Relações entre os coeficientes dos polinómios $T_n(x)$ e $P_n(x)$ e os coeficientes dos polinómios $He_n(x)$. Aplicação ao cálculo automático[1]

por *Rui João Baptista Soares*
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

1. Introdução

No presente trabalho indicam-se fórmulas de recorrência para o cálculo exacto dos coeficientes dos polinómios de HERMITE, CHEBYSHEV e LEGENDRE assim como os programas correspondentes.

2. Relações básicas

Designemos por $c_{n,m}$, $\bar{c}_{n,m}$, e $\bar{\bar{c}}_{n,m}$ os coeficientes dos polinómios de HERMITE, CHEBYSHEV e LEGENDRE nas expressões

1)
$$He_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{n!}{2^m \cdot m!\,(n-2m)!} x^{n-2m}$$

2)
$$T_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \cdot$$
$$\cdot \frac{n(n-m-1)!}{2^{2m-n+1} \cdot m!\,(n-2m)!} x^{n-2m}$$

3)
$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \cdot$$
$$\cdot \frac{[2(n-m)]!}{2^n (n-m)!\,m!\,(n-2m)!} x^{n-2m}.$$

Identificando coeficientes homólogos em 1) e 2) resulta

4)
$$\bar{c}_{n,m} = (-1)^m \frac{n(n-m-1)!}{2^{2m-n+1} \cdot m!(n-2m)!} =$$
$$= \frac{(n-m-1)!}{2^{m-n+1} \cdot (n-1)!} \cdot c_{n,m} =$$
$$= \frac{2^{n-m-1}}{1 \cdot (n-1)(n-2) \cdots (n-m)} \cdot c_{n,m}.$$

Analogamente, de 1) e 3) vem

5)
$$\bar{\bar{c}}_{n,m} = (-1)^m \frac{[2(n-m)]!}{2^n (n-m)!\,m!\,(n-2m)!} =$$
$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{[2(n-m)]!}{2^{n-m}(n-m)!} c_{n,m} =$$
$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots [2(n-m)-1]}{n!} \cdot c_{n,m} =$$
$$= \frac{N1}{N2} c_{n,m}.$$

Para valores de n suficientemente grandes sugere-se (ver [6]) a seguinte fórmula de recorrência para o cálculo dos coeficientes

6)
$$\begin{cases} c_{n,0} = 1 & n = 0,1,2,\ldots \\ c_{n+1,m+1} = c_{n,m+1} - (n-2m) \cdot c_{n,m} & \\ & m = 0,1,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right] \\ c_{n,m} = 0 & m > \left[\frac{n}{2}\right]. \end{cases}$$

(1) Comunicação apresentada nas II Jornadas Hispano-Lusitanas celebradas em Madrid em Abril de 1973.

As fórmulas indicadas em 4), 5) e 6) são de fácil adaptação ao cálculo automático, sendo de aconselhar que se opere em dupla precisão para a obtenção dos valores exactos.

Em 4) e 6) evita-se o cálculo dos factoriais, tarefa sempre ingrata para grandes valores de m e n. Na fórmula 5), e com a mesma finalidade de evitar o cálculo de $n!$ determinou-se, em cada fase, $M = \text{m.d.c.}(N1, N2)$ pondo-se em evidência o factor $N2/M$.

3. Programas

As subrotinas HERMRS, CHEBRS e LEGERS, escritas na linguagem FORTRAN IV, permitem construir tabelas com os valores de $c_{n,m}$, $\bar{c}_{n,m}$ e $\bar{\bar{c}}_{n,m}$, respectivamente.

O parâmetro N indica o polinómio de grau $N-1$.

A capacidade pode ser alterada por modificação das respectivas instruções de especificação.

4. Tabelas

A primeira coluna indica o factor pelo qual se devem dividir os coeficientes que se encontram nessa linha. Exemplos:

$$He_{10}(x) = x^{10} - 45\,x^8 + 630\,x^6 - 3150\,x^4 + $$
$$+ 4725\,x^2 - 945$$

$$T_{10}(x) = 512\,x^{10} - 1280^8\,x + $$
$$+ 1120\,x^6 - 400\,x + 50\,x^2 - 1$$

$$P_{10}(x) = \frac{1}{256}(46189\,x^{10} - 109395\,x^8 + $$
$$+ 90090\,x^6 - 30030\,x^4 + 3465^2 - 63).$$

5. Observações finais

I) À parte o factor indicado na primeira coluna todos os coeficientes são inteiros, pelo que, de acordo com as possibilidades do computador e grau do polinómio desejado, se poderá fazer o cálculo em aritmética de inteiros.

II) Pretendendo-se apenas os coeficientes de um polinómio de grau n deve-se efectuar o cálculo por linhas apesar de ser mais lento do que por colunas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Agnew, R. P., *Diferential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Inc. 1960.

[2] Angot, A., *Compléments de Mathématiques*, Collecion Thecnique et Scientifique du C. N. E. T., Paris, 1972.

[3] Chatterjea, S. K., *On Turan's Expression for Hermite Polynomials*, Rev. Mat. Hisp. Amer., España, 1960, 20-2 e 3, 64-7.

[4] G. Rodeja, F. E., *Sobre una Formula de Chatterjea*, Rev. Mat. Hisp. Amer., España, 1960, 20-2 e 3, 74-8.

[5] Courant, R.; Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, I vol., Interscience Publishers (John Willey), New York, 1953.

[6] Rui Soares, *Uma fórmula de recorrência para o cálculo dos coeficientes dos polinómios $He_n(x)$*. Gaz. Matemática N.os 121-124, 1971 (Lisboa).

```
C
      SUBROUTINE HERMRS (N)
      DOUBLE PRECISION I1, IRS (18, 10)
      COMMON/CO1/IRS
      J1 = (N - 1)/2 + 1
      DO 1I = 1, N
      DO 1J = 1, J1
      IRS (I, J) = 0.
    1 CONTINUE
      DO 2I = 1, N
      IRS (I,1) = 1.
      IRS (I, 10) = 1.
    2 CONTINUE
      J2 = 1
      DO 3I = 2, J1
      J2 = J2 + 2
      DO 3J = J2, N
      I1 = J - J2 + 1
      IRS (J, I) = - I1 * IRS (J - 1, I - 1) + IRS (J - 1, I)
    3 CONTINUE
      RETURN
      END

C
      SUBROUTINE CHEBRS (N)
      DOUBLE PRECISION I1, T1, T2, T3, IRS (18, 10)
      COMMON/CO1/IRS
      CALL HERMRS (N)
      DO 1I = 3, N
      J1 = (I - 1)/2 + 1
      T1 = 2 ** (I - 2)
      T3 = 1.
      IRS (I, 1) = IRS (I, 1) * T1
      IRS (I, 10) = 1.
      DO 1J = 2, J1
      T1 = T1/2.
      T2 = I - J
      T3 = T3 * T2
      IRS (I, J) = IRS (I, J) * T1/T3
    1 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C
      SUBROUTINE LEGERS (N)
      DOUBLE PRECISION I1, I2, M, N1, N2, IRS (18, 10)
      COMMON/CO1/IRS
      CALL HERMRS (N)
      N1 = 1.
      N2 = 1.
      DO 3I = 2, N
      I1 = 2 * I - 3
      I2 = I - 1
      N1 = N1 * I1
      N2 = N2 * I2
      M1 = N1
      M2 = N2
    1 M3 = M1 / M2
      M0 = M1 - M2 * M3
      IF (M0.EQ.0) GOTO 2
      M1 = M2
      M2 = M0
      GOTO 1
    2 M = M2
      N1 = N1 / M
      N2 = N2 / M
      IRS (I, 1) = N1
      IRS (I, 10) = N2
      I2 = I1
      J2 = (I - 1) / 2 + 1
      DO 3J = 2, J2
      IRS (I, J) = IRS (I, J) * N1 / I2
      I1 = I1 - 2.
      I2 = I2 * I1
    3 CONTINUE
      RETURN
      END
```

Coeficientes dos polinómios de Hermite

1	1										
1	1										
1	1	-1									
1	1	-3									
1	1	-6	3								
1	1	-10	15								
1	1	-15	45	-15							
1	1	-21	105	-105							
1	1	-28	210	-420	105						
1	1	-36	378	-1260	945						
1	1	-45	630	-3150	4725	-945					
1	1	-55	990	-6930	17325	-10395					
1	1	-66	1485	-13860	51975	-62370	10395				
1	1	-78	2145	-25740	135135	-270270	135135				
1	1	-91	3003	-45045	315315	-945945	945945	-135135			
1	1	-105	4095	-75075	675675	-2837835	4729725	-2027025			
1	1	-120	5460	-120120	1351350	-7567560	18918900	-16216200	2027025		
1	1	-136	7140	-185640	2252250	-18378360	64324260	-91891800	34459425		
1	1	-153	9180	-278460	4594590	-41351310	192972780	-413513100	310134825	-34459425	
1	1	-171	11628	-406980	7936110	-87297210	523783260	-1571349780	1964187225	-654729075	
1	1	-190	14535	-581400	13226850	-174594420	1309458150	-5237832600	9820936125	-6547290750	654729075

Coeficientes dos polinómios de Chebyshev

1	1										
1	1										
1	2	-1									
1	4	-3									
1	8	-8	1								
1	16	-20	5								
1	32	-48	18	-1							
1	64	-112	56	-7							
1	128	-256	160	-32	1						
1	256	-576	432	-120	9						
1	512	-1280	1120	-400	50	-1					
1	1024	-2816	2816	-1232	220	-11					
1	2048	-6144	6912	-3584	840	-72	1				
1	4096	-13312	16640	-9984	2912	-364	13				
1	8192	-28672	39424	-26880	9408	-1586	98	-1			
1	16384	-61440	92160	-70400	28800	-6048	560	-15			
1	32768	-131072	212992	-180224	84480	-21504	2688	-128	1		
1	65536	-278528	487424	-452608	239360	-71808	11424	-816	17		
1	131072	-589824	1105920	-1118208	658944	-228096	44352	-4320	162	-1	
1	262144	-1245184	2490368	-2723840	1770496	-695552	160512	-20064	1140	-19	
1	524288	-2621440	5570560	-6553600	4659200	-2050048	549120	-84480	6600	-200	1

Coeficientes dos polinómios de Legendre

1	1										
1	1										
2	3	-1									
2	5	-3									
8	35	-30	3								
8	63	-70	15								
16	231	-315	105	-5							
16	429	-693	315	-35							
128	6435	-12012	6930	-1260	35						
128	12155	-25740	18018	-4620	315						
256	46189	-109395	90090	-30030	3465	-63					
256	88179	-230945	218790	-90090	15015	-693					
1024	676039	-1939938	2078505	-1021020	225225	-18018	231				
1024	1300075	-4056234	4849845	-2771340	765765	-90090	3003				
2048	5014575	-16900975	22309287	-14549535	4849845	-765765	45045	-429			
2048	9694845	-35102025	50702925	-37182145	14549535	-2909907	255255	-6435			
32768	300540195	-1163381400	1825305300	-1487285800	669278610	-162954792	19399380	-875160	6435		
32768	583401555	-2404321560	4071834900	-3650610600	1859107250	-535422888	81477396	-5542680	109395		
65536	2268783825	-9917826435	18032411700	-17644617900	10039179150	-3346393050	624660036	-58198140	2078505	-12155	
65536	4418157975	-20419054425	39671305740	-42075627300	26466926850	-10039179150	2230928700	-267711444	14549535	-230945	
262144	34461632205	-167890003050	347123925225	-396713057400	273491577450	-116454478140	30117537450	-4461857400	334639305	-9699690	46189

U

0. In

Um
obtenç
tribuiç
tação
preten
cessos
com p
fossem
distrib
A
— qua
— con
tórios
A
aleató
estuda
a dis
extra
esse
de 10
dum
finais
ficou-

(1)
do Ins
J. TI