencial é igual ao vector campo;
- P_3 : os afastamentos de duas superfícies equipotenciais em dois pontos diferentes são inversamente proporcionais aos valores do vector campo nesses pontos.

1. 2. Fórmula de Ostogradsky; identidades de Green

Consideremos uma superfície fechada S limitando um volume V , e três funções $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$; representando por l, m, n os cossenos directores da normal externa à superfície e por dS o elemento de área sobre S teremos

$$\begin{aligned} I_3 &= \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz \\ &= \iint_D dx dy \int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \\ &= \iint_D [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)] dx dy \\ &= \iint_S R n dS \end{aligned}$$

em que D é a projecção de S em XOY ; analogamente se estabeleciam as igualdades

$$I_2 = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q m dS$$

$$I_1 = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P l dS.$$

Somando as três igualdades anteriores obtém-se a expressão cartesiana da fórmula de OSTOGRADSKY

$$\begin{aligned} 5) \quad & \iiint_V \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right] dV \\ &= \iint_S [Pl + Qm + Rn] dS \end{aligned}$$

Consideremos duas funções $V_1(x, y, z)$, $V_2(x, y, z)$ admitindo primeiras derivadas

em ordem a x, y, z . Fazendo na fórmula de OSTOGRADSKY

$$P = V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x}; \quad Q = V_2 \frac{\partial V_1}{\partial y}; \quad R = V_2 \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

resulta

$$\begin{aligned} 6) \quad & \iiint_V \left[\frac{\partial V_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial V_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial z} \right] dV \\ &+ \iint_S V_2 \nabla^2 V_1 dV = \iint_S V_2 \frac{dV_1}{dn} dS \end{aligned}$$

que constitui a 1.^a identidade de Green.

Por troca de V_1 e V_2 obtinha-se uma expressão análoga a 6); subtraindo-as ordenadamente resulta

$$\begin{aligned} 7) \quad & \iiint_V [V_1 \nabla^2 V_2 - V_2 \nabla^2 V_1] dV \\ &= \iint_S \left[V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS \end{aligned}$$

que traduz a 2.^a identidade de Green.

Considere-se um ponto $P_0 \in S$; seja V_1 uma função harmónica em S e façamos $V_2 = \frac{1}{d}$. Por aplicação da 2.^a identidade de Green se vê que o integral é nulo excepto em P_0 .

Isolando P_0 com o volume elementar facilmente se vê que

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS \\ &= \iint_S \left[V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS \end{aligned}$$

$$= \iint_{\Sigma} V_1 \frac{dV_2}{dn} dS = -\frac{1}{R^2} \iint_{\Sigma} V_1 dS$$

$$= 4\pi (V_1)_{\Sigma}$$

donde

8)

$$(V_1)_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS.$$

Como o segundo membro de 8) é independente de R podemos concluir que

1. o valor médio de uma função harmónica sobre uma esfera é independente do raio;
2. o valor médio de uma função harmónica sobre uma esfera é igual ao seu valor central.

A afirmação 2. permite-nos escrever

9) $(V_1)_P = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[V_1 \frac{dV_2}{dn} - V_2 \frac{dV_1}{dn} \right] dS$

que é a 3.^a identidade de Green.

As expressões 5), 6), 7) e 9) podem estender-se ao espaço exterior de S desde que as funções P , Q , e R satisfaçam as condições, ditas de regularidade no infinito

10) $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 P = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 Q = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 R = 0.$

Estas condições são verificadas desde que as funções V_1 e V_2 sejam regulares no infinito, isto é, quando

11) ρV_i e $\rho^2 \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ $i = 1, 2$
 $j = 1, 2, 3$

se mantenham finitas quando $\rho \rightarrow \infty$.

1. 3. Coordenadas ortogonais generalizadas

Consideremos um sistema de eixos $OXYZ$ ortogonais e sejam x_i as coordenadas de um ponto genérico; façamos

12) $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad i = 1, 2, 3$

sendo x_i funções unívocas dos q_j ; diremos então que os q_j constituem um sistema de coordenadas generalizadas.

Para um deslocamento elementar ter-se-á

13) $dx_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot dq_j \quad i = 1, 2, 3.$

Definindo R_j e S_{ij} pelas expressões

14) $R_j^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2 \quad j = 1, 2, 3$

15) $S_{ij} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad i \neq j \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix}$

podemos escrever a expressão do elemento linear em coordenadas reais como se segue

16) $ds^2 = \sum_{j=1}^3 R_j^2 \cdot dq_j^2$
 $+ 2 \sum_{i \neq j} S_{ij} dq_i dq_j \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix}$

Para determinarmos os cosenos directores do elemento ds_j sobre a linha s_j devemos atender a 13) e 16).

17) $\frac{dx_i}{ds_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{1}{R_j} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix}$

O sistema de coordenadas generalizadas diz-se *ortogonal* quando as linhas s_j forem

perpendiculares duas a duas o que se traduz pelo anulamento das expressões 15).

Considerando, a partir deste momento, somente sistemas ortogonais, teremos sucessivamente os elementos lineares ds_j , os elementos de área dS_k e o elemento de volume dV dados pelas expressões

$$18) \quad ds_j = R_j \cdot dq_j \quad j = 1, 2, 3$$

$$19) \quad dS_k = R_i R_j dq_i dq_j \quad i, j \neq k = 1, 2, 3$$

$$20) \quad dV = R_1 R_2 R_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Dada uma superfície fechada S e uma função potencial V poder-se-ia deduzir a expressão

$$21) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{R_1 R_2 R_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \cdot \left[\frac{R_j R_k}{R_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial q_i} \right] \quad j, k \neq i = 1, 2, 3$$

do laplaciano da função V em coordenadas generalizadas ortogonais.

1. 4. Equação de Laplace em coordenadas esféricas

Representando por (r, θ, λ) as coordenadas esféricas

$$22) \quad \begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta \cos \lambda \\ y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \lambda \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

vem sucessivamente

$$23) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\lambda^2$$

$$24) \quad \nabla^2 V = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) \right]$$

donde

$$25) \quad r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0.$$

As soluções desta equação, numa certa região do espaço, dizem-se funções harmônicas nessa região; convém salientar, pela necessidade que adiante teremos, uma propriedade de tais funções.

P1. Se uma função V for harmônica numa região interior a uma superfície S tem-se

$$26) \quad \iiint_V \nabla^2 V dV = 0 = \iint_S \frac{dV}{dn} dS.$$

Suponhamos que a função V , solução da equação de Laplace, é da forma

$$27) \quad V = f_1(r) \cdot f_2(\theta) \cdot f_3(\lambda) = f_1(r) \cdot F(\theta, \lambda).$$

Substituindo na expressão 25) resulta

$$28) \quad r^2 f_1'' F + 2r f_1' F + f_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + f_1 \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + f_1 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = 0$$

ou

$$\frac{1}{f_1} [r^2 f_1'' + 2r f_1'] + \frac{1}{F} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \right] = 0$$

donde

$$29) \quad r^2 f_1'' + 2r f_1' - c_1 f_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} + \cotg \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} + c_1 F = 0$$

$$f_2'' \cdot f_3 + \cotg \theta \cdot f_2' f_3 + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \cdot f_2 f_3'' + c_1 f_2 f_3 = 0$$

$$\frac{\text{sen } \theta}{f_2} [\text{sen } \theta \cdot f_2'' + \cos \theta \cdot f_2' + c_1 \text{sen } \theta \cdot f_2] + \frac{f_3''}{f_3} = 0$$

e portanto

$$30) \quad f_3'' + c_2 f_3 = 0$$

$$31) \quad \text{sen } \theta \cdot f_2'' + \cos \theta \cdot f_2' + c_1 \text{sen } \theta \cdot f_2 - c_2 \frac{f_2}{\text{sen } \theta} = 0$$

façamos

$$c_1 = n(n+1) \quad p = \cos \theta \\ c_2 = m$$

Nestas condições as soluções das equações 29), 30) e 31) são respectivamente

$$f_1(r) = r^n \quad \text{ou} \quad f_1(r) = r^{-(n+1)}$$

$$f_2(\theta) = \text{sen}^m \theta \cdot \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^{m+n}}{d p^{m+n}} (p^2 - 1)^n$$

$$f_3(\lambda) = \cos m \lambda \quad \text{ou} \quad f_3(\lambda) = \text{sen } m \lambda.$$

1. 5. Funções associadas de Legendre; polinómios de Legendre; tesserais e zonais; algumas propriedades

As soluções f_2 é usual chamar-se *funções associadas de Legendre* e representam-se por P_{nm} em que o índice n é o grau e o índice m é a ordem da função.

Chama-se *polinómio de Legendre* de grau n , e representa-se por P_n à função associada de Legendre de grau n e ordem zero.

É pois uma função de θ definida por

$$32) \quad P_n = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d p^n} (p^2 - 1)^n$$

e cuja expressão explícita é

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} l_{n,m} x^{n-2m}$$

com

$$l_{n,m} = (-1)^m \frac{[2(n-m)]!}{2^n (n-m)! m! (n-2m)!}.$$

Entre estes coeficientes vale a seguinte fórmula de recorrência (tipo triângulo PASCAL)

$$l_{n+1,m+1} = \frac{1}{n+1} [(2n-2m-1)l_{n,m+1} - (n-2m)l_{n,m}].$$

Todavia para o cálculo destes coeficientes utilizamos a igualdade

$$l_{n,m} = \frac{1 \cdot 3 \dots [2(n-m)-1]}{n!} \cdot h_{n,m}$$

por se dispôr de uma subrotina para o cálculo dos $h_{n,m}$.

É óbvio que $\frac{d^i}{d p^i} (p^2 - 1)^n$ tem $(2n-i)$ raízes; $(n-i)$ serão iguais a -1 ; $(n-i)$ serão iguais a $+1$ e i estarão compreendidas entre -1 e $+1$ sendo todas distintas pelo que:

P_1 : o polinómio de LEGENDRE de grau n tem n raízes distintas no intervalo $(-1, 1)$; consequentemente $\frac{d^m}{d p^m} P_n$ tem $(n-m)$ raízes distintas no mesmo intervalo.

Dado que P_{nm} são soluções de 31), quando $m = 0$ podemos escrevê-la na forma

$$(1 - p^2) P_n'' - 2p P_n' + n(n+1) P_n = 0.$$

Derivando $(j-1)$ vezes em ordem a p obtemos

$$(1 - p^2) P_n^{(j+1)} - 2pj P_n^{(j)} + (n+j)(n-j+1) P_n^{(j-1)} = 0$$

ou ainda

$$P_m^{(j-1)} \left\{ \frac{d}{dp} [(1 - p^2)^j P_n^{(j)}] \right\} \\ = - (n+j)(n-j+1) (1 - p^2)^{j-1} \cdot P_m^{(j-1)} P_n^{(j-1)}.$$

Definindo

$$G_j = \int_{-1}^1 (1 - p^2)^j P_m^{(j)} \cdot P_n^{(j)} dp$$

obtém-se

$$G_j = [(1 - p^2)^j \cdot P_n^{(j)} P_m^{(j-1)}]_{-1}^1 \\ - \int_{-1}^1 P_m^{(j-1)} \left\{ \frac{d}{dp} [(1 - p^2)^j P_n^{(j)}] \right\} dp \\ = (n+j)(n-j+1) \int_{-1}^1 (1 - p^2)^{j-1} P_m^{(j-1)} P_n^{(j-1)} dp \\ = (n+j)(n-j+1) G_{j-1}.$$

Deste resultado se deduz

$$33) \quad G_j = \frac{(n+j)!}{(n-j)!} \cdot G_0.$$

Sabendo que

$$G_0 = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

podemos dizer

P_2 : os polinômios de LEGENDRE verificam as igualdades

$$G_j = \int_{-1}^1 (1 - p^2)^j P_m^{(j)} P_n^{(j)} dp \\ = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!} & m = n. \end{cases}$$

É evidente que, sendo

$$P_{k+1}' - P_{k-1}' = (2k+1) P_k,$$

se obtém, fixando sucessivamente $k=1, 2, \dots, \dots, n$, a seguinte propriedade dos polinômios de LEGENDRE

$$P_3: \quad P_{n+1}' + P_n' = \sum_{k=0}^n (2k+1) P_k.$$

Chamam-se *tesseractais* de grau n e ordem m às funções de θ e λ definidas por

$$34) \quad R_{nm} = \cos m\lambda \cdot P_{nm} \\ S_{nm} = \sin m\lambda \cdot P_{nm}$$

donde resulta que para $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ as *tesseractais* se anulam em $2m$ pontos igualmente espaçados; atendendo à propriedade P_1 pode dizer-se que para $0 < \theta < 2\pi$ as *tesseractais* se anulam em $n-m$ pontos distintos; para valores $\theta=0$ ou $\theta=\pi$ as *tesseractais* são nulas.

É fácil ver, adoptando uma definição adequada de produto interno, que as *tesseractais* verificam as seguintes relações de ortogonalidade

$$35. 1) \quad \iint R_{nm} S_{ij} d\sigma = 0 \quad \text{sempre}$$

$$35. 2) \quad \iint R_{nm} R_{ij} d\sigma = 0 \quad \begin{cases} m \neq j \\ \text{ou} \\ n \neq i \end{cases}$$

$$35. 3) \quad \iint S_{nm} S_{ij} d\sigma = 0 \quad \begin{cases} m \neq j \\ \text{ou} \\ n \neq i \end{cases}$$

$$35.4) \int \int R_{n0}^2 d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} = 2\pi \cdot G_0$$

$$35.5) \int \int R_{nm}^2 d\sigma = \int \int S_{nm}^2 d\sigma \\ = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(m+n)!}{(n-m)!} = \pi \cdot G_m \quad m \neq 0.$$

Zonal é uma tesseral de ordem zero; de 34) resulta que as zonais $S_{n0} = 0$ para todo o n , enquanto as zonais $R_{n0} = P_{n0} = P_n$ se identificam com os polinómios de LEGENDRE.

Da representação integral

$$36) P_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (p + i\sqrt{1-p^2} \cos \omega)^n d\omega$$

se conclui a seguinte propriedade

P_4 : os polinómios de LEGENDRE verificam

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0 \quad \text{se } |p| \neq 1.$$

Suponhamos que se pretende obter o desenvolvimento em série da função harmónica $\frac{1}{d}$ segundo as potências $\frac{r_1}{r_2}$.

Desde que $\left| \frac{r_1}{r_2} \right| < 1$ os desenvolvimentos que vamos obter são absolutamente convergentes e podemos trabalhar seguramente; teremos sucessivamente:

$$37) \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha}} \\ = \frac{1}{r_2} \left[\left(1 - \frac{r_1}{r_2} e^{i\alpha} \right) \left(1 - \frac{r_1}{r_2} e^{-i\alpha} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ = \frac{1}{r_2} \left[1 + \frac{r_1}{r_2} \cos \alpha + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \cos 2\alpha + \frac{1}{4} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \left(\frac{5}{8} \cos 3\alpha + \frac{3}{8} \cos \alpha \right) + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{r_2} \left[P_0 + \frac{r_1}{r_2} P_1(\cos \alpha) + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 P_2(\cos \alpha) \right. \\ \left. + \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 P_3(\cos \alpha) + \dots \right] \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r_2^{n+1}} P_n(\cos \alpha).$$

Com base neste resultado facilmente se determinava o valor de G_0 .

Sendo $(r_1, \theta_1, \lambda_1)$ e $(r_2, \theta_2, \lambda_2)$ as coordenadas esféricas dos pontos P_1, P_2 teremos

$$38) \quad \cos \alpha = \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \\ + \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)$$

e portanto

$$39) \quad P_1(\cos \alpha) = P_1(\cos \theta_1) \cdot P_1(\cos \theta_2) \\ + R_{11}(\theta_1, \lambda_1) \cdot R_{11}(\theta_2, \lambda_2) \\ + S_{11}(\theta_1, \lambda_1) \cdot S_{11}(\theta_2, \lambda_2).$$

Atendendo à expressão de $P_2(\cos \alpha)$ resulta

$$40) \quad P_2(\cos \alpha) = P_2(\cos \theta_1) \cdot P_2(\cos \theta_2) \\ + \frac{1}{3} [R_{21}(\theta_1, \lambda_1) \cdot R_{21}(\theta_2, \lambda_2) + S_{21}(\theta_1, \lambda_1) \cdot \\ \cdot S_{21}(\theta_2, \lambda_2)] + \frac{1}{12} [R_{22}(\theta_1, \lambda_1) \cdot R_{22}(\theta_2, \lambda_2) \\ + S_{22}(\theta_1, \lambda_1) \cdot S_{22}(\theta_2, \lambda_2)].$$

De um modo geral obtém-se a fórmula de decomposição

$$41) \quad P_n(\cos \alpha) = P_n(\cos \theta_1) \cdot P_n(\cos \theta_2) \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [R_{nm}(\theta_1, \lambda_1) \cdot \\ \cdot R_{nm}(\theta_2, \lambda_2) + S_{nm}(\theta_1, \lambda_1) \cdot S_{nm}(\theta_2, \lambda_2)].$$

1. 6. Desenvolvimento de uma função em série de harmônicas esféricas de superfície; cálculo dos coeficientes e convergência da série

Por *harmônica de superfície* de grau n , entende-se a função $F_n(\theta, \lambda)$ definida por

$$42) \quad F_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} R_{nm} + b_{nm} S_{nm})$$

onde a_{nm}, b_{nm} são constantes; porque S_{n0} não existe temos que determinar $(2n+1)$ constantes.

Designa-se por *harmônica sólida* à função estendida a todo o espaço $V(r, \theta, \lambda)$ definida por

$$43) \quad V = r^n F_n(\theta, \lambda) \quad \text{ou} \quad V = r^{-(n+1)} F_n(\theta, \lambda)$$

e que são soluções da equação de Laplace.

Pretende-se desenvolver uma função $F(\theta, \lambda)$ em série de harmônicas de superfície; para tal teremos de calcular os coeficientes a_{nm}, b_{nm} da expressão

$$44) \quad F(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\theta, \lambda) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} R_{nm} + b_{nm} S_{nm})$$

o que se faz atendendo às relações de ortogonalidade estabelecidas para as tesserais; assim

$$45.1) \quad a_{n0} = \frac{1}{2\pi G_0} \iint F(\theta, \lambda) \cdot P_n(\cos \theta) d\sigma$$

$$45.2) \quad a_{nm} = \frac{1}{\pi G_m} \iint F(\theta, \lambda) R_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma$$

$$45.3) \quad b_{nm} = \frac{1}{\pi G_m} \iint F(\theta, \lambda) S_{nm}(\theta, \lambda) d\sigma \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 45.2) \\ 45.3) \end{matrix}} \right\} m \neq 0.$$

Calculados os coeficientes ficamos a conhecer $F_n(\theta, \lambda)$; todavia podíamos obter $F_n(\theta, \lambda)$ a partir da fórmula

$$46) \quad F_n(\theta, \lambda) = \frac{1}{2\pi G_0} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{2\pi} F(\theta, \lambda) P_n(\cos \alpha) \sin \theta d\sigma.$$

Comparando as expressões 42) e 46) resulta que as situações são diferentes; com efeito dada uma certa função $F(\theta, \lambda)$ vamos considerar o seu desenvolvimento em torno de um valor médio; fazemos as observações e deduzem-se os coeficientes a_{nm}, b_{nm} após o que substituímos no modelo criado obtendo-se novos valores para comparação; dos resíduos resultantes surge a interpretação do modelo escolhido bem como uma melhor determinação dos coeficientes por técnicas apropriadas. Deverá notar-se que quanto mais pontos forem observados tanto melhor será a informação colhida.

Para além do que se acaba de dizer urge assegurar a convergência da série indicada em 44), sem o que não teria sentido o cálculo dos coeficientes.

Considere-se a soma

$$47) \quad \mathcal{F}_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^m F_n(\theta, \lambda).$$

O nosso problema consiste em demonstrar que

$$48) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_m(\theta, \lambda) = F(\theta, \lambda).$$

Considere-se um sistema de coordenadas $(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$ com o eixo passando por P_1 ; nestas condições

$$\mathcal{F}_m(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{4\pi} \iint F(\theta, \lambda) P_n(\cos \alpha) \sin \theta d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^m \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(\cos \alpha) dp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\bar{\theta}, \bar{\lambda}) d\bar{\lambda} \\
&= \sum_{n=0}^m \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (2n+1) P_n(\cos \alpha) G_0(p) dp \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (P'_{n+1} + P'_n) G_0(p) dp \\
&= G_0(+1) - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (P_{n+1} + P_n) G'_0(p) dp \\
&= F(\theta, \lambda)|_{\alpha=0} + R_m.
\end{aligned}$$

Do resultado obtido em P_4 é evidente a nossa tese.

Deve reparar-se que $G_0(p)$ é precisamente

o valor médio de $F(\theta, \lambda)$ sobre um círculo de centro em P_1 .

BIBLIOGRAFIA

- AFONSO, JOSÉ NUNO DO VALE MONTEIRO DE SOUSA, *Geodesia dinâmica. Determinação da figura da Terra por métodos gravimétricos* «Cadernos Técnicos e de Informação», Instituto Geográfico e Cadastral, Lisboa, **16**, 1968, 118 p.
- BYERLY, WILLIAM ELWOOD, *An elementary treatise on Fourier's series and spherical, cylindrical, and ellipsoidal harmonics*. 1 vol., Boston, Ginn & Co., 1893, IX + 287 p.
- PEIXOTO, JOSÉ PINTO; et. al. *Harmonic analysis of the topography along parallels of the earth*. Journal of Geophysical Research, Baltimore, 69 (8), 1964, p. 1501-1505.
- SOARES, RUI JOÃO BAPTISTA, *Relações entre os coeficientes dos polinómios $T_n(x)$ e $P_n(x)$ e os coeficientes dos polinómios $He_n(x)$. Aplicação ao cálculo automático*. «Gaz. de Matemática», Lisboa, XXXIV-V (129-132), 1973-74, p. 17-20.