Sobre sistemas-m e análogos em semi-anéis

por A. J. Antunes Monteiro
Lisboa

1. Sistemas-m e sistemas-p

Tome-se um conjunto X, parte de um semi-anel $\mathfrak{S}$ e ponha-se, para cada par $(a, b) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, $\Omega_{a,b}(X) = \{x \in X \mid axb \in X\}$. Então, suposto $\emptyset \neq M \subseteq \mathfrak{S}$, M será um sistema-m se e só se, tomados $a, b \in M$, for sempre $\Omega_{a,b}(M) \neq \emptyset$; e será $P \neq \emptyset$ um sistema-p se e só se, tomado $a \in P$, for $\Omega_{a,a}(P) \neq \emptyset$.

Proposição 1: *Se* $X \subseteq \mathfrak{S}$ *é um subsemigrupo de* $(\mathfrak{S}, +)$, *o mesmo acontece a* $\Omega_{a,b}(X)$, *quaisquer que sejam* $a, b \in \mathfrak{S}$. Com efeito, tomados $x, y \in \Omega_{a,b}(X)$, de $axb, ayb \in X$ conclui-se que $a(x+y)b = axb + ayb \in X$ e, portanto, que $x + y \in \Omega_{a,b}(X)$.

Proposição 2: *Suposto* M *um sistema*-m, $\Omega_{a,b}(M)$ *é um sistema*-m, *quaisquer que sejam* $a, b \in \mathfrak{S}$. *Analogamente, se* P *é um sistema*-p, $\Omega_{a,a}(P)$ *é um sistema*-p. Demonstraremos apenas a primeira afirmação. Sejam $x, y \in \Omega_{a,b}(M)$. De axb, $ayb \in B$, conclui-se que, para algum $z \in \mathfrak{S}$, se tem $(axb)z(ayb) \in M$. Mas $(axb)z(ayb) = a(xbzay)b$, pelo que $x(bza)y \in \Omega_{a,b}(M)$, o que demonstra a afirmação. [Nota: a proposição é válida, mesmo que o sistema-m ou o sistema-p se suponham vazios, porque então $\Omega_{a,b}(\emptyset) = \Omega_{a,a}(\emptyset) = \emptyset$].

Observações: *i*) Se $\mathfrak{a} \neq \emptyset$ é um ideal de $\mathfrak{S}$, e se $a \in \mathfrak{a}$ (ou se $b \in \mathfrak{a}$), tem-se $\Omega_{a,b}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}$.

ii) O ideal $\mathfrak{a}$ é semi-primo se e só se $a \in \mathfrak{a}$ equivale a $\Omega_{a,a}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}$. De modo análogo, $\mathfrak{a}$ é primo se e só se $\Omega_{a,b}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{S}$ equivale a $a \in \mathfrak{a}$ ou $b \in \mathfrak{a}$. A este respeito, veja-se [1].

iii) Se X é um subsemigrupo de $(\mathfrak{S}, \cdot)$, vale a inclusão: $X \subseteq \bigcap_{a,b \in X} \Omega_{a,b}(X)$.

iv) Se designarmos por X_3 o conjunto dos produtos de três elementos de X, vemos que a inclusão $X_3 \subseteq X$ é equivalente à inclusão $X \subseteq \bigcap_{a,b \in X} \Omega_{a,b}(X)$.

2. Sistemas-r e sistemas-l

Diremos $A \subseteq \mathfrak{S}$ um *sistema-r*, quando, tomado $a \in A$, existir $x \in \mathfrak{S}$ tal que $ax \in A$. E diremos $B \subseteq \mathfrak{S}$ um *sistema-l*, quando, tomado $b \in B$, existir $x \in \mathfrak{S}$ tal que $xb \in B$. O conjunto vazio é sistema-r e sistema-l.

Dados agora $a, b \in \mathfrak{S}$, definem-se $R_a(X)$ e $L_b(X)$, para cada $X \subseteq \mathfrak{S}$, pelas igualdades seguintes:

$$R_a(X) = \{x \in \mathfrak{S} \mid ax \in X\},$$

$$L_b(X) = \{x \in \mathfrak{S} \mid xb \in X\}.$$

Então, supondo $\emptyset \neq A \subseteq \mathfrak{S}$, A será um sistema-r, se e só se, para cada $a \in A$, for $R_a(A) \neq \emptyset$; e será $B \neq \emptyset$, $(B \subseteq \mathfrak{S})$, um sistema-$l$, se e só se, para cada $b \in B$, for $L_b(B) \neq \emptyset$.

Observações: *i*) Se $\mathfrak{r} \neq \emptyset$ é um ideal direito de $\mathfrak{S}$, tem-se, para qualquer $a \in \mathfrak{r}$,

$R_a(\mathfrak{r}) = \mathfrak{S}$; e, se $\mathfrak{e} \neq \emptyset$ é um ideal esquerdo, para qualquer $b \in \mathfrak{e}$, é $L_b(\mathfrak{e}) = \mathfrak{S}$.

ii) Todo o sistema-*p* e, portanto, todo o sistema-*m*, é sistema-*r* e sistema-*l*.

iii) Afirmar que A é fechado para o produto é equivalente a escrever $A \subseteq \bigcap_{a \in A} R_a(A)$.

PROPOSIÇÃO 3: *Se* $X \subseteq \mathfrak{S}$ *é um subsemigrupo de* $(\mathfrak{S}, +)$, *o mesmo sucede com* $R_a(X)$ *e* $L_b(X)$, *quaisquer que sejam* $a, b \in \mathfrak{S}$.

Valem, também, as seguintes proposições, de demonstração imediata:

PROPOSIÇÃO 4: *Supostos* A *um sistema*-r *e* B *um sistema*-l, $R_a(A)$ *e* $L_b(B)$ *são, respectivamente, sistema*-r *e sistema*-l, *quaisquer que sejam* $a, b \in \mathfrak{S}$.

PROPOSIÇÃO 5: *Todo o conjunto unido de sistemas*-r (*resp.: sistemas*-l) *é um sistema*-r (*resp.: sistema*-l).

PROPOSIÇÃO 6: *Suponham-se* $\mathfrak{a}$ *um ideal e* A *um sistema*-r, *tais que* $\mathfrak{a} \cap A = \emptyset$. *Então, entre os ideais de* $\mathfrak{S}$ *que contêm* $\mathfrak{a}$ *e são disjuntos de* A, *existe um ideal maximal e, e entre os sistemas*-r *que contêm* A *e são disjuntos de* $\mathfrak{a}$, *existe um sistema*-r *maximal*. A demonstração reduz-se a aplicações simples do lema de Zorn.

3. Ideais fortes

É sabido, da teoria geral dos semi-anéis (veja-se [1]), que, suposto $\mathfrak{x}$ um ideal semi-primo, é $a \in \mathfrak{x}$ se e só se $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{x}$; e que, se L for o radical de *Levitzki* de um semi-anel, $a \in L$ é equivalente a $a\mathfrak{S} \subseteq L$.

Para uma sistematização de tais situações, introduziremos as definições seguintes:

Um ideal $\mathfrak{a}$ do semi-anel $\mathfrak{S}$ chamar-se-á *ideal-forte-d* (resp.: *forte-e*) quando $a \in \mathfrak{a}$ for equivalente a $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ (resp.: $\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{a}$); $\mathfrak{a}$ dir-se-á *forte-b* quando $a \in \mathfrak{a}$ for equivalente a $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ e $\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{a}$; finalmente, $\mathfrak{a}$ será um *ideal forte* quando for simultaneamente forte-*d* e forte-*e*.

OBSERVAÇÃO: As definições acabadas de dar transpõem-se para anéis, com o seu conceito habitual de ideal.

PROPOSIÇÃO 7: *O ideal* $\mathfrak{a}$ *é um ideal forte se e só se* $a \in \mathfrak{a}$ *for equivalente a* $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$. De facto, se $\mathfrak{a}$ é um ideal forte, de $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ conclui-se que, para qualquer $s \in \mathfrak{S}$, é $sa\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$, donde, sucessivamente, $sa \in \mathfrak{a}$, para qualquer s pertencente a $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{a}$, $a \in \mathfrak{a}$. Reciprocamente, se $\mathfrak{a}$ for tal que de $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ se conclua $a \in \mathfrak{a}$, de $\mathfrak{S}a \subseteq \mathfrak{a}$ ou $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ conclui-se que $\mathfrak{S}a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ e, portanto, que $a \in \mathfrak{a}$.

COROLÁRIO: *Todo o ideal primo é um ideal forte*. A este propósito, veja-se, de novo, [1].

OBSERVAÇÕES: *i*) Além dos exemplos que precedem as definições anteriores, devemos notar que, num semi-anel com identidade, todo o ideal é forte-*d*, forte-*e*, forte e forte-*b*.

ii) Seguindo as notações de [1], vemos que o ideal $\mathfrak{a}$ é forte-*d* se e só se $(\mathfrak{a} : \mathfrak{S})_d = \mathfrak{a}$.

iii) Todo o ideal que seja intersecção de ideais fortes-*d* é ainda forte-*d*. O mesmo para fortes-*e*, etc.

iv) Se A é um sistema-*r* e $\mathfrak{a}$ um ideal tal que $A \cap \mathfrak{a} = \emptyset$, temos $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a} : \mathfrak{S})_d \subseteq C(A)$, em que $C(A)$ designa o conjunto complementar de A em $\mathfrak{S}$.

v) No que se segue, consideraremos apenas ideais-fortes-*d*. Os outros casos podem estudar-se paralelamente.

PROPOSIÇÃO 8: *Se* $\mathfrak{a}$ *é um ideal de* $\mathfrak{S}$, $C(\mathfrak{a})$ *é um sistema*-r *quando* $\mathfrak{a}$ *for um ideal* *forte*-d. *E também: o complementar de um sistema*-r, *suposto um ideal, é um ideal forte* d.

PROPOSIÇÃO 9: *Seja* $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ *um epimorfismo de semi-anéis e* $\mathfrak{a}'$ *um ideal forte*-d *de* $\mathfrak{S}'$. *Então,* $\varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$ *é um ideal forte*-d *de* $\mathfrak{S}$. Com efeito, de $a\mathfrak{S} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$ conclui-se que $\varphi(a)\mathfrak{S}' = \varphi(a)\varphi(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{a}'$. Mas então, por hipótese, $\varphi(a) \in \mathfrak{a}'$ e $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{a}')$.

PROPOSIÇÃO 10: *Sejam* $\mathfrak{S}$ *e* $\mathfrak{S}'$ *anéis e* $\varphi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ *um epimorfismo de anéis. Há uma correspondência bijectiva entre os ideais fortes*-d *de* $\mathfrak{S}$ *que contêm* $Ker\,\varphi$ *e os ideais fortes*-d *de* $\mathfrak{S}'$. Na verdade, se $\mathfrak{a}$ for um ideal forte-d de $\mathfrak{S}$, que contenha $\mathrm{Ker}\,\varphi$, supondo $a' = \varphi(a) \in \mathfrak{S}'$ tal que $a'\mathfrak{S}' \subseteq \varphi(\mathfrak{a})$, vemos que, para todo o $s \in \mathfrak{S}$, se tem $\varphi(as) \in \varphi(\mathfrak{a})$; donde, uma vez que $\mathfrak{a} \supseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$, $as \in \mathfrak{a}$, qualquer que seja $s \in \mathfrak{S}$. Mas isto significa que $a\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{a}$ e, por hipótese, que $a \in \mathfrak{a}$. Finalmente, $a' \in \varphi(\mathfrak{a})$. A demonstração da parte inversa é análoga à da proposição anterior.

PROPOSIÇÃO 11: *Seja* $\mathfrak{a}$ *um ideal do anel* $\mathfrak{A}$. *Designando por* $\overline{0}$ *o elemento zero de* $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}$, *podemos afirmar que* $\mathfrak{a}$ *é ideal forte*-d *de* $\mathfrak{A}$ *se e só se* $\left((\overline{0}) : \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}}\right)_{\mathrm{d}} = (\overline{0})$. Esta afirmação é consequência imediata das definições dadas.

PROPOSIÇÃO 12: *Se* $\mathfrak{A}$ *é um anel tal que* $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$, *o ideal* $((0) : \mathfrak{A})_{\mathrm{d}}$ *é um ideal forte*-d. Suponha-se $a\mathfrak{A} \subseteq ((0) : \mathfrak{A})_d$. Então, $a\mathfrak{A}^2 = a\mathfrak{A} = (0)$, consequentemente $a \in ((0) : \mathfrak{A})_d$.

COROLÁRIO: *Se* $\mathfrak{A}$ *é um anel tal que* $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}$, *temos* $\left((\overline{0}) : \frac{\mathfrak{A}}{((0) : \mathfrak{A})_{\mathrm{d}}}\right)_{\mathrm{d}} = (\overline{0})$. Trata-se de uma consequência imediata das proposições 11 e 12, acima.

4. Semi-anéis-ρ_d e semi-anéis-ρ'_d

O semi-anel $\mathfrak{S}$ diz-se um *semi-anel*-ρ_d quando verifica a *condição*-ρ_d, que se enuncia da seguinte forma: *suposto* $\phi \neq \mathrm{A}$ *um sistema*-r, *toda a família de ideais disjuntos de* A *contém um ideal maximal.*

PROPOSIÇÃO 13: *Um semi-anel*-ρ_d *verifica a condição de cadeia ascendente para os subideais de um ideal forte*-d *diferente de* $\mathfrak{S}$. Tomem-se um ideal forte-d $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{S}$ e uma cadeia $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n \subseteq \cdots$ de subideais de $\mathfrak{a}$. Uma vez que $\phi \neq A = C(\mathfrak{a})$ é um sistema-r e que os $\mathfrak{a}_i$ são disjuntos de A, existe um $\mathfrak{a}_k$ maximal.

O semi-anel $\mathfrak{S}$ diz-se um *semi-anel*-ρ'_d quando verifica a *condição*-ρ'_d, cujo enunciado é o que se segue: *suposto* $\mathrm{A} \neq \mathfrak{S}$ *um sistema*-r, *toda a família de ideais disjuntos de* A *contém um ideal minimal.*

PROPOSIÇÃO 14: *Um semi-anel*-ρ'_d *verifica a condição de cadeia descendente para os subideais de um ideal forte*-d *não vazio.* Tomem-se um ideal forte-d $\mathfrak{a} \neq \phi$, e uma cadeia $\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_n \supseteq \cdots$, de subideais de $\mathfrak{a}$. Uma vez que $\mathfrak{S} \neq A = C(\mathfrak{a})$ é um sistema-r e que os $\mathfrak{a}_i$ são disjuntos de A, existe um $\mathfrak{a}_k$ minimal.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALMEIDA COSTA, A., *Cours d'Algèbre Générale*, vol. III, (Lisboa), 1974.

[2] ———, *Cours d'Algèbre Générale*, vol. II, (Lisboa), 1968.