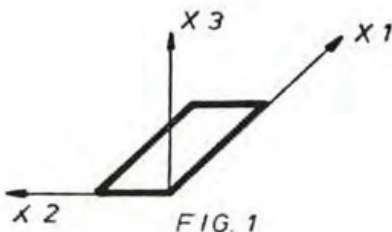
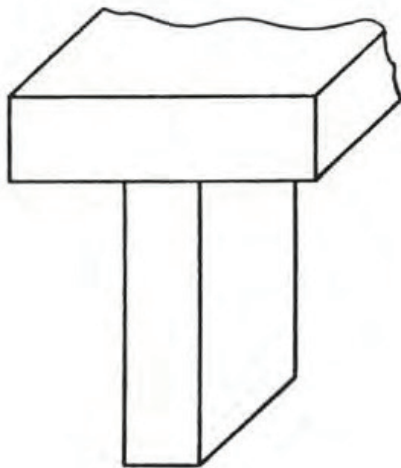


Tratamento matemático da elasticidade duma barra homogénea

por Emanuel Eduardo Pires Vaz

Engenheiro Electrotécnico (Telecomunicações) — Universidade do Porto

Neste artigo discute-se um problema importante de estruturas elásticas: Determinação do estado de torção em todos os pontos materiais de uma barra feita dum isotrópico ou quase isotrópico.



Vamos resolver este problema por um semelhante para a barra da figura 1. Este é um problema clássico nestes domínios.

Nas barras aplicam-se forças externas às suas bases cuja resultante é nula e o momento

é perpendicular a elas. Supomos, também, que não existe densidade volumétrica de forças. A transição de um para o outro caso pode ser feita nos seguintes termos: O efeito de torção é desprezável em todos os pontos perto da parede; a condição matemática impõe que as componentes do vector deslocamento são desprezáveis nestas regiões, ou $x_1 \rightarrow \infty \forall x_3 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$ e conseqüentemente $\psi \rightarrow 0$, onde φ é a função de Saint-Venant e ψ é a sua conjugada harmónica.

Defini-la-emos abaixo. No caso de pequeno efeito de torção e se outros efeitos elásticos não são tomados em consideração nesta teoria está de acordo com a realidade.

1. Consideremos um cilindro ou um prisma cuja secção não é circular. Aplica-se um sistema de forças às suas bases cuja resultante é nula e o momento é perpendicular às bases.

Neste caso as teorias como a de Coulomb não são aplicáveis mas, podemos resolver o problema da torção pela teoria de Saint-Venant para as estruturas elásticas. Esta teoria consiste em aceitar que todas as secções horizontais rodam em volta do eixo dos x_3 de ângulos proporcionais à sua distância x_3 à base que está fixa. Os pontos da estrutura elástica fazem deslocações longitudinais. Isto é equivalente a dizer que as deformações nas secções horizontais tomam lugar no problema, noutros termos; a componente x_3 do vector das deformações não é nula.

Então temos :

$$D = (U_1, U_2, U_3)$$

$$(1) \quad \begin{cases} U_1 = -\alpha x_2 x_3 \\ U_2 = \alpha x_1 x_3 \\ U_3 = \alpha \varphi(x_1, x_2), \end{cases}$$

onde D é o campo vectorial dos deslocamentos. A função φ chama-se função de Saint-Venant e as suas derivadas devem ser contínuas.

Para resolver o problema devemos conhecer α e $\varphi(x_1, x_2)$. Para a sua determinação devemos ter em mente que as equações da teoria matemática da elasticidade devem ser verificadas.

Pelas relações entre as componentes do tensor das deformações e_{ij} e as componentes do vector D , podemos determinar α e φ inserindo as condições fronteira.

Precisamente, calculemos e_{ij} .

$$e_{ii} = e_{12} = 0$$

$$2e_{13} = \alpha(-x_2 + \varphi_{,1})$$

$$(2) \quad 2e_{23} = \alpha(x_2 + \varphi_{,2})$$

$$\tau_{ij} = 0 \text{ excepto } \tau_{13} = \mu\alpha(-x_2 + \varphi_{,1}) = \tau_{31}$$

$$\tau_{23} = \mu\alpha(x_2 + \varphi_{,2}) = \tau_{32}.$$

As equações de equilíbrio $\tau_{ij,j} + F_i = 0$ devem ser verificadas. Como por hipótese, não há densidade volumétrica de forças e, como φ é somente uma função das variáveis x_1 e x_2 , temos a seguinte relação apenas:

$$\tau_{31,1} + \tau_{32,2} = 0;$$

inserindo as relações (2) a última equação dá:

$$\varphi_{,1,1} + \varphi_{,2,2} = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 0,$$

esta equação deve ser verificada em todos os pontos do corpo.

A terceira coordenada não está incluída nesta última equação e, então, aquela deve

ser verificada em todos os pontos duma secção horizontal.

Agora, vamos considerar um elemento da área lateral; a função $\vec{n}(x_1, x_2, x_3)$ representa um campo vectorial de perpendiculares à área lateral. As condições fronteira para área, quando do equilíbrio são expressas por $\tau_{ij}n_j = 0 \Leftrightarrow \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 = 0$, e por (2) esta relação dá origem a:

$$\mu\alpha(-x_2n_1 + x_1n_2 + \varphi_{,1}n_1 + \varphi_{,2}n_2) = 0$$

com

$$\mu\alpha \neq 0$$

numa linha fechada C que limita toda a secção horizontal.

Outra forma para a última equação é:

$\varphi_{,n} = x_2n_1 - x_1n_2$ onde $\varphi_{,n}$ é a derivada na direcção \vec{n} .

Então φ está determinada; mas pretende-se dar-lhe uma expressão. O seu cálculo para o nosso problema concreto será a nossa tarefa na terceira parte da nossa exposição. A determinação de α pode ser feita exprimindo todas as condições fronteira para a resultante e o momento. O seu cálculo aparece nos livros de texto desta especialidade e, por esta razão, não vamos tratá-lo neste artigo.

2. Em vez de φ pretendemos a determinação directa do seu conjugado harmónico ψ .

As relações entre φ e ψ são as conhecidas expressões de CAUCHY-RIEMAN:

$$\begin{cases} \varphi_{,1} = \psi_{,2} \\ \varphi_{,2} = -\psi_{,1} \end{cases}.$$

Por derivação temos:

$$\begin{cases} \varphi_{,1,2} = \psi_{,2,2} \Rightarrow \psi_{,1,1} + \psi_{,2,2} = 0 \\ \varphi_{,2,1} = -\psi_{,1,1} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \Delta\psi = 0$ em R , sendo R a região interna limitada por C .

Neste caso dum prisma ou dum cilindro em que todas as secções são não circulares, a determinação de ψ é fácil e é dada em todos os cursos de elasticidade e nos livros de texto.

Mas, quando as condições fronteira são diferentes de local para local e, no caso da figura 2, esta teoria não é aplicável.

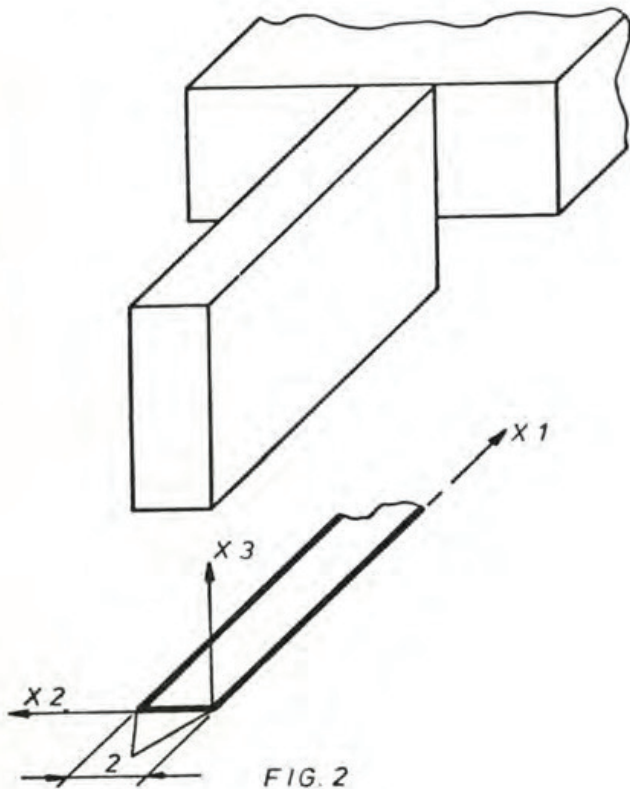


FIG. 2

No caso da figura 2 pretende-se fazer a determinação de ψ para as condições fronteira:

$$(3) \quad \psi = \begin{cases} 2x_2, & x_2 \in [0, 1] & x_1 = 0 \\ 2(2 - x_2), & x_2 \in [1, 2] & x_1 = 0 \\ 0, & x_2 = 2 & \forall x_1. \end{cases}$$

Como se disse na introdução pretende-se resolver este problema inserindo-o nos cálculos precedentes considerando-o como um caso limite em que $\psi \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow \infty$ em R

e as condições fronteira em C são expressas por (3). Esta escolha foi feita para simplificação de cálculos e é referida a problemas concretos.

Esta hipótese está de acordo com a realidade. No topo de cima e, em regiões pouco separadas desta base as considerações desenvolvidas não são aplicáveis mas, no problema precedente (o da figura 1) já não o eram, também.

3. Pretende-se obter soluções deste problema sobrepondo soluções alcançadas pelo método da separação de variáveis:

$$e^{ax_1} \cos ax_2; e^{ax_1} \sin ax_2; e^{bx_1} \cos bx_1; e^{bx_1} \sin bx_1 \quad \forall a, b \in R,$$

e por fim

$$1; x_1; x_2; x_1 x_2.$$

Devemos sobrepor, apenas, soluções que satisfaçam as condições fronteira. Supomos que $\psi \rightarrow 0$, $x_1 \rightarrow \infty$, então podemos, apenas, esperar soluções da forma $e^{-ax_1} \cos ax_2$; $e^{-ax_1} \sin ax_2$ com $a > 0$. Mas, temos $x_2 = 0 \forall x_1 \Rightarrow \psi = 0$, então não podemos tomar soluções em $\cos ay$.

Quando $x_2 = 1 \forall x_1 \Rightarrow \psi = 0$; devemos tomar uma que satisfaça a equação

$$\sin a = 0 \Leftrightarrow a = n\pi$$

(n é um número natural). Resultam, apenas, soluções da forma $e^{-n\pi x_1} \sin n\pi x_2$ que podemos sobrepor em $\psi = \sum B_n e^{-n\pi x_1} \sin n\pi x_2$, onde B_n é uma constante dependente do índice n , escolhida para satisfazer às condições fronteira últimas.

Esta condição é:

$$x_1 = 0 \Rightarrow \psi = f(x_2)$$

com

$$f(x_2) = \begin{cases} 2x_2, & x_2 \in [0, 1] \\ 2(2-x_2), & x_2 \in [1, 2] \end{cases}$$

Então, temos

$$\forall x_2 \in [0, 2] \quad x_1 = 0, \quad \sum B_n \sin n\pi x_2 = f(x_2).$$

Isto não é sempre possível com uma adição de um número finito de termos mas, é possível como uma série. Esta é a série de senos de f em $[0, 2]$ como período $T=2$; Aquela converge uniformemente em $[0, 2]$ porque há monotónia parcial e continuidade.

Temos, então:

$$\begin{aligned} B_n &= 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^1 2x_2 \sin n\pi x_2 dx_2 + \\ &+ 2 \cdot \frac{2}{T} \int_1^2 2(2-x_2) \sin n\pi x_2 dx_2 = \\ &= \frac{4 \cos 2n\pi}{n\pi} + \frac{4 \cos n\pi}{n\pi}. \\ B_{2p} &= \frac{4 \cos 4p\pi}{2p\pi} + \frac{4 \cos 2p\pi}{2p\pi} = \frac{8}{2p\pi} \\ B_{2p+1} &= \frac{4 \cos 2(2p+1)\pi}{(2p+1)\pi} + \\ &+ \frac{4 \cos (2p+1)\pi}{(2p+1)\pi} = 0. \end{aligned}$$

Temos a expressão para ψ :

$$\psi = \frac{8}{2p\pi} \sum_{p=0}^{\infty} e^{-2p\pi x_1} \sin 2p\pi x_2.$$

Majorando $|\psi|$ por séries geométricas cuja razão seja $e^{-2\pi x_1}$, $k > 0$ vemos que estas

séries e as que se obtêm por derivação uma e duas vezes termo a termo são absoluta e uniformemente convergentes para $x_1 > k$ $\forall x_2 \in \mathbb{R}$; e, esta é a justificação, a posteriori, de todos os cálculos, mostrando que a função assim obtida ψ é uma solução do problema,

4. Agora, a função ψ é conhecida; um problema elementar de matemática permite-nos a completa determinação da natureza de φ .

A solução encontrada é verificada, exactamente, em todos os pontos da barra com pouca separação da base mais baixa dela; mas, em muitos problemas práticos onde este problema aparece nós precisamos, apenas, de uma solução na metade mais baixa da barra.

Em conclusão, há uma satisfação intelectual na inesperada natureza dos métodos envolvidos na resolução do problema, quando existe uma dificuldade adicional, ao simplificá-lo.

BIBLIOGRAFIA

- A. P. BORESI — *Elasticity in Engineering Mechanics*, P.-Hall, N. J.
 A. A. GUIMARÃES — *Lições de Matemáticas Gerais*, 1962-63, C. U. P.
 C. MATOS — *Funções de variável real*, I. A. C.
 J. V. GONÇALVES — *Álgebra Superior*.
 PARODI — *Fonctions de variable complexe, Analyse symbolique*, C. D. U., Paris.
 L. SCHWARTZ — *Séries et intégrales*, C. D. U., Paris.
 LASS — *Vector and tensor analysis*, Mc.Graw Hill.
 SOKOLNIKOFF — *Mathematical theory of elasticity*, Mc. Graw Hill.
 Notas (do autor) dos cursos de Física Geral, 1967 e Física Complementar, 1969, proferidos na Universidade do Porto.