Um processo de gerar números pseudo-aleatórios e seus testes — fundamentos e resultados (¹)

por *M. Antónia Amaral, Helena M. Barroso, M. Lucília Carvalho, M. Ivette Gomes, Daniel A. Muller e M. F. Veiga de Oliveira*
(bolseiros do I. A. C.)

«*There is no such a thing as a rondam number*»

— J. von Neumman

0. Introdução

Um problema básico de simulação é o da obtenção de amostras com determinadas distribuições, supostas adequadas à representação de fenómenos do mundo real que se pretendem explicar. Existem diversos processos de obtenção de sucessões de números com propriedades análogas às que teriam se fossem extraídas de uma população com a distribuição pretendida.

A solução para este tipo de problemas — qualquer que seja a distribuição em causa — consiste na utilização de números aleatórios.

A ideia do uso das tabelas de números aleatórios foi introduzida por Tippett quando estudava, sob a direcção de Karl Pearson, a distribuição das amplitudes de amostras extraídas de uma população normal. Para esse trabalho, Tipett construiu uma tabela de 10 400 dígitos aleatórios a partir de tabelas dum recenseamento, tomando os algarismos finais dos números aí apresentados. Verificou-se posteriormente que a tabela dos 10 400 números aleatórios de Tipett não era suficiente. Assim, Kendall e Babington-Smith construiram uma tabela de 100 000 dígitos gerados por um processo mecânico. Ao mesmo tempo Fisher e Yates, construiram uma tabela mais pequena de 15 000 dígitos obtidos dum modo conveniente a a partir da tabela Logarithmica Britannica de Thompson. Depois da II Guerra Mundial e devido ao desenvolvimento tecnológico dos computadores, muitas outras tabelas foram construídas, tornando mais simples a resolução de diversos problemas de simulação.

1. Números aleatórios: sua geração

1. 1. Generalidades

Um conjunto de números aleatórios pode ser gerado por vários processos resultantes de fenómenos físicos dos quais o mais simples é o da rotação de um disco dividido em dez sectores de igual área, cada qual correspondendo ao seu dígito. Obtêm-se assim dígitos aleatórios x_i que podem tomar com probabilidades 1/10 os valores de 0 a 9.

Os termos de uma sucessão infinita $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ podem ser encarados como os dígitos de um número ξ dado por

---

(¹) Este trabalho foi realizado sob o patrocínio do Instituto de Alta Cultura e orientação do Professor J. Tiago de Oliveira.

$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 10^{-i}$. O número ξ é aleatório no intervalo $[0, 1[$. A probabilidade de que ξ fique no intervalo $[0, 1/2[$ é igual a $1/2$ e que fique no intervalo $[0, 1/4[$ é $1/4$, etc; vê-se assim, de forma intuitiva que ξ uniformemente distribuído em $[0, 1[$.

Na prática é necessário truncar a sucessão x_i numa ordem n, obtendo assim um número ξ_n cuja distribuição $F_n(x)$ é discreta aproximando tanto melhor a distribuição uniforme quanto maior for n.

Outro processo de natureza física é a contagem, por um contador de GEIGER, do número de partículas emitidas por uma substância radioactiva num determinado intervalo de tempo.

Tem havido certa controvérsia sobre se estes fenómenos naturais podem ser considerados aleatórios. No entanto devemes considerá-los aleatórios e independentes pois:

a) O conhecimento do comportamento passado não melhora de forma nenhuma a predição sobre o comportamento futuro.

b) O seu mecanismo exacto é-nos desconhecido.

c) O seu comportamento não é previsível por nenhuma lei determinista óbvia.

Os processos de tipo físico exigem por vezes uma aparelhagem complicada e são muito morosos. Pode obter-se mais rapidamente uma sucessão de «númeres aleatórios» programando num computador uma certa relação de recorrência em que um número ξ^*_{i+1} é gerado a partir de ξ^*_i, ou de um grupo de números anteriores, empregando algum algoritmo. É claro que esta sucessão não é aleatória, pois do próprio processo de geração deriva a possibilidade de predição, o que entra em contradição com as três exigências anteriormente feitas. No entanto, sem ser aleatória, pode satisfazer vários critérios estatísticos de aleatoriedade. Tais números dizem-se *pseudo-aleatórios*.

Deve ter-se também em conta que qualquer sucessão gerada por um algoritmo e com um número finito de dígitos é periódica e portanto, de um ponto de vista prático há uma limitação do tamanho dessa sucessão para que possa ser considerada pseudo-aleatória.

Desde que se reconhece a periodicidade de toda a sucessão de números pseudo-aleatórios deve-se procurar obter o maior período possível.

Vamos considerar neste trabalho um método devido a LEHMER, definido a partir de um processo congruencial multiplicativo:

$$R_n \equiv \alpha R_{n-1} + \beta \pmod m$$

com $n \in N$ e α, β e R_0 convenientemente escolhidos.

Apenas trataremos o caso $\beta = 0$ — *processo multiplicativo puro*.

Terá agora interesse investigar, de acordo com o que se disse acima, a periodicidade da sucessão construída a partir de

$$(1.\ 1) \qquad R_n \equiv \alpha R_{n-1} \pmod m .$$

Para isso vamos introduzir o conceito de gaussiano e estudar algumas das suas propriedades.

Vejamos primeiro um resultado preliminar sobre congruências [13]:

TEOREMA 1. *Se m.d.c.* $(l, m) = p$, *então* $l a \equiv l a' \pmod m$ *se e só se* $a \equiv a' \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{p}\right)$.

DEMONSTRAÇÃO. Visto que m.d.c. $(l, m) = p$, tem-se

$$l = l_1 p,\quad m = m_1 p \quad \text{com m.d.c.} \ (l_1, m_1) = 1 .$$

Por hipótese $l a - l a' = \alpha m$ com $\alpha \in Z$

$$l(a - a') = l_1 p (a - a') = \alpha m_1 p$$

logo

$$l_1(a-a') = \alpha\, m_1 .$$

Como l_1 e m_1 são inteiros primos entre si, conclui-se que $a-a'$ é múltiplo de m_1, ou seja, de m/p, o que prova a implicação directa. A recíproca é imediata.

Demonstra-se que

Teorema 2. *Se* ε *e* m *são inteiros primos entre si, então existe um número positivo* x *tal que*

$$\varepsilon^{\mathrm{x}} \equiv 1 \quad (mod\ \mathrm{m}) .$$

Demonstração. Dados ε e m, existem inteiros d_i, $0 \leq d_i < m$, tais que

$$\varepsilon^i \equiv d_i (\mathrm{mod}\, m) \quad i \in \mathbf{N} .$$

Como ε e m são primos entre si, $d_i \neq 0$ para todo o i e existem índices $j, k \leq m$ tais que $d_j = d_k$ com $j \neq k$. Admitamos que $j < k$.

Então, atendendo ao teorema 1,

$$\varepsilon^{k-j} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m)$$

e o inteiro pretendido é $x = k - j$.

Definição. O menor inteiro x satisfazendo o teorema 2 diz-se *gaussiano* de m na base ε e representa-se por

$$x = g\,s\,s(m, \varepsilon) .$$

Vamos agora enunciar três regras [7] que nos permitem calcular o gaussiano de inteiros que satisfaçam determinadas condições.

I. Se os inteiros m e n são primos entre si e com ε, então

$$g\,s\,s(m\,n, \varepsilon) = \mathrm{m.\,m.\,c.}\,[g\,s\,s(m, \varepsilon), g\,s\,s(n, \varepsilon)] .$$

II. Se π é um ímpar primo, ε é primo com π e r é tal que π^r é a maior potência de π que divide $\varepsilon^{g\,s\,s(\pi, \varepsilon)} - 1$, então

$$g\,s\,s(\pi^p, \varepsilon) = \begin{cases} g\,s\,s(\pi, \varepsilon) & \text{se } p \leq r \\ \pi^{p-r}\, g\,s\,s(\pi, \varepsilon) & \text{se } p > r . \end{cases}$$

III. Se existe um inteiro $t \geq 0$ tal que $\varepsilon = 4t + 3$ e r é tal que 2^r é a maior potência de 2 que divide $\varepsilon + 1$, então

$$g\,s\,s(2^p, \varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 1 \\ 2 & \text{se } 1 < p \leq r \\ 2^{p-r} & \text{se } p > r . \end{cases}$$

A aplicação do conceito de Gaussiano à determinação do período é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 3. *A sucessão dos* R_n *definida em* (1. 1.) *em que* α *e* m *são primos entre si e com* R_0, *é periódica com período igual a* $\mathrm{g\,s\,s}(\mathrm{m}, \alpha)$.

Demonstração. De $\mathrm{R}_n \equiv \alpha\, \mathrm{R}_{n-1} (\mathrm{mod}\, m)$ conclui-se facilmente que $\mathrm{R}_n \equiv \alpha^n\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m)$.

Seja $x = g\,s\,s(m, \alpha)$. Então x é o menor inteiro positivo tal que

$$\alpha^x \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m)$$

e então

$$\begin{aligned} \alpha^x \quad \mathrm{R}_0 &\equiv \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \\ \alpha^{x+1}\, \mathrm{R}_0 &\equiv \alpha\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{x+k}\, \mathrm{R}_0 &\equiv \alpha^k\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \end{aligned}$$

o que demonstra que a sucessão é periódica. O período não pode ser menor que x, porque se

$$\alpha^i\, \mathrm{R}_0 \equiv \alpha^j\, \mathrm{R}_0 (\mathrm{mod}\, m) \quad \text{com} \quad i, j < x$$

então, atendendo ao teorema 1, se $i < j$

$$\alpha^{j-i} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m)$$

o que vai contra a hipótese de x ser gaussiano de m na base α.

1. 2. Aplicação prática

Com base nestes resultados fomos construir uma tabela de 1002 números pseudo-aleatórios uniformes. Utilizámos um computador «Time-Sharing General Electric Mark I (GE 265)».

Para construir a tabela que apresentamos usámos em (1. 1)

$$\alpha = 10^4 + 3$$
$$m = 10^6$$
$$R_0 = 10^6 - 3$$

o que dá uma sucessão de período igual a $g\,s\,s\,(10^6, 10^4 + 3)$ (ver teorema 3).

Este valor calcula-se facilmente aplicando as regras indicadas:

Por aplicação da regra I tem-se

$$g\,s\,s\,(10^6, 10^4 + 3) = \text{m. m. c.}$$
$$[g\,s\,s\,(2^6, 10^4 + 3), g\,s\,s\,(5^6, 10^4 + 3)] .$$

Ora $g\,s\,s\,(2^6, 10^4 + 3)$ pode calcular-se pela regra III. Com efeito, com $t = 2500$, tem-se $10^4 + 3 = 4t + 3$. A maior potência de 2 que divide $10^4 + 3 + 1$ é 2^2, e como $6 > 2$, tem-se $g\,s\,s\,(2^6, 10^4 + 3) = 2^{6-2} = 16$.

Quanto ao cálculo de $g\,s\,s\,(5^6, 10^4 + 3)$, podemos aplicar a regra II, visto que $10^4 + 3$ é primo com 5. É fácil ver que

$$g\,s\,s\,(5, 10^4 + 3) = 4 ,$$

e que a maior potência de 5 que divide $(10^4 + 3)^4 - 1$ é 5^1. Como $6 > 1$, tem-se

$$g\,s\,s\,(5^6, 10^4 + 3) = 5^{6-1}\; g\,s\,s\,(5, 10^4 + 3) = 4 \cdot 5^5 .$$

Logo

$$g\,s\,s\,(10^6, 10^4 + 3) = \text{m. m. c.}$$
$$(16, 4 \cdot 5^5) = 50.000 .$$

Para a dimensão da tabela que construímos (1002), consideramos que este período dá uma margem de segurança suficiente o que será comprovado na secção seguinte.

O programa para a construção da tabela — ALEAS — encontra-se reproduzido e convenientemente detalhado no anexo I.

2. Critérios de aleatoriedade

Uma vez gerados os números pelo método congruencial multiplicativo de LEHMER, temos de verificar, de acordo com o que foi dito anteriormente, se satisfazem os seguintes critérios de aleatoriedade:

a) a sua distribuição aproxima tanto quanto possível a distribuição uniforme

b) os números têm correlação não significativamente diferente de zero.

Com esse objectivo fomos então aplicar aos números obtidos os seguintes testes de aleatoriedade e uniformidade: teste de frequência, teste de correlação serial e testes sobre a função de distribuição.

2. 1. Teste de frequência

Numa sucessão de números aleatórios uniformes é de esperar que cada dígito ocorra aproximadamente com igual frequência, não só globalmente como também por colunas. Testámos portanto essas hipóteses, aplicando a cada uma delas o teste do χ^2.

O teste foi feito com auxílio do computador, por meio do programa CONTAR (ver anexo II).

Os resultados obtidos (quadro I) levaram à não rejeição da hipótese a um nível de significância $\alpha = .10$ e portanto também aos níveis habituais de .05, .01 e .001.

QUADRO I

Frequência dos dígitos e valores de χ^2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		χ^2
coluna 1	92	107	97	113	97	100	104	112	83	97	1002	7.5609
coluna 2	97	117	93	104	109	95	99	113	85	90	1002	9.6168
coluna 3	77	94	110	106	112	101	101	112	94	95	1002	10.4950
colunn 4	101	100	100	103	79	108	91	99	102	119	1002	9.5968
coluna 5	103	94	92	102	101	94	95	113	116	92	1002	6.6228
coluna 6	90	97	104	124	99	106	95	96	88	103	1002	9.2974
total	560	609	596	652	597	604	585	645	568	596	6002	12.8104

2. 2. *Teste de correlação serial*

2. 2. 1. Descrição

Uma sucessão de números $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ diz-se aleatória se $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ são independentes e semelhantes. É pois óbvio que um modo de verificar a aleatoriedade consiste em testar a independência. Os testes frequentemente usados para esse fim são baseados na correlação serial.

O coeficiente de correlação serial circular de passo h é definido por

$$r_h = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_{i+h} - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, x_{i+h} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}$$

em que $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ e x_{i+h} é substituído por x_{i+h-n} para valores de i tais que $i + h > n$.

Partindo da hipótese da independência e normalidade das observações, ANDERSON [1] mostrou que a distribuição exacta de r_1 é dada por

$$\text{Prob}\,\{r_1 > R\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(\nu_i - R)^{\frac{(n-3)}{2}}}{\alpha_i}$$

$$\nu_{m+1} \leq R \leq \nu_m$$

em que

$$\nu_i = \cos(2\pi i/n)$$

$$\alpha_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\frac{n-1}{2}} (\nu_i - \nu_j) \qquad \text{se } n = 3, 5, \ldots$$

$$\alpha_i = \sqrt{\nu_i + 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\frac{n-2}{2}} (\nu_i - \nu_j) \qquad \text{se } n = 4, 6, \ldots$$

$$m = \begin{cases} 1, 2, \ldots, \dfrac{n-3}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Para r_k, com k primo com n, a distribuição é a mesma que a de r_1.

A par desta distribuição exacta, apresenta uma distribuição assintótica extremamente simples, baseada no facto de $r_1 + \frac{1}{n}$ estar aproximadamente distriduído como um coeficiente de correlação de PEARSON para $n+3$ observações e portanto que

$$r_1^* = \left(r_1 + \frac{1}{n-1}\right) \frac{(n-1)\sqrt{(n+1)}}{\sqrt{n^2 - 3n}}$$

é assintoticamente normal reduzida, simbolicamente $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Vários autores se têm debruçado sobre a distribuição dos coeficientes de correlação serial, baseando-se na hipótese da normalidade dos valores observados, evidentemente restrictiva, pois frequentemente a distribuição $F(x)$ subjacente não é conhecida.

WALD e WOLFOWITZ [12] apresentam um teste de permutação que satisfaz as seguintes condições:

i) Se $F(x)$ é contínua o tamanho da região crítica não depende da função de distribuição $F(x)$, o que torna o teste de significância possível quando nada é conhecido sobre $F(x)$, excepto a sua continuidade.

ii) Se $F(x)$ não é contínua, mas todos os momentos são finitos e a variância não é nula, o tamanho da região crítica aproxima-se quando $n \to \infty$ do tamanho que teria se $F(x)$ fosse contínua, e neste caso ainda é possível fazer um teste assintótico.

O teste baseia-se não propriamente no coeficiente de correlação r_h, mas sim na estatística

$$R_h = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+h}.$$

Uma vez que se está a trabalhar com a subpopulação de todas as permutações dos verdadeiros valores observados, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ são constantes, e portanto, a estatística R_h é uma função linear de r_h.

Demonstra-se que se h for primo com n a distribuição de R_h é a mesma de R_1. O seu valor médio e a sua variância são dados por

$$E(R_1) = \frac{S_1^2 - S_2}{n-1}$$

$$\sigma^2(R_1) = \frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + $$

$$+ \frac{S_1^4 - 4 S_1^2 S_2 + 4 S_1 S_3 + S_2^2 - 2 S_4}{(n-1)(n-2)} -$$

$$- \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}\right)^2$$

em que

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r.$$

A distribuição assintótica de

$$R_1^* = \frac{R_1 - E(R_1)}{\sigma(R_1)}$$

é normal reduzida.

Da relação

$$E[R_h R_k] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+h}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+k}\right)\right] =$$

$$= 4n E(x_1 x_2^2 x_3) + n(n-4) E(x_1 x_2 x_3 x_4) =$$

$$= 4\,n\,\frac{S_{121}}{n\,(n-1)\,(n-2)} +$$

$$+ n\,(n-4)\,\frac{S_{1111}}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}$$

em que

$$S_{121} = S_1^2\,S_2 - S_2^3 - 2\,S_1\,S_3 + 2\,S_4$$

$$S_{1111} = S_1^4 - 6\,S_1^2\,S_2^2 + 8\,S_1\,S_3 + 3\,S_2^2 - 6\,S_4$$

deduz-se que a covariância entre R_h^* e R_k^* tende para zero por valores negativos, quando $n \to +\infty$ (h e k primos com n).

Uma vez que o teste de ANDERSON exige a normalidade das observações, gerámos números normais a partir dos uniformes (ver secção 3) e aplicámos a esses números não só o teste de ANDERSON mas também o WALD-WOLFOWITZ. Os resultados obtidos levaram-nos a suspeitar da equivalência assintótica dos testes. Na realidade conseguimos provar a sua equivalência assintótica, na hipótese da normalidade, como vamos ver.

Recordemos que dois testes baseados em estatísticas assintoticamente normais se dizem assintoticamente equivalentes se os valores médios tiverem o mesmo limite e o cociente das variâncias tender para um.

O teste de ANDERSON baseia-se na estatística r_h que é assintoticamente normal de valor médio $-1/(n-1)$ e de desvio padrão $\sqrt{n^2-3\,n}/(n-1)\sqrt{n+1}$. O teste de WALD-WOLFOWITZ baseia-se na estatística R_h, que como vimos está relacionada com a primeira por

$$r_h = \frac{R_h - S_1^2/n}{S_2 - S_1^2/n}$$

e que é assintoticamente

$$\mathfrak{N}\left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}\,,\ \left(\frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{S_1^4 - 4\,S_1^2\,S_2 + 4\,S_1\,S_3 + S_2^2 - 2\,S_4}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}\right)^2\right)^{1/2}\right).$$

Chamando $E(r_h)$, $V(r_h)$ ao valor médio e à variância de r_h dados por ANDERSON, e $E_1(r_h)$, $V_1(r_h)$ ao valor médio e variância de r_h obtidos a partir de $E_1(R_h)$ e $V_1(R_h)$, valor médio e variância de R_h dados por WALD-WOLFOWITZ, tem-se

$$E_1(r_h) = \frac{E_1(R_h) - S_1^2/n}{S_2 - S_1^2/n} = -\frac{1}{n-1} = E(r_h)$$

e, na hipótese da normalidade e independência dos valores observados

$$V_1(r_h) = \frac{V_1(R_h)}{(S_2 - S_1^2/n)^2} = \frac{1}{(S_2 - S_1^2/n)^2}\left\{\frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{S_1^4 - 4\,S_1^2\,S_2 + 4\,S_1\,S_3 + S_2^2 - 2\,S_4}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{S_1^2 - S_2}{n-1}\right)^2\right\}.$$

Assim, tendo em conta que $n \cdot m_i = S_i$, facilmente se conclui que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_1(r_h)}{V(r_h)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n^3}{(n-1)^2\,(n-2)}\,m_1^4\right) = 1$$

isto é,

$$E(r_h) = E_1(r_h)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_1(r_h)}{V(r_h)} = 1$$

e portanto, na hipótese da normalidade e independência da amostra, os testes são de facto assintoticamente equivalentes, pois as estatísticas de teste r_h têm assintoticamente a mesma distribuição.

2. 2. 2. *Aplicação*

Atendendo ao facto da distribuição de R_h (ou r_h) ser a mesma de R_1 (ou r_1) para todo o h primo com n, resolvemos fazer o teste não para $n=1002$, mas para $n=997$, maior número primo mais próximo. Assim poderíamos testar todos os R_i (ou r_i) $(i=1,2,\cdots,n)$. É evidente que não há necessidade de os considerar todos. Adoptámos o critério sugerido por JENKINS, isto é, tomámos apenas os primeiros $m=n/4$ valores dos R_i (ou r_i) (anexo III).

Vejamos como formular o teste de WALD-WOLFOWITZ.

Assintoticamente, as variáveis aleatórias R_i^* $(i=1,\cdots,n)$ são normais de valor médio nulo, variância unitária e correlação nula, sendo portanto assintoticamente independentes duas a duas.

Consequentemente e para grandes valores de n, as variáveis aleatórias $|R_i^*|$ são também independentes duas a duas.

Da fórmula de BOOLE

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j}\sum P(A_j\cap A_i)+$$
$$+\cdots+(-1)^m P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

e atendendo que

$$1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right)$$

vem

$$1-\sum_{i=1}^{m}(1-P(A_i))\leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)\leq$$

$$\leq 1-\sum_{i=1}^{n}(1-P(A_i))+\sum_{i<j}\sum P(A_i^c\cap A_j^c).$$

Consideremos os acontecimentos A_i

$$A_i=[\,|R_i^*|<y\,].$$

Então, devido à simetria nos $|R_i^*|$ da distribuição conjunta dos $|R_i^*|$, tem-se

$$1-m(1-P(A_1))\leq P\left[\bigcap_{i=1}^{n}[\,|R_i^*|<y]\right]\leq$$

$$\leq 1-m(1-P(A_1))+\binom{m}{2}(1-P(A_1\cup A_2)).$$

Fixando $c=m(1-P(A_1))=2m(1-\phi(y))$, em que ϕ é a função de distribuição de uma normal $\mathfrak{N}(0,1)$, designemos por $y^{(1)}=$ $=\phi^{-1}(1-c/2m)$ a solução desta equação.

Como A_1 e A_2 são acontecimentos assintoticamente independentes podemos, para grandes valores de m, substituir

$$1-P(A_1\cup A_2) \text{ por } (1-P(A_1))^2=\frac{c^2}{m^2}$$

e portanto assintoticamente

$$1-c\leq P\left[\bigcap_{i=1}^{n}[\,|R_i^*|<y^{(1)}]\right]\leq$$

$$\leq 1-c+\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{c^2}{m^2}\leq 1-c+\frac{c^2}{2}.$$

Ao nível de significância α determinamos c de modo que $1-\alpha$ seja o ponto médio do intervalo anterior,

$$\alpha=1-\frac{(1-c)+(1-c+c^2/2)}{2}=c-c^2/4$$

ou seja, $c=2(1-\sqrt{1-\alpha})$; o erro no nível de significância é $<\frac{c^2}{4}=(1-\sqrt{1-\alpha})^2$ sendo o erro relativo $\frac{(1-\sqrt{1-\alpha})^2}{\alpha}\simeq\frac{\alpha}{4}$.

Somos então conduzidos à não rejeição da hipótese desde que todos os valores observados das variáveis aleatórias R_i^* caiam no intervalo $[-y^{(1)}, y^{(1)}]$.

Na aplicação do teste aos números uniformes e para $\alpha=0.10$, obtém-se $y^{(1)}=3.54$, o que conduziu à não rejeição da hipótese de independência.

Aos números normais aplicámos não só este teste como também o de ANDERSON.

A formulação assintótica do teste de ANDERSON é idêntica à do teste de WALD-WOLFOWITZ, porque as variáveis aleatórias r_h^* são também assintoticamente independentes duas a duas.

Ambos os testes conduziram à não rejeição da hipótese da independência dos valores observados ao nível de significância $\alpha=0.10$.

2. 3. *Testes de distribuição*

No que se segue consideraremos as estatísticas ordinais $(x'_1, \cdots, x'_n)$ dos números pseudo-aleatórios obtidas a partir da amostra inicial $(x_1, \cdots, x_n)$.

Vários métodos não paramétricos têm sido propostos para testar a hipótese de n observações terem sido extraídas de uma população com uma determidada função de distribuição $F(x)$. A maior parte destes métodos baseia-se na comparação da função de distribuição suposta $F(x)$ com a função de distribuição empírica $S_n(x)$.

Para testar a uniformidade dos números, utilizámos alguns destes testes que passamos a descrever.

2. 3. 1. *Teste de Kolmogorov-Smirnov*

TEOREMA 4 (KOLMOGOROV). *Seja* $S_n(x)$ *a função de distribuição empírica correspondente a uma amostra de dimensão* n *extraída de uma população com função de distribuição contínua* $F(x)$.

Considere-se a variável aleatória

$$D_n = \sup_{-\infty<x<+\infty} |S_n(x) - F(x)|$$

e

$$Q_n(\lambda) = \begin{cases} \operatorname{Prob}(\sqrt{n}\, D_n < \lambda) & se \ \lambda > 0 \\ 0 & se \ \lambda \leq 0 . \end{cases}$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\lambda) = Q(\lambda)$$

$$Q(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2\lambda^2) & se \ \lambda > 0 \\ 0 & se \ \lambda \leq 0 . \end{cases}$$

Com base neste teorema pode-se estabelecer um teste não paramétrico, para testar a hipótese H_0 que especifica a função de distribuição desconhecida $F(x)$.

Assim para uma amostra ordenada $(x'_1, \cdots, x'_n)$, a função de distribuição empírica é dada por

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x'_1 \\ k/n & x'_k \leq x < x'_{k+1} \quad k=1,\cdots,n-1 \\ 1 & x \geq x'_n \end{cases}$$

Seja d_n o valor observado da variável aleatória D_n para a amostra considerada. Conclui-se facilmente que

$$d_n = \max \{ |F(x'_k) - S_n(x'_k)| , \ |F(x'_k) - S_n(x'_{k-1})| \}$$

em que $k = 1, 2, \cdots, n$ e $S_n(x'_0) = 0$.

Para testar a hipótese H_0 ao nível de significância α, determina-se λ_0 tal que $Q(\lambda_0) = 1-\alpha$. Se $d_n \geq \lambda_0/\sqrt{n}$, rejeita-se a hipótese H_0. Caso contrário o teste não conduz à rejeição de H_0.

2. 3. 2. *Teste* W_n^2 *de Cramer-von Mises*

Este teste baseia-se na estatística

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} |S_n(x) - F(x)|^2 \ dF(x)$$

que se pode exprimir em função das estatísticas ordinais do seguinte modo

$$W_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ F(X'_j) - \frac{2j-1}{2n} \right\}^2 + \frac{1}{12n}.$$

SMIRNOV e VON MISES chegaram por métodos diferentes à função característica $\phi(t)$ de $W^2 = \lim_{n \to \infty} W_n^2$

$$\phi(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2it}}{\sin\sqrt{2it}}}$$

a partir da qual se obteve a função de distribuição

$$\text{prob}(W^2 \leq z) = \lim_{n \to \infty} \text{prob}(W_n^2 \leq z) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{z}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-1/2}{j} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{4j+1}\, e^{-\frac{4j+1}{16z}} K_{1/4}\left(\frac{(4j+1)^2}{16z}\right)$$

em que $K_{1/4}(x)$ é a função de BESSEL modificada, de 2.º tipo e de ordem $1/4$.

ANDERSON e DARLING [2] tabelaram os valores de z que satisfazem $\text{Prob}(W^2 \leq z) = \alpha$ com cinco casas decimais para $\alpha = 0.01$ (0.01) 0.99, 0.999.

2.3.3. *Teste U_n^2 de Stephens*

Outra medida da distância entre $S_n(x)$ e $F(x)$, sugerida par STEPHENS, é

$$U_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ S_n(x) - F(x) - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{+\infty} [S_n(y) - F(y)]\, dF(y) \right\}^2 dF(x)$$

que em termos das estatísticas ordinais vem

$$U_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ F(X'_j) - \frac{2j-1}{2n} - \overline{F} + \frac{1}{2} \right\}^2 + \frac{1}{12n}$$

com $\overline{F} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(X^{(j)})$.

A distribuição limite de U_n^2 é dada por

$$\text{Prob}(U^2 \leq z) =$$

$$= 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2\pi^2 k^2 z) =$$

$$= Q(\pi\sqrt{z})$$

em que $Q(x)$ é a função de distribuição limite da estatística de KOLMOGOROV.

2.3.4. *Teste de Sherman*

Outra estatística da mesma natureza das anteriores, apresentada por SHERMAN [8], é

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left| F(X'_j) - F(X'_{j-1}) - \frac{1}{n+1} \right|$$

com $F(X'_0) = 0$ e $F(X'_{n+1}) = 1$.

Esta variável aleatória tem valor médio

$$E(S_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{e}$$

e variância

$$\text{Var}(S_n) = \frac{2n^{n+2} + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} -$$

$$- \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n+2} \simeq \frac{2e-5}{ne^2}$$

e a distribuição assintótica da variável aleatória

$$\left(\frac{ne^2}{2e-5}\right)^{1/2} \left(S_n - \frac{1}{e}\right)$$

é normal reduzida.

2.3.5. Testes de Tiago de Oliveira [10]

i) *Teste do quadrado de* F

Uma medida de discrepância entre a função de distribuição empírica e a função de distribuição suposta, sugerida por GUMBEL [4] é

$$T_n = \frac{6(n+1)}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(F(X'_i) - \frac{i}{n+1} \right)^2$$

Facilmente se vê que

$$E(T_n) = 1$$

$$\mathrm{Var}(T_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 4{,}5$$

e que a distribuição assintótica desta variável é a de $6\, W_n^2$.

Pode-se a partir desta estatística obter uma outra consideravelmente mais simples, substituindo $\sum_{i=1}^{n} F(X'_i) \frac{i}{n+1}$ pelo seu valor médio $\frac{n(2n+1)}{6(n+1)}$.

Deste modo é-se conduzido a estudar,

$$T_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F^2(X_i)$$

que pelo teorema limite central é assintoticamente normal, com valor médio 1/3 e desvio padrão $2/3\sqrt{5n}$.

ii) *Teste do produto de* F

Suponhamos que a população tem uma função de distribuição $F(x)$ e consideremos a estatística

$$T_{2n} = \frac{1}{n} \log [F(X_1) \cdots F(X_n)] =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(F(X_i))}{n}.$$

Atendendo que T_{2n} é uma média e que o valor médio e a variância da variável aleatória $\log F(X)$ existem e são finitos

$$E(\log F(X)) = -1$$

$$\mathrm{Var}(\log F(X)) = 1$$

estamos em condições de aplicar o teorema limite central e concluir que

$$\sqrt{n}\,(T_{2n} + 1)$$

é uma variável aleatória assintoticamente normal reduzida.

2.3.6. Aplicações

Ao aplicar estes testes à sucessão de números aleatórios gerada, para testar a hipótese da uniformidade, obtiveram-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} d_n &= 0.0229 \\ w_n^2 &= 0.0771 \\ u_n^2 &= 0.0559 \\ s_n &= 0.7103 \\ t_{1n} &= 0.3263 \\ t_{2n} &= -0.1642 \end{aligned}$$

que conduzem à não rejeição da hipótese ao nível de significância $\alpha = 0.10$.

3. Geração de números aleatórios com diferentes distribuições

Nesta secção vamos ver como se podem obter, a partir de uma sucessão de números aleatórios com distribuição uniforme, sucessões de números aleatórios com qualquer outra distribuição.

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$. Se $F(x)$ for uma aplicação biunívoca de $\mathbf{R}$ sobre $]0,1[$, a nova variável aleatória $Y = F(X)$ é uniforme em $[0,1]$ pois para $0 \leq y \leq 1$

$$G(y) = \text{prob}(Y \leq y) = \text{prob}(F(X) \leq y) =$$

$$= \text{prob}(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y\,.$$

Podemos portanto obter a variável aleatória X a partir duma variável aleatória uniforme Y, fazendo

$$X = F^{-1}(Y)$$

ou seja

$$x_i = F^{-1}(y_i)\,.$$

A título de exemplo apresentam-se as transformações que permitem obter algumas das distribuições mais correntes

Logística	$F^{-1}(x) = -\log \dfrac{1-x}{x}$
Exponencial	$F^{-1}(x) = -\log(1-x)$
Cauchy	$F^{-1}(x) = \text{tg}(\pi(x - 1/2))$
Beta (1 , 2)	$F^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}$
Fréchet ($k=1$) (máximos)	$F^{-1}(x) = -1/\log(x)$
Fréchet ($k=2$) (máximos)	$F^{-1}(x) = 1/\sqrt{-\log(x)}$
Weibull ($k=3$) (máximos)	$F^{-1}(x) = -\exp(\log(-\log(x)/3))$
Gumbel (máx.)	$F^{-1}(x) = -\log(-\log(x))$
Pareto	$F^{-1}(x) = \dfrac{1}{1-x}$
Rayleigh	$F^{-1}(x) = \sqrt{-2\log(1-x)}$

Dado que a distribuição normal não tem inversa explícita, vamos apresentar um processo de obter números aleatórios normais a partir dos uniformes, embora existam fórmulas aproximadas para o cálculo dessa inversa.

Considere-se a densidade conjunta do par aleatório independente (X_1, X_2) normal reduzido

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right).$$

A transformação

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} X_1 &= R\cos\Theta \\ X_2 &= R\sin\Theta \end{aligned}$$

dá um par aleatório (R, Θ) com densidade

$$g(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right)\cdot r$$

o que mostra que as variáveis $R^2/2$ e Θ são independentes, sendo $R^2/2$ exponencial e Θ uniforme em $[0, 2\pi]$.

Tem-se ainda que as variáveis

$$V_1 = \int_0^R e^{-\frac{1}{2}r^2}\, r\, dr = 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}$$

$$U_2 = \int_0^\Theta \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{\Theta}{2\pi}$$

são uniformes em $[0,1]$.

Ora se V_1 é uniforme em $[0,1]$, também $U_1 = 1 - V_1 = e^{-\frac{R^2}{2}}$ é uniforme em $[0,1]$.

Invertendo as relações anteriores, obtém-se

$$R = \sqrt{-2\log U_1}$$

$$\Theta = 2\pi U_2\,.$$

Substituindo em (3. 1) vem finalmente

$$X_1 = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$$X_2 = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2)$$

que permitem calcular os números pseudo-aleatórios normais a partir dos uniformes.

Observe-se que os testes usando a normalidade foram feitos sobre os números normais x_i assim obtidos.

ANEXO I

No programa *ALEAS*

```
SFILE ALEA5/ALEA6, ALEA7/ALEA8
DIMENSION R (1500)
S = 9999.97
DO 1 I = 1, 1495, 6
DO 2 J = 1, 6
L = I + J - 1
RU = (S - INTF (S)) + (S * 3)/10 ↑ 4
K = RU
R (L) = RU - K
S = R (L) * 10 ↑ 4
2
M = I + 5
IF (I - 499) 1, 10, 10
10 WRITE (1, 3) (R (L), L = I, M)
1
DO 4 L = 499, 1499
J = L + 1
7 IF (R (L) - R (J)) 5, 5, 6
6 T = R (L)
R (L) = R (J)
R (J) = T
5 J = J + 1
IF (J - 1500) 7, 7, 4
4
DO 8 I = 499, 1495, 6
M = I + 5
WRITE (3, 3) (R (L), L = I, M)
8
3 FORMAT (6 (2X, F8.6))
STOP
```

1) são gerados 1.500 números pseudo-aleatórios $R(L)$, pelo método atrás indicado, obtendo-se $R(L+1)$ como resto da divisão de $R(L) * (10^4 + 3)$ por 10^6.

2) destes 1.500 números aproveitam-se apenas os últimos 1.002, seguindo a prática corrente de gerar uma sucessão de dimensão m, maior do que aquela que é necessária, n, e desprezar os primeiros $m - n$ termos.

3) seguidamente, procede-se à ordenação dos 1.002 números obtidos, uma vez que que para futuras aplicações de alguns testes é necessário considerar a sucessão ordenada.

Apresenta-se em seguida, a tabela dos números pseudo-aleatórios não ordenados.

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES

.57797800E+00	.51527600E+00	.30538000E+00	.71481500E+00
.29584300E+00	.31877300E+00	.68901600E+00	.23047100E+00
.39798500E+00	.48540000E-01	.54677400E+00	.37942700E+00
.40784300E+00	.64988900E+00	.83959000E+00	.41949700E+00
.22385200E+00	.19313200E+00	.90340200E+00	.73349200E+00
.11945200E+00	.87358300E+00	.44914800E+00	.82922600E+00
.74307800E+00	.11553000E-01	.56276500E+00	.33951000E+00
.11817000E+00	.52355000E-01	.70519100E+00	.22158000E-01
.64316400E+00	.56630100E+00	.71236200E+00	.75998100E+00
.91497000E-01	.24870500E+00	.79521800E+00	.56079300E+00
.61160900E+00	.91987800E+00	.53969400E+00	.55740500E+00
.72693400E+00	.52513300E+00	.90672900E+00	.76310000E-02
.33591300E+00	.13478300E+00	.23226000E+00	.29428300E+00
.71198100E+00	.94413900E+00	.22722400E+00	.92517300E+00
.50357600E+00	.27351600E+00	.97756000E+00	.53311300E+00
.73413700E+00	.56822400E+00	.94420400E+00	.87591700E+00
.80209900E+00	.39857700E+00	.96309500E+00	.83639700E+00
.48090200E+00	.45988700E+00	.24516900E+00	.42236500E+00
.91898200E+00	.57246600E+00	.37636400E+00	.76663400E+00
.63977600E+00	.68162700E+00	.31761700E+00	.12701600E+00
.54172300E+00	.85768300E+00	.40486700E+00	.88632400E+00
.89826000E+00	.29594600E+00	.34905100E+00	.55237000E+00
.35782400E+00	.31672900E+00	.23610500E+00	.75796700E+00
.94385300E+00	.36534300E+00	.52696800E+00	.26092700E+00
.54785000E-01	.12102000E-01	.57577000E-01	.94406300E+00
.46405600E+00	.95231800E+00	.38870000E-01	.81518700E+00
.32010500E+00	.63040000E-02	.56784000E-01	.71130000E-02
.14636800E+00	.11937100E+00	.72256000E-01	.77765100E+00
.84128400E+00	.36183400E+00	.42122500E+00	.50961500E+00
.67828900E+00	.92900300E+00	.81462700E+00	.71081700E+00
.30582200E+00	.14119100E+00	.33840000E+00	.14071000E-01
.74732000E+00	.44371200E+00	.45348200E+00	.17718700E+00
.40122000E+00	.40687800E+00	.99581000E+00	.82979000E-01
.40960000E-01	.72600000E+00	.17632100E+00	.73926000E+00
.81497800E+00	.22139200E+00	.58095400E+00	.27884100E+00
.24671000E+00	.83836600E+00	.17064500E+00	.95953600E+00
.23459400E+00	.64723400E+00	.28133200E+00	.16415600E+00
.52069000E-01	.84330900E+00	.62395300E+00	.40051500E+00
.34757000E+00	.74690400E+00	.28444500E+00	.30142400E+00
.14453700E+00	.80333100E+00	.72374500E+00	.62469700E+00
.84140600E+00	.58290300E+00	.77779200E+00	.25314500E+00
.21161500E+00	.78093100E+00	.65752200E+00	.19458200E+00
.40360100E+00	.21773000E+00	.94887400E+00	.58182000E+00
.94080200E+00	.83861000E+00	.61278300E+00	.67267000E+00
.72165500E+00	.71388400E+00	.98518900E+00	.84994700E+00
.19598000E-01	.38866000E-01	.77702900E+00	.62146200E+00
.48306800E+00	.13386700E+00	.74240000E-01	.62002800E+00
.13550400E+00	.44420100E+00	.33775900E+00	.60345600E+00
.37534100E+00	.54017800E+00	.40352400E+00	.45456100E+00
.97601900E+00	.11711300E+00	.48247300E+00	.18115400E+00

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

.85974000E-01	.99531700E+00	.16054300E+00	.91604800E+00
.22864300E+00	.12010400E+00	.39867200E+00	.91705500E+00
.30246500E+00	.56178500E+00	.53279700E+00	.56698800E+00
.58087700E+00	.51567300E+00	.27385500E+00	.37365900E+00
.71231700E+00	.30208000E+00	.70778500E+00	.96988100E+00
.72022100E+00	.36632000E+00	.29552300E+00	.11346600E+00
.30270000E-02	.27870400E+00	.87300700E+00	.68722700E+00
.33417300E+00	.73454500E+00	.65117500E+00	.69897700E+00
.86209700E+00	.55415500E+00	.21596300E+00	.28152700E+00
.11023500E+00	.68284800E+00	.52831100E+00	.69269000E+00
.97702600E+00	.19093500E+00	.92415400E+00	.31527900E+00
.73590700E+00	.27372900E+00	.11443100E+00	.65710600E+00
.35315000E-01	.25154300E+00	.18508000E+00	.35098500E+00
.89868700E+00	.56968900E+00	.59703600E+00	.15472600E+00
.72446300E+00	.79847900E+00	.18623900E+00	.95114300E+00
.28607700E+00	.63322600E+00	.16362600E+00	.74804900E+00
.73197000E+00	.89424300E+00	.11513300E+00	.67825500E+00
.58557700E+00	.52684200E+00	.16990000E-02	.99957500E+00
.74533700E+00	.60133600E+00	.15926200E+00	.94820000E-01
.48468600E+00	.31303600E+00	.29875800E+00	.47180400E+00
.45206300E+00	.98225600E+00	.50612400E+00	.76333800E+00
.67090400E+00	.54308000E-01	.24230000E+00	.72723600E+00
.53964800E+00	.99504000E-01	.34322200E+00	.24630900E+00
.83173200E+00	.81315800E+00	.19827000E-01	.32837100E+00
.69559300E+00	.15581000E-01	.85805300E+00	.10623400E+00
.65466900E+00	.65208600E+00	.81883800E+00	.83770900E+00
.60739700E+00	.79298600E+00	.23811900E+00	.90561100E+00
.82721500E+00	.63359300E+00	.82683400E+00	.81775100E+00
.96256100E+00	.49421900E+00	.67091900E+00	.20694200E+00
.36871000E-01	.82017700E+00	.23131400E+00	.83099600E+00
.44858400E+00	.18178000E+00	.34395400E+00	.57272500E+00
.97113600E+00	.27434000E+00	.21977800E+00	.43994300E+00
.75296600E+00	.91816900E+00	.44472300E+00	.56546200E+00
.31751100E+00	.58580000E-01	.97972700E+00	.20709400E+00
.56320800E+00	.76588600E+00	.16072700E+00	.74765200E+00
.76349400E+00	.23539900E+00	.69866000E+00	.69494800E+00
.56680900E+00	.78743200E+00	.67946400E+00	.68179500E+00
.99658800E+00	.86729600E+00	.56407700E+00	.46600500E+00
.45126900E+00	.45305000E-01	.18843700E+00	.93039100E+00
.70429000E+00	.16771000E-01	.76347900E+00	.82766000E-01
.90408900E+00	.60200700E+00	.87514300E+00	.55941000E-01
.57410200E+00	.74632500E+00	.48436500E+00	.10772900E+00
.61276800E+00	.52003700E+00	.92708400E+00	.62094300E+00
.29352400E+00	.11845600E+00	.91423600E+00	.10339500E+00
.26480700E+00	.86189500E+00	.53175900E+00	.18789900E+00
.55005500E+00	.19566500E+00	.24059100E+00	.63226500E+00
.54770500E+00	.69008100E+00	.87666900E+00	.31930700E+00
.31195000E-01	.40453000E-01	.65093000E+00	.25683800E+00
.14896200E+00	.67095000E-01	.14931300E+00	.57766900E+00
.42444400E+00	.71531900E+00	.33275400E+00	.53961400E+00

NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

.75607900E+00	.55437000E-01	.53719100E+00	.52548400E+00
.41730300E+00	.28276300E+00	.47356200E+00	.43093000E-01
.56555000E-01	.71760700E+00	.22780400E+00	.72525200E+00
.69727100E+00	.80526400E+00	.26085500E+00	.32977500E+00
.73789000E+00	.11610600E+00	.40865100E+00	.73947300E+00
.95184900E+00	.34538500E+00	.88213200E+00	.96216000E+00
.48758500E+00	.31343300E+00	.26723300E+00	.13064800E+00
.86853600E+00	.96556300E+00	.52489300E+00	.50274800E+00
.99313900E+00	.37208700E+00	.99104900E+00	.46127500E+00
.13483200E+00	.72831900E+00	.37663800E+00	.51404000E+00
.94205300E+00	.35457000E+00	.76759900E+00	.29385600E+00
.43823800E+00	.69615400E+00	.62486800E+00	.55853500E+00
.21826000E-01	.32338100E+00	.78438400E+00	.19088900E+00
.46625300E+00	.93156600E+00	.45708300E+00	.19873200E+00
.91995800E+00	.34102100E+00	.22890300E+00	.71487600E+00
.90637800E+00	.49705700E+00	.60781000E-01	.99713300E+00
.32395000E+00	.46998800E+00	.28865600E+00	.42831600E+00
.44611200E+00	.45512600E+00	.62346500E+00	.51623700E+00
.92130100E+00	.77278300E+00	.15114400E+00	.89370900E+00
.77295500E+00	.86827300E+00	.33263200E+00	.31854400E+00
.39951100E+00	.31190700E+00	.38660000E-02	.67355500E+00
.57440800E+00	.79899800E+00	.37578400E+00	.96655500E+00
.44608100E+00	.14985800E+00	.34323000E-01	.33035500E+00
.53797000E+00	.30980100E+00	.94042000E+00	.22768000E-01
.74851000E+00	.34913800E+00	.43001400E+00	.42660700E+00
.35114100E+00	.46318200E+00	.21404100E+00	.49685000E-01
.99429900E+00	.97224600E+00	.37843900E+00	.52481300E+00
.70142200E+00	.32164200E+00	.38414600E+00	.60980400E+00
.87094700E+00	.81682000E-01	.67099000E-01	.18747100E+00
.27631200E+00	.94768000E+00	.63823500E+00	.26562700E+00
.65954000E-01	.73994600E+00	.68349300E+00	.97706300E+00
.76331100E+00	.40379500E+00	.16380900E+00	.57965300E+00
.26682100E+00	.95390000E-02	.41512100E+00	.45614800E+00
.84992000E+00	.75248900E+00	.14836700E+00	.11438200E+00
.16104700E+00	.95295900E+00	.44948400E+00	.18716600E+00
.22363900E+00	.56261000E-01	.77940900E+00	.43231400E+00
.43613200E+00	.63270800E+00	.97408100E+00	.73263700E+00
.57196600E+00	.37761100E+00	.24443600E+00	.95949000E-01
.77957700E+00	.11128400E+00	.17641300E+00	.65506200E+00
.58240300E+00	.77903900E+00	.73094700E+00	.66778800E+00
.87888100E+00	.45118900E+00	.24397800E+00	.51693900E+00
.94245000E+00	.32304600E+00	.42644300E+00	.71032900E+00
.42154500E+00	.71492200E+00	.36427900E+00	.88077000E+00
.33960500E+00	.72130000E-01	.51842300E+00	.78607400E+00
.95068000E-01	.96498300E+00	.72481300E+00	.30905300E+00
.46137000E+00	.88793000E-01	.19438700E+00	.45752100E+00
.58695000E+00	.26387200E+00	.51308300E+00	.36429000E+00
.99524500E+00	.43553400E+00	.64183600E+00	.28717200E+00
.58469200E+00	.67408900E+00	.91658600E+00	.60898000E+00
.62872900E+00	.17485200E+00	.48269000E-01	.83752600E+00

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

.77579300E+00	.25813500E+00	.12282400E+00	.60562300E+00
.49322000E-01	.36924900E+00	.60118700E+00	.67108300E+00
.84775400E+00	.78508000E-01	.31929600E+00	.91671900E+00
.94452500E+00	.81224000E-01	.48808900E+00	.35034400E+00
.48807300E+00	.19771000E+00	.69350200E+00	.10476900E+00
.18370000E-02	.37327800E+00	.89647500E+00	.43780700E+00
.38425300E+00	.67824000E+00	.43294300E+00	.73227100E+00
.90875800E+00	.30790900E+00	.13845000E-01	.49597400E+00
.22379100E+00	.58259800E+00	.72511900E+00	.36172700E+00
.35278900E+00	.94761800E+00	.27700000E-01	.87343000E-01
.69418900E+00	.97328400E+00	.75752800E+00	.55563500E+00
.21429000E-01	.35490600E+00	.12554000E+00	.77441600E+00
.48294600E+00	.91279800E+00	.71767200E+00	.87649700E+00
.60217900E+00	.59227200E+00	.49486400E+00	.11969200E+00
.27756300E+00	.46364000E+00	.79305100E+00	.88681200E+00
.78253700E+00	.72221600E+00	.32317200E+00	.68567100E+00
.76553900E+00	.68831100E+00	.17116400E+00	.14908000E+00
.25000600E+00	.80723800E+00	.79796400E+00	.34853000E-01
.63437500E+00	.64930900E+00	.39511000E-01	.22580100E+00
.69208300E+00	.90983800E+00	.10674100E+00	.72973800E+00
.57156900E+00	.40913600E+00	.58559200E+00	.67947600E+00
.79627000E+00	.92516000E-01	.43700200E+00	.33282700E+00
.26462400E+00	.30291000E-01	.99690800E+00	.72603000E-01
.25006700E+00	.41777200E+00	.97624800E+00	.40661800E+00
.40103700E+00	.57527400E+00	.46095800E+00	.96768400E+00
.74097300E+00	.94810700E+00	.91197800E+00	.51361300E+00
.66831000E+00	.10658500E+00	.16524300E+00	.92721700E+00
.95648800E+00	.74601900E+00	.43169200E+00	.21631100E+00
.75394200E+00	.68672400E+00	.29726200E+00	.51370400E+00
.58411200E+00	.87401000E+00	.72289100E+00	.77211000E-01
.34543400E+00	.37819100E+00	.44516000E-01	.28964400E+00
.31134600E+00	.39457900E+00	.97307400E+00	.65881500E+00
.13028500E+00	.24348600E+00	.59450300E+00	.81753700E+00
.82568900E+00	.37022600E+00	.36974100E+00	.52362300E+00
.79599600E+00	.34511000E+00	.13472600E+00	.65988300E+00
.81464200E+00	.86345100E+00	.10039300E+00	.23413300E+00
.30066000E-01	.74556200E+00	.85268200E+00	.37918300E+00
.96570400E+00	.93675400E+00	.35253000E+00	.35284600E+00
.51999500E+00	.50734100E+00	.93587300E+00	.53793500E+00
.96637500E+00	.65263600E+00	.31365000E+00	.44226300E+00
.95328300E+00	.69294900E+00	.57179800E+00	.69864100E+00
.50415600E+00	.73595000E-01	.17125500E+00	.64882000E-01
.17431000E-01	.36488500E+00	.94795800E+00	.42380000E+00
.26654600E+00	.26213300E+00	.11284400E+00	.78320500E+00
.39993900E+00	.58564900E+00	.25185200E+00	.27591100E+00
.94104600E+00	.28074800E+00	.32591800E+00	.15973100E+00
.78830500E+00	.41774200E+00	.67098000E+00	.81747600E+00
.21515500E+00	.19194200E+00	.99797600E+00	.75696000E+00
.87003100E+00	.92366200E+00	.39284300E+00	.61099400E+00
.77637300E+00	.58214000E-01	.31651900E+00	.13739200E+00

NUMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS UNIFORMES (CONT.)

.33261700E+00	.16591100E+00	.60494000E+00	.21896600E+00
.31220100E+00	.94206400E+00	.46904600E+00	.86352700E+00
.86356200E+00	.20698700E+00	.49477200E+00	.20389000E+00
.51013800E+00	.90599300E+00	.64305700E+00	.49786600E+00
.15036600E+00	.10939200E+00	.24983800E+00	.12826700E+00
.57684000E-01	.12499000E-01	.26052000E-01	.60290700E+00
.88052900E+00	.93562500E+00	.57638000E-01	.55459800E+00
.64234000E+00	.32408300E+00	.80553200E+00	.74115200E+00
.74155200E+00	.74818600E+00	.10567300E+00	.45382000E-01
.95160500E+00	.90324600E+00	.16899700E+00	.47510000E+00
.42093500E+00	.60957500E+00	.58144200E+00	.16311800E+00
.67297900E+00	.81248700E+00	.30394600E+00	.36725000E+00
.60617600E+00	.58229300E+00	.67244500E+00	.47030800E+00
.49396300E+00	.11430500E+00	.39787900E+00	.98010400E+00
.98477700E+00	.72883800E+00	.56618300E+00	.52945100E+00
.10205700E+00	.87120200E+00	.63829600E+00	.87616200E+00
.24423800E+00	.11171200E+00	.45015500E+00	.90304800E+00
.18475900E+00	.14567800E+00	.21269800E+00	.61792200E+00
.72058000E-01	.79341300E+00	.51186200E+00	.15359700E+00
.42957100E+00	.23100000E-03	.30858400E+00	.76788500E+00
.15573700E+00	.83644300E+00	.93880300E+00	.84359900E+00
.52399300E+00	.49736200E+00	.11345500E+00	.88855200E+00
.18277500E+00	.30330100E+00	.91847800E+00	.53555500E+00
.15552300E+00	.69957200E+00	.81481000E+00	.54242100E+00
.84067300E+00	.25648700E+00	.63838800E+00	.79196400E+00
.11663000E-01	.66935900E+00	.60014900E+00	.29199400E+00
.81693100E+00	.75850100E+00	.28603200E+00	.17532500E+00
.77991300E+00	.46922500E+00	.65697300E+00	.69977000E+00
.79904700E+00	.87184300E+00	.48910000E-01	.24814000E+00
.14777200E+00	.16166900E+00	.17278100E+00	.32824900E+00
.47452400E+00	.65901400E+00	.11452300E+00	.57290800E+00
.80274000E+00	.80919100E+00	.33507300E+00	.73993100E+00
.53085900E+00	.18251200E+00	.67037000E+00	.71213000E+00
.43231800E+00	.47429100E+00	.33135000E+00	.49731600E+00
.65555400E+00	.50483900E+00	.90395200E+00	.22830400E+00
.72400500E+00	.21946900E+00	.34911200E+00	.16290500E+00
.53610800E+00	.68849400E+00	.27680000E-02	.68393100E+00
.36530100E+00	.10722500E+00	.57585700E+00	.29919600E+00
.86002200E+00	.79597700E+00	.15431800E+00	.64151200E+00
.43707000E-01	.20006000E+00	.19908700E+00	.46869100E+00
.31479500E+00	.88978800E+00	.54610300E+00	.66354600E+00
.44672200E+00	.56047200E+00	.40630100E+00	.23388900E+00
.58792700E+00	.32427000E-01	.36562200E+00	.31253200E+00
.26184700E+00	.25096300E+00	.38500000E+00	.15729000E+00
.36691900E+00	.28639400E+00	.80037500E+00	.15097200E+00
.17658000E+00	.33403200E+00	.32268300E+00	.80139400E+00
.33927000E+00	.71419000E+00	.37863000E-01	.74136500E+00
.87842400E+00	.87217900E+00	.40685100E+00	.72870100E+00
.19248000E+00	.37831300E+00	.26558500E+00	.64621200E+00
.54876000E-01	.92790400E+00	.82500300E+00	.50171100E+00

ANEXO II

Neste programa a variável duplamente indexada $K(L,M)$, representa o número de vezes que o dígito $L(L=0,1,\cdots,9)$ ocorre na coluna M $(m=1,\cdots,6)$.

A contagem dos dígitos de cada número foi feita permutando esses dígitos circularmente e estudando sempre o algarismo das décimas.

CONTAR

```
5    SFILE ALEA5/ALEA6
7    DIMENSION K (10,6), L (10)
9    Q = 0
10   INPUT, N
15   DO 25 M = 1,6
16   DO 27 L = 1,10
19   27 K (L, M) = 0
20   25
30   DO 1 J = 1, N
40   READ (1), U
50   DO 40 M = 1,6
60   20 U = U * 10
70   I = INTF (U)
80   19 IF (I - 1) 2,3,4
90   4 IF (I - 3) 5,6,7
100  7 IF (I - 5) 8,9,10
110  10 IF (I - 7) 11,12,13
120  13 IF (I - 9) 14,15,16
130  2 K (1, M) = K (1, M) + 1
140  GO TO 16
150  3 K (2, M) = K (2, M) + 1
160  GO TO 16
170  5 K (3, M) = K (3, M) + 1
180  GO TO 16
190  6 K (4, M) = K (4, M) + 1
200  GO TO 16
210  8 K (5, M) = K (5, M) + 1
220  GO TO 16
230  9 K (6, M) = K (6, M) + 1
240  GO TO 16
250  11 K (7, M) = K (7, M) + 1
260  GO TO 16
270  12 K (8, M) = K (8, M) + 1
280  GO TO 16
290  14 K (9, M) = K (9, M) + 1
295  GO TO 16
300  15 K (10, M) = K (10, M) + 1
320  16 S = INTF (U) * 10 ↑ (- 6)
330  P = U + S
340  U = P - INTF (P)
350  40
360  1
365  PRINT, ↑ ↑ ↑
370  PRINT, «       FREQUENCIA DOS DIGITOS»
380  PRINT, ↑ ↑
390  PRINT, «  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9»
400  PRINT, ↑ ↑
410  DO 35 M = 1,6
420  PRINT 37, (K (L, M), L = 1, 10)
425  PRINT, ↑
430  35
440  PRINT, ↑
450  DO 70 I = 1, 10
455  S = 0
460  DO 80 M = 1,6
470  80 S = S + K (I, M)
480  70 L (I) = S
490  PRINT 37, (L (I), I = 1, 10)
500  PRINT, ↑ ↑ ↑ ↑
510  PRINT, «       TESTES DE FREQUENCIA»
520  PRINT, ↑ ↑
530  DO 50 M = 1,6
535  V = 0
540  DO 60 LL = 1, 10
550  X = (K (LL, M) - 100.2) ↑ 2
560  V = V + X
570  60
580  PRINT, «QUI QUADRADO», V/100.2
590  PRINT, ↑
600  50
610  PRINT, ↑ ↑
620  DO 90 I = 1, 10
630  Y = (L (I) - 601.2) ↑ 2
640  Q = Q + Y
650  90
670  PRINT, «QUI QUADRADO», Q/601.2
690  37 FORMAT (10 (2X, I4))
700  STOP
```

ANEXO III

Nas tabelas que a seguir se apresentam, a leitura dos números é sempre feita por linhas, i. e.,

$$r_1 = .39716237E-01\,,$$

$$r_2 = -\,.37520631E-01\,,\ldots$$

na 1.ª tabela.

.39716237E-01	-.37520631E-01	-.14278973E-01	-.51366374E-01
-.38276593E-02	.50278832E-02	-.31362432E-01	-.75269564E-02
.55162760E-02	-.14652047E-02	-.59629254E-02	.46685247E-01
-.44001854E-01	-.78604741E-02	-.14549770E-01	-.78328886E-02
.43103396E-01	-.44799081E-01	.39915299E-01	.34807469E-01
-.29518931E-01	-.95203409E-02	.24378856E-01	-.18254022E-01
.49493122E-01	-.28119958E-01	-.57350242E-01	-.18143435E-01
-.18636305E-02	-.43167027E-01	.38122191E-01	.25005224E-01
-.70880197E-01	.27800557E-02	-.35195327E-01	.34162372E-02
.54008788E-01	.81378899E-02	-.36441621E-01	-.51526461E-02
.40162168E-01	-.51273360E-03	-.45907196E-02	-.17583007E-01
-.58788644E-01	.54901591E-02	-.89574805E-02	.57818301E-01
.81034515E-02	.13157109E-02	.32882353E-01	-.32691065E-01
.55943098E-01	.74237673E-01	-.29974260E-01	-.65222459E-01
.13558032E-01	.31074892E-01	-.50403607E-01	.34352235E-01
-.40402867E-01	-.16979240E-01	-.37197400E-01	-.92601633E-01
-.30364538E-01	.25413590E-01	-.32988916E-01	-.23314680E-01
-.40117023E-01	-.15152792E-01	-.25052091E-01	.71562759E-02
-.12613589E-01	-.25807022E-01	-.26928818E-01	.53904271E-01
.56114232E-01	-.33127109E-01	-.34813190E-01	.87896002E-02
-.43546931E-01	.37833895E-02	.11855627E-01	-.26749605E-01
.13948195E-01	-.59401114E-01	-.21685085E-01	-.45517783E-01
.35551980E-01	.26650203E-01	.44808407E-01	.30007034E-01
-.44152991E-01	.10180996E-01	.56545116E-01	-.35689394E-01
-.40320672E-02	.63253680E-02	.27206145E-01	.17240293E-01
.21555290E-01	-.65422632E-02	.24461743E-01	.12739765E-02
.22679474E-01	.17383817E-01	.10193614E-01	-.11694853E-02
-.24375632E-01	-.94847944E-02	.37623204E-01	-.28798489E-01
-.25974666E-01	-.14541170E-01	.61688433E-02	-.27919295E-01
-.22474481E-01	.21841405E-01	-.86520803E-02	-.55333710E-02
-.27492415E-01	-.24906595E-01	-.23561762E-01	-.37669711E-03
-.34527169E-01	.19692103E-01	.50267455E-01	.55179917E-01
-.20366777E-01	.47730238E-01	-.83348805E-02	.16840481E-02
.36228038E-01	-.50363799E-01	.26111527E-01	.37212356E-01
.23148490E-01	.50843176E-01	-.39904864E-02	-.17209551E-01
-.12994048E-02	-.13076359E-01	-.25623914E-02	-.45562759E-01
-.28340921E-01	.57351637E-02	.50805807E-01	.73036060E-01
.40040227E-01	-.58861986E-01	-.11308594E-01	.11788390E-01
.80205007E-01	-.26388910E-01	.58485853E-01	-.11043586E-01
.70476594E-02	.68815285E-02	-.18848295E-01	.14270510E-01
-.43717935E-01	-.13218234E-01	-.56533284E-01	.11594233E-01
.45204617E-01	-.25313351E-01	-.45806892E-01	.24957839E-01
-.85916492E-02	-.47695165E-01	-.12528483E-01	.56865038E-01
-.18214528E-01	-.14246370E-01	.45737427E-02	.21733114E-01
.42837650E-01	.38782057E-02	-.54587379E-02	.39616509E-03
-.12290766E-01	.61716270E-03	-.22356494E-01	.21782523E-01
.18099975E-01	-.37605808E-01	.30878903E-01	.16616189E-01
-.32770016E-01	.1727851E-01	-.64739214E-02	-.17742202E-01
.28373677E-01	-.77637282E-02	-.20726680E-01	.27054743E-01
.12719703E-01	-.38415461E-01	.17869359E-01	-.17701056E-02
-.42618106E-01	.55885717E-02	.34341384E-01	.31403043E-01
-.24931244E-01	-.11901336E-01	-.26645156E-02	.27919980E-01
.16786102E-01	-.51901793E-01	-.64658579E-01	-.19231077E-01
.65445298E-01	-.29676430E-01	-.98341601E-02	-.34145652E-01
-.51378351E-01	.33365864E-02	.12973097E-01	-.21554560E-01
-.33248553E-01	-.18102043E-01	-.17856383E-01	-.10465274E-01
.78208990E-01	-.27106243E-01	.11551550E-01	.29543251E-01
.51297760E-01	.28974268E-01	.30905898E-01	-.54492633E-01
-.12098545E-01	-.20648670E-01	-.31674073E-01	-.14645691E-01
.24377981E-01	.47538865E-02	-.42395362E-01	.17866005E-01
.35424709E-01	-.67060023E-01	-.41200070E-01	.16684785E-01
.64481639E-01	-.21231787E-01	.16151218E-01	.48703330E-01
-.25152566E-01	.32288869E-01	.00000000E+00	.00000000E+00

.12862962E+01	-.11535091E+01	-.41933743E+00	-.15908768E+01
-.89194954E-01	.19053932E+00	-.95898013E+00	-.20605061E+00
.20596697E+00	-.14568299E-01	-.15664504E+00	.15064375E+01
-.13582419E+01	-.21658597E+00	-.42789151E+00	-.21571458E+00
.13932918E+01	-.13834252E+01	.12925843E+01	.11312350E+01
-.90074651E+00	-.26901685E+00	.80180964E+00	-.54490371E+00
.15951344E+01	-.85655491E+00	-.17798969E+01	-.54141040E+00
-.27154014E-01	-.13318709E+01	.12359425E+01	.82159573E+00
-.22072914E+01	.11953358E+00	-.10800560E+01	.13962966E+00
.17377780E+01	.28878011E+00	-.11194247E+01	-.13104945E+00
.13003825E+01	.15518940E-01	-.11329897E+00	-.52370725E+00
-.18253360E+01	.20514197E+00	-.25123887E+00	.18581152E+01
.28769225E+00	.73276959E-01	.10704233E+01	-.10009498E+01
.17988802E+01	.23767803E+01	-.91512971E+00	-.20285713E+01
.45999485E+00	.10133281E+01	-.15604644E+01	.11168548E+01
-.12445549E+01	-.56781232E+00	-.11432987E+01	-.28934413E+01
-.92745806E+00	.83449546E+00	-.10103586E+01	-.70476285E+00
-.12355255E+01	-.44694016E+00	-.75964524E+00	.25777228E+00
-.36673027E+00	-.78349246E+00	-.81892845E+00	.17344764E+01
.18042860E+01	-.10147238E+01	-.10679848E+01	.30936673E+00
-.13438715E+01	.15122749E+00	.40621824E+00	-.81326736E+00
.47231957E+00	-.18446831E+01	-.65328621E+00	-.14061280E+01
.11547531E+01	.87355833E+00	.14471508E+01	.97959598E+00
-.13630161E+01	.35331900E+00	.18178971E+01	-.10956628E+01
-.95651915E-01	.23152569E+00	.89111979E+00	.57631236E+00
.71261712E+00	-.17494552E+00	.80442792E+00	.71958627E-01
.74812853E+00	.58084610E+00	.35371759E+00	-.52269341E-02
-.73827684E+00	-.26789599E+00	.12201802E+01	-.87798874E+00
-.78878809E+00	-.42761967E+00	.22658066E+00	-.85021621E+00
-.67822212E+00	.72165511E+00	-.24159171E+00	-.14307602E+00
-.83673167E+00	-.75504924E+00	-.71256783E+00	.19816143E-01
-.10589498E+01	.65376162E+00	.16195945E+01	.17747723E+01
-.61164268E+00	.15394473E+01	-.23157180E+00	.84912220E-01
.11761088E+01	-.15592069E+01	.85654231E+00	.12072020E+01
.76294411E+00	.16377807E+01	-.94338437E-01	-.51191031E+00
-.93309105E-02	-.38134851E+00	-.49226901E-01	-.14075487E+01
-.86353479E+00	.21288133E+00	.16366003E+01	.23388231E+01
.12965306E+01	-.18276528E+01	-.32550727E+00	.40409433E+00
.25652801E+01	-.80187349E+00	.18792023E+01	-.31713605E+00
.25434124E+00	.24909340E+00	-.56367596E+00	.48250105E+00
-.13492733E+01	-.38583016E+00	-.17540924E+01	.39796119E+00
.14596665E+01	-.76789809E+00	-.14152605E+01	.82009892E+00
-.23968277E+00	-.14749084E+01	-.36404189E+00	.18280029E+01
-.54365613E+00	-.41830754E+00	.17619365E+00	.71823433E+00
.13848973E+01	.15422261E+00	-.14071846E+00	.44229786E-01
-.35653273E+00	.51210793E-01	-.67449508E+00	.71979508E+00
.60346852E+00	-.11561997E+01	.10071371E+01	.55659778E+00
-.10034437E+01	.57727765E+00	-.17278669E+00	-.52873601E+00
.92800050E+00	-.21352990E+00	-.62301153E+00	.88633718E+00
.43351321E+00	-.11817755E+01	.59618367E+00	-.24199692E-01
-.13145312E+01	.20825069E+00	.11165121E+01	.10236940E+01
-.75582784E+00	-.34423116E+00	-.52452860E-01	.91366884E+00
.56196510E+00	-.16077900E+01	-.20107591E+01	-.57576749E+00
.20990414E+01	-.90572169E+00	-.27893196E+00	-.10468982E+01
-.15912552E+01	.13711360E+00	.44151757E+00	-.64916310E+00
-.10185601E+01	-.54010290E+00	-.53234282E+00	-.29886796E+00
.25022287E+01	-.82453306E+00	.39661289E+00	.96494572E+00
.16521404E+01	.94697233E+00	.10079898E+01	-.16896310E+01
-.35046073E+00	-.62054726E+00	-.96882445E+00	-.43092154E+00
.80178201E+00	.18188415E+00	-.13074951E+01	.59607772E+00
.11507328E+01	-.20866174E+01	-.12697374E+01	.55876463E+00
.20686008E+01	-.63896714E+00	.54190999E+00	.15W01860E+01
-.76281911E+00	.10516759E+01	.00000000E+00	.00000000E+00

.12870467E+01	-.11541821E+01	-.41958211E+00	-.15918051E+01
-.89247007E-01	.19065049E+00	-.95953969E+00	-.20617084E+00
.20608714E+00	-.14576810E-01	-.15673645E+00	.15073165E+01
-.13590344E+01	-.21671235E+00	-.42814119E+00	-.21584045E+00
.13941046E+01	-.13842324E+01	.12933385E+01	.11318951E+01
-.90127209E+00	-.26917583E+00	.80227747E+00	-.54522166E+00
.15960651E+01	-.85705470E+00	-.17609375E+01	-.54172631E+00
-.27169867E-01	-.13326480E+01	.12366636E+01	.82207510E+00
-.22085793E+01	.11960331E+00	-.10806862E+01	.13971113E+00
.17387920E+01	.28894859E+00	-.11200778E+01	-.13112592E+00
.13011413E+01	.15527985E-01	-.11336508E+00	-.52401283E+00
-.18264011E+01	.20526166E+00	-.25138548E+00	.18591994E+01
.28786010E+00	.73319704E-01	.10710478E+01	-.10015339E+01
.17999298E+01	.23781671E+01	-.91566368E+00	-.20297550E+01
.46026323E+00	.10139194E+01	-.15613749E+01	.11175065E+01
-.12452811E+01	-.56814364E+00	-.11439658E+01	-.28951296E+01
-.92799922E+00	.83498236E+00	-.10109481E+01	-.70517408E+00
-.12362464E+01	-.44720095E+00	-.76008849E+00	.25792268E+00
-.36694426E+00	-.78394962E+00	-.81940628E+00	.17354885E+01
.18053388E+01	-.10153159E+01	-.10686079E+01	.30954723E+00
-.13446556E+01	.15131572E+00	.40645525E+00	-.81374189E+00
.47259514E+00	-.18457595E+01	-.65366740E+00	-.14069484E+01
.11554269E+01	.87406803E+00	.14479951E+01	.98016754E+00
-.13638114E+01	.35352514E+00	.18189578E+01	-.10963022E+01
-.95707735E-01	.23166077E+00	.89163973E+00	.57664861E+00
.71303290E+00	-.17504761E+00	.80489728E+00	.72000603E-01
.74856504E+00	.58118500E+00	.35392396E+00	-.52299937E-02
-.73870762E+00	-.26805231E+00	-.12208921E+01	-.87850104E+00
-.78924834E+00	-.42786939E+00	.22671286E+00	-.85071231E+00
-.67861786E+00	.72207617E+00	-.24173268E+00	-.14315951E+00
-.83721989E+00	-.75548980E+00	-.71298361E+00	.19827696E-01
-.10595677E+01	.65414307E+00	.16205395E+01	.17758079E+01
-.61199957E+00	.15403456E+01	-.23170693E+00	.84961754E-01
.11767950E+01	-.15601167E+01	.85704207E+00	.12079064E+01
.76338926E+00	.16387363E+01	-.94393491E-01	-.51220901E+00
-.93363647E-02	-.38157103E+00	-.49255633E-01	-.14083700E+01
-.86403866E+00	.21300553E+00	.16375552E+01	.23401877E+01
.12972871E+01	-.18287192E+01	-.32569720E+00	.40433010E+00
.25667769E+01	-.80234138E+00	.18602987E+01	-.31732110E+00
.25448964E+00	.24923873E+00	-.56400486E+00	.48278257E+00
-.13500606E+01	-.38605530E+00	-.17551158E+01	.39819338E+00
.14605181E+01	-.76834616E+00	-.14160863E+01	.82057742E+00
-.23982263E+00	-.14757690E+01	-.36425431E+00	.18290695E+01
-.54397335E+00	-.41855162E+00	.17629645E+00	.71865340E+00
.13857053E+01	.15431258E+00	-.14080057E+00	.44255583E-01
-.35674077E+00	.51240663E-01	-.67488864E+00	.72021506E+00
.60382062E+00	-.11568743E+01	.10077247E+01	.55692253E+00
-.10040292E+01	.57761447E+00	-.17288752E+00	-.52904452E+00
.92854196E+00	-.21365450E+00	-.62337505E+00	.88685433E+00
.43376614E+00	-.11824651E+01	.59653152E+00	-.24213822E-01
-.13152982E+01	.20837219E+00	.11171635E+01	.10242912E+01
-.75626886E+00	-.34443202E+00	-.52483475E-01	.91420193E+00
.56229299E+00	-.16087281E+01	-.20119324E+01	-.57610345E+00
.21002662E+01	-.90625017E+00	-.27909472E+00	-.10475091E+01
-.15921836E+01	.13719360E+00	.44177518E+00	-.64954188E+00
-.10191544E+01	-.54041805E+00	-.53265344E+00	-.29904236E+00
.25036887E+01	-.82501417E+00	.39684430E+00	.96550873E+00
.16531044E+01	.94752485E+00	.10085779E+01	-.16906169E+01
-.35066523E+00	-.62090936E+00	-.96938975E+00	-.43117298E+00
.80224983E+00	.18199026E+00	-.13082560E+01	.59642551E+00
N11514042E+01	-.20878349E+01	-.12704783E+01	.55909064E+00
.20698078E+01	-.63933998E+00	.54222618E+00	.15711021E+01
-.76326421E+00	.10522896E+01	.00000000E+00	.00000000E+00

.89095124E-02	.19616429E-01	-.16153633E-01	-.18258266E-01
-.24942084E-01	-.79862726E-01	-.19892684E-01	-.17448274E-01
-.32420809E-01	-.18796278E-03	-.41248343E-01	-.77122693E-02
-.15475685E-01	-.40560535E-01	-.43040611E-01	-.25745921E-01
.43024238E-01	.47812469E-02	-.38465657E-01	.50725813E-01
.41599573E-01	.94891923E-02	-.92766706E-02	.34288967E-02
-.55772734E-03	.47221914E-01	-.38237730E-01	-.56262436E-01
-.36257947E-02	.11877655E-01	-.73243302E-02	-.23150529E-01
.55250396E-02	-.15471476E-01	-.26080549E-01	.30130764E-01
.19643511E-01	.16902417E-01	-.28367685E-01	.83571686E-02
-.24973658E-01	.27626664E-02	-.45189735E-01	-.12431368E-01
.33295596E-01	-.25696922E-01	-.45489237E-02	.75026201E-02
-.40725756E-02	.65272572E-02	-.94954418E-02	.10123453E-05
.28689418E-01	.10907710E-01	.24324046E-01	-.27149170E-01
-.42999215E-01	-.50956988E-02	-.26086901E-01	.50852200E-01
-.91091069E-02	.16127663E-01	.40695285E-01	-.27632453E-01
.10734420E-01	-.14321402E-01	-.61574017E-01	-.36477206E-01
.19704895E-02	.69866028E-02	.24848490E-02	-.25865369E-01
.73304757E-01	.54480608E-01	.14980670E-01	.17017822E-01
.39228545E-01	-.55521030E-02	-.14749085E-01	-.64475725E-02
-.45640089E-01	-.15067577E-01	.14630413E-01	-.50237051E-01
.43219498E-01	-.28096485E-03	.17331654E-02	-.21388663E-02
.32797757E-01	-.12331713E-01	-.10992615E-01	-.52172528E-01
.94938109E-02	-.47775454E-01	.25606184E-02	.16145521E-01
.27240163E-01	.21360987E-01	.35815996E-01	.37321817E-01
.18393468E-02	.43774911E-02	-.11852341E-01	-.46928546E-01
-.35946279E-01	-.59830041E-02	.45067905E-02	-.16519234E-02
.38763565E-01	-.13867774E-01	.29716208E-01	-.74990451E-01
-.16129938E-01	.92454204E-02	.20106593E-02	-.16509234E-01
.55612731E-02	.57176063E-02	.21121063E-01	-.44889100E-01
-.31019697E-01	.27740374E-01	-.25939390E-01	.28916666E-01
-.81137329E-02	.14079509E-01	-.12658594E-01	.17627992E-01
-.26716228E-01	-.26119574E-02	.23374445E-01	-.30288191E-01
.25954002E-02	-.30419639E-01	.51176198E-02	.63951049E-01
-.24701044E-01	-.10370819E-01	-.55786369E-01	-.47363415E-01
-.67603001E-01	-.42158146E-01	.56972081E-01	-.47360630E-01
.20231184E-01	-.57777230E-03	.48704454E-01	.21213731E-01
.16715455E-01	-.11423923E-01	.15385442E-01	.18377327E-01
.42130543E-01	-.55670571E-02	-.59625323E-01	.21539754E-01
-.26651662E-01	-.59981627E-01	.38575664E-01	.19905966E-01
.26187456E-01	.21714877E-01	-.32831194E-01	.42503548E-01
-.44248273E-01	.32921125E-01	-.50741771E-01	-.23250572E-01
.29689165E-01	.62203552E-02	-.19290277E-02	.14980056E-01
.12333195E-01	.22047569E-01	-.25738064E-01	-.36784665E-02
.29350351E-01	.35089733E-02	-.30534552E-01	.51034583E-02
-.72974076E-01	.24825328E-01	-.34756816E-01	.11657936E-01
.99465119E-02	.11513402E-01	.16854086E-01	.18845638E-01
-.28039368E-01	.81649609E-02	.28017641E-01	-.18471003E-01
.31050955E-01	.62015425E-02	.28799635E-03	.33674120E-01
-.13989339E-01	-.91301257E-02	-.25602794E-01	.34000674E-01
.24487658E-01	-.49942377E-01	-.38437244E-01	.87570573E-02
-.74134777E-01	.23244484E-01	.21471881E-01	.37335638E-01
.19825146E-01	-.20317527E-01	-.29288278E-01	-.57669854E-01
-.42288546E-01	-.36188611E-02	-.20621782E-01	.61951140E-02
.29289374E-03	-.22773818E-01	.23362130E-01	.31455236E-01
-.45373955E-02	-.24080076E-01	-.31470401E-01	.55504133E-01
.80708735E-02	.22252965E-01	.24330684E-01	-.59757718E-02
.68304677E-02	-.19874987E-01	-.53595475E-02	.16260218E-01
.17334539E-01	-.23525431E-01	-.47848293E-01	-.14854088E-01
.40158973E-01	.10820017E-01	.35572676E-02	-.16138879E-01
-.23058968E-01	-.25516235E-02	-.31798865E-01	.38906642E-01
.55735328E-01	-.50738185E-02	-.10717301E-01	.20899804E-01
.64050530E-01	.30510741E-01	.00000000E+00	.00000000E+00

.31334530E+00	.65176790E+00	-.47884680E+00	-.54536970E+00
-.75663081E+00	-.24925541E+01	-.59703014E+00	-.51976760E+00
-.99301722E+00	.25793688E-01	-.12720366E+01	-.21203345E+00
-.45741832E+00	-.12502964E+01	-.13286863E+01	-.78203839E+00
.13916384E+01	.18285971E+00	-.11840819E+01	.16350686E+01
.13466078E+01	.33166774E+00	-.26148081E+00	.14011483E+00
.14106226E-01	.15243179E+01	-.11768776E+01	-.17465998E+01
-.82868782E-01	.40716823E+00	-.19977153E+00	-.70000363E+00
.20636940E+00	-.45728527E+00	-.79261526E+00	.98410340E+00
.65262391E+00	.56598381E+00	-.86490668E+00	.29588690E+00
-.75762880E+00	.11905673E+00	-.13966155E+01	-.36119402E+00
.10841369E+01	-.78048963E+00	-.11204690E+00	.26887647E+00
-.96990564E-01	.23804734E+00	-.26839570E+00	.31766785E-01
.93854556E+00	.37650404E+00	.80056555E+00	-.82639206E+00
-.13273779E+01	-.12932929E+00	-.79281602E+00	.16390634E+01
-.25618448E+00	.54149552E+00	.13180252E+01	-.84166760E+00
.37102671E+00	-.42093393E+00	-.19144874E+01	-.11212312E+01
.94017719E-01	.25256627E+00	.11027552E+00	-.78581388E+00
.23487404E+01	.17537496E+01	.50524152E+00	.56963153E+00
.12716647E+01	-.14375524E+00	-.43445205E+00	-.17205911E+00
-.14108502E+01	-.44451891E+00	.49417067E+00	-.15561503E+01
.13978101E+01	.22854093E-01	.86516417E-01	-.35870174E-01
.10684013E+01	-.35804413E+00	-.31571813E+00	-.16173266E+01
.33181372E+00	-.14783445E+01	.11267042E+00	.54205997E+00
.89273772E+00	.70690961E+00	.11638014E+01	.12113971E+01
.89872582E-01	.17009786E+00	-.34289222E+00	-.14515756E+01
-.11044497E+01	-.15737510E+00	.17418474E+00	-.20478958E-01
.12569677E+01	-.40659570E+00	.97100019E+00	-.23385520E+00
-.47809784E+00	.32396263E+00	.95287401E-01	-.49008658E+00
.20751466E+00	.21245602E+00	.69932615E+00	-.13871131E+01
-.94873739E+00	.90854833E+00	-.78815352E+00	.94572838E+00
-.22472285E+00	.47675777E+00	-.36837613E+00	.58891767E+00
-.81270770E+00	-.50823567E-01	.77055069E+00	-.92560975E+00
.11376980E+01	-.92976455E+00	.19349174E+00	.20530898E+01
-.74901206E+00	-.29606447E+00	-.17315523E+01	-.14653209E+01
-.21050506E+01	-.13007935E+01	.18324997E+01	-.14652328E+01
.67119898E+00	.13472648E-01	.15711778E+01	.70225518E+00
.56007435E+00	-.32935084E+00	.51803551E+00	.61260254E+00
.13633906E+01	-.14422791E+00	-.18528934E+01	.71256008E+00
-.81066689E+00	-.18641554E+01	.12510285E+01	.66091953E+00
.85946392E+00	.71809532E+00	-.10059886E+01	.13751805E+01
-.13668579E+01	.10723007E+01	-.15721034E+01	-.70316578E+00
.97014542E+00	.22834683E+00	-.29237628E-01	.50522213E+00
.42156054E+00	.72861101E+00	-.78179002E+00	-.84533624E-01
.95943623E+00	.14264588E+00	-.93339669E+00	.19304412E+00
-.22748187E+01	.81640999E+00	-.10668534E+01	.40021706E+00
.34612263E+00	.39564866E+00	.56445618E+00	.62740485E+00
-.85452930E+00	.28981163E+00	.91731215E+00	-.55209388E+00
.10131886E+01	.22775220E+00	.40837732E-01	.10961012E+01
-.41043810E+00	-.25684884E+00	-.77751444E+00	.11064229E+01
.80573696E+00	-.15468363E+01	-.11831838E+01	.30852652E+00
-.23115060E+01	.76644291E+00	.71041474E+00	.12118340E+01
.65836498E+00	-.61045852E+00	-.89400465E+00	-.17910852E+01
-.13049152E+01	-.82649625E-01	-.62007536E+00	.22754901E+00
.40992528E-01	-.68809661E+00	.77016144E+00	.10259671E+01
-.11168252E+00	-.72938460E+00	-.96297686E+00	.17861010E+01
.28683773E+00	.73510313E+00	.80077534E+00	-.15714650E+00
.24763117E+00	-.59647077E+00	-.13766898E+00	.54568528E+00
.57964227E+00	-.71185346E+00	-.14806468E+01	-.43777099E+00
.13010735E+01	.37373225E+00	.14417236E+00	-.47838045E+00
-.69710958E+00	-.48916540E-01	-.97335891E+00	.12614900E+01
.17934086E+01	-.12863770E+00	-.30701604E+00	.69233261E+00
.20562342E+01	.99611367E+00	.00000000E+00	.00000000E+00

.31333730E+00	.65175125E+00	-.47883457E+00	-.54535577E+00
-.75661148E+00	-.24924904E+01	-.59701489E+00	-.51975432E+00
-.99299185E+00	.25793029E-01	-.12720041E+01	-.21202803E+00
-.45740664E+00	-.12502645E+01	-.13286524E+01	-.78201841E+00
.13916028E+01	.18285504E+00	-.11840516E+01	.16350268E+01
.13465734E+01	.33165926E+00	-.26147413E+00	.14011125E+00
.14105866E-01	.15242789E+01	-.11768475E+01	-.17465551E+01
-.82866665E-01	.40715783E+00	-.19976643E+00	-.69998575E+00
.20636413E+00	-.45727359E+00	-.79259501E+00	.98407826E+00
.65260724E+00	.56596935E+00	-.86488459E+00	.29587935E+00
-.75760945E+00	.11905369E+00	-.13965798E+01	-.36118479E+00
.10841092E+01	-.78046969E+00	-.11204404E+00	.26886960E+00
-.96988086E-01	.23804126E+00	-.26838884E+00	.31765974E-01
.93852158E+00	.37649443E+00	.80054510E+00	-.82637095E+00
-.13273440E+01	-.12932598E+00	-.79279577E+00	.16390215E+01
-.25617794E+00	.54148168E+00	.13179915E+01	-.84164610E+00
.37101723E+00	-.42092318E+00	-.19144385E+01	-.11212026E+01
.94015317E-01	.25255981E+00	.11027270E+00	-.78579381E+00
.23486804E+01	.17537048E+01	.50522861E+00	.56961698E+00
.12716322E+01	-.14375157E+00	-.43444095E+00	-.17205471E+00
-.14108142E+01	-.44450756E+00	.49415805E+00	-.15561105E+01
.13977744E+01	.22853509E-01	.86514207E-01	-.35869258E-01
.10683740E+01	-.35803498E+00	-.31571007E+00	-.16172853E+01
.33180525E+00	-.14783068E+01	.11266755E+00	.54204613E+00
.89271491E+00	.70689155E+00	.11637716E+01	.12113662E+01
.89870286E-01	.17009352E+00	-.34288346E+00	-.14515385E+01
-.11044215E+01	-.15737108E+00	.17418029E+00	-.20478435E-01
.12569356E+01	-.40658531E+00	.97097539E+00	-.23384923E+01
-.47808563E+00	.32395436E+00	.95284967E-01	-.49007406E+00
.20750936E+00	.21245059E+00	.69930829E+00	-.13870776E+01
-.94871316E+00	.90852512E+00	-.78813339E+00	.94570423E+00
-.22471711E+00	.47674560E+00	-.36836672E+00	.58890263E+00
-.81268694E+00	-.50622268E-01	.77053100E+00	-.92558610E+00
.11376690E+00	-.92974080E+00	.19348679E+00	.20530374E+01
-.74899293E+00	-.29605691E+00	-.17315081E+01	-.14652834E+01
-.21049968E+01	-.13007603E+01	.18324529E+01	-.14651954E+01
.67118183E+00	.13472304E-01	.15711376E+01	.70223724E+00
.56006004E+00	-.32934243E+00	.51802227E+00	.61258689E+00
.13633558E+01	-.14422422E+00	-.18528460E+01	.71254187E+00
-.81064618E+00	-.18641077E+01	.12509966E+01	.66090264E+00
.85944196E+00	.71807697E+00	-.10059629E+01	.13751454E+01
-.13668230E+01	.10722733E+01	-.15720633E+01	-.70314782E+00
.97012064E+00	.22834100E+00	-.29236881E-01	.50520923E+00
.42154977E+00	.72859240E+00	-.78177005E+00	-.84531465E-01
.95941172E+00	.14264224E+00	-.93337284E+00	.19303919E+00
-.22747606E+01	.81638913E+00	-.10668261E+01	.40020684E+00
.34611378E+00	.39563855E+00	.56444176E+00	.62738883E+00
-.85450747E+00	.28980423E+00	.91728872E+00	-.55207978E+00
.10131628E+01	.22774638E+00	.40836689E-01	.10960732E+01
-.41042762E+00	-.25684228E+00	-.77749458E+00	.11063947E+01
.80571637E+00	-.15467968E+01	-.11831536E+01	.30851864E+00
-.23114469E+01	.76642333E+00	.71039659E+00	.12118030E+01
.65834816E+00	-.61044293E+00	-.89398181E+00	-.17910394E+01
-.13048818E+01	-.82647514E-01	-.62005952E+00	.22754320E+00
.40991481E-01	-.68807903E+00	.77014177E+00	.10259409E+01
-.11167967E+00	-.72936597E+00	-.96295226E+00	.17860554E+01
.28683040E+00	.73508436E+00	.80075489E+00	-.15714249E+00
.24762485E+00	-.59645554E+00	-.13766546E+00	.54567134E+00
.57962746E+00	-.71183527E+00	-.14606090E+01	-.43775980E+00
.13010403E+01	.37372270E+00	.14416868E+00	-.47836823E+00
-.69709177E+00	-.48915291E-01	-.97333404E+00	.12614578E+01
.17933628E+01	-.12863441E+00	-.30700820E+00	.69231492E+00
.20561817E+01	.99608823E+00	.00000000E+00	.00000000E+00

REFERÊNCIAS

[1] Anderson, R. L. (1942) — Distribution of the serial correlation coefficient, *Ann. Math. Stat.*, vol. 13.

[2] Anderson, T. W. & Darling, D. A. (1952) — Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes, *Ann. Math. Stat.*, vol. 23.

[3] Fisz, Marek (1963) — *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 3.ª ed., J. Wiley & Sons, inc., New York.

[4] Gumbél, E. J. (1958) — *Statistics of extremes*, Columbia Univ. Press, New York.

[5] Johnson, N. & Kotz, S. (1970) — *Continuous univariate distributions-2*, Houghton Mifflin Company, Boston.

[6] Mises, R. Von (1947) – Differentiable statistical functions, *Ann. Math. Stat.*, vol. 18.

[7] Moshman, J. (1967) — Random number generation (in *Mathematical methods for digital computers*), vol. II, Wiley & Sons.

[8] Sherman, B. (1950) — A random variable related to the spacing of sample values, *Ann. Math. Stat.*, vol. 21.

[9] Smirnov, N. V. (1936) – Sur la distribuitíon de W^2, *C. R. Acad. Scienc. de Paris*, vol. 202.

[10] Tiago de Oliveira, J. (1963) – Estatística de densidades-resultados assintóticos, *Rev. Fac. Ciênc. Lisboa*, 2.ª série A, vol. IX, fasc. 1.

[11] Tocher, K. D. (1969) – *The Art of Simulation*, 3.ª ed., English Univ. Press.

[12] Wald, A. & Wolwowitz, J. (1943) — An exact test for randomness in the non-parametric case based on serial correlation, *Ann. Math. Stat.*, vol. 14.

[13] Wright, E. M. & Hardy, G. H. (1960) — *The theory of numbers*, 4.ª ed., Oxf. Univ. Press.