MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciências Matemáticas — **5.º Ano — Estatística I — Exame Final — 1.º Semestre — 2-4-1973.**

5810 — 1) Dada a distribuição de valores:

11 12 14 15 16 16

representando as classificações de um aluno no decurso do ano lectivo, calcule:

a) A média; *b*) A mediana; *c*) A moda; *d*) A variância.

2) Uma variável aleatória tem a densidade:

$$f(x\mid\theta)=0 \quad \text{se } x<0$$
$$=\frac{x}{\theta^2}e^{-x^2/2\theta^2} \quad \text{se } x\geqslant 0\,.$$

Encontre a distância entre os quartis (1.º e 3.º) e mostre que a razão entre esta distância e o desvio padrão é independente de θ. Notando que o cálculo do desvio padrão pode ser reduzido a propriedades da normal, avalie essa razão.

3) Uma amostra de n observações $(x_1,\cdots,x_n)$ tem a densidade

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{1}{2}(x_i-\beta x_{i-1})} \qquad (\text{tomando } x_0=0)\,.$$

Formule um teste da hipótese $\beta=1$. Pode aplicar o método usual (n grande) para determinar a região de rejeição?

4. Deduza a função característica de uma variável aleatória de densidade

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,.$$

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciências Matemáticas — **5.º Ano — Estatística I — Exame Final — Epoca de Recurso — 20-6-1973.**

I

5811 — Mostre que para qualquer variável casual X, com distribuição $F(x)$, sob a condição de $E(X)$ ser finito, se verifica $\lim\limits_{x\to\infty} x[1-F(x)]=0$.

II

Uma moeda com probabilidade p de sair escudo é atirada $n+2$ vezes (ordens $0,1,2,\cdots,n,n+1$). Na prova de ordem i, define-se uma variável indicatriz I_i que toma o valor 0 se não sair escudo e 1 se sair. Define-se agora a variável X_j $(j=1,\cdots n)$ da forma seguinte: $X_j=I_j+I_{j-1}I_{j+1}-I_j(I_{j-1}+I_{j+1})$ (i. e. $X_j=1$ se $I_{j-1}=I_{j+1}=1-I_j$ ou seja se o resultado na prova i é distinto do anterior e do posterior — verifique isso por uma tabela).

Calcule o valor médio e a variância de $\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$, supondo os I_j independentes.

III

Um par aleatório (X,Y) tem a densidade $f(x,y)=$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{x^2+y^2-2\rho xy\}\right].$$
Supondo uma amostra de n pares $(x_1,y_1),\cdots$ $\cdots,(x_n,y_n)$, formule um teste de $\rho=0$ (independência), ao nível de significância de $5\,\%$.

IV

Supondo que as variáveis casuais X e Y possuem a densidade de probabilidade conjunta

$$f(x,y)=x+y \qquad 0<x<1,\ 0<y<1$$
$$=0 \qquad \text{senão,}$$

calcule o coeficiente de correlação entre X e Y.

Enunciados dos n.os 5810 a 5811 de J. Tiago de Oliveira e J. Marques Henriques

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciências Matemáticas — 5.º Ano — Estatística II — Exame Final — 1.ª Epoca — 30-7-1973.

I

5812 — Se for r o coeficiente de correlação dos n pares de observações (x_i, y_i) $(i = 1, \cdots, n)$, calcule o coeficiente de correlação dos n pares

$$(\alpha x_i + \beta, \gamma y_i + \delta),$$

com α, β, γ, δ, números reais.

II

Recorrendo exclusivamente às definições mostre que $E(F_{n,m})$, onde $F_{n,m}$ é uma variável com a distribuição F com, respectivamente, n e m graus de liberdade, é independente de n.

III

Considere uma amostra de dimensão n de um universo com densidade $f(x;\theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$; determine o estimador de máxima verosimilhança de θ.

IV

Na demonstração do teorema de Neyman-Pearson uma das hipóteses assumidas foi a de que todos os espaços de probabilidade eram completos. Mostre que esta condição não é essencial, pois que, dado um espaço de probabilidade o seu completivo é sempre completo.

V

Suponha que é conhecido o vector P das probabilidades dos N acontecimentos elementares de um espaço finito e discreto, isto é,

$$\wedge/(P \geqslant 0), P \leqslant 1 \leftrightarrow 1$$
$$+/P \leftrightarrow 1$$
$$\rho P \leftrightarrow N$$

e que qualquer acontecimento deste espaço é representado por um vector lógico, por exemplo U, de dimensão N, com componentes 1, correspondentes aos acontecimentos elementares contidos no acontecimento, e 0, se não for o caso. A probabilidade do acontecimento U, $P(U)$, será então dada por $+/U/P$.

Dada uma matriz booleana X, de 2 linhas e N colunas, em que cada linha representa dois acontecimentos quaisquer U e V, neste espaço, escreva uma função *APL* que permita calcular a probabilidade da união $U \cup V$.

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciências Matemáticas — 5.º Ano — Programação Matemática — Exame Final — 1.ª Chamada — 14-7-1973.

I

5813 — *a*) Designe por H_2 o (espaço de Hilbert) conjunto de todas as sucessões de números reais $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ tais que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Com $x, y \in H_2$ e $\alpha \in R$ define-se

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n, \cdots)$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n, \cdots).$$

É H_2 um espaço convexo? Indique, pelo menos, um subconjunto convexo de H_2. Justifique.

b) Defina a *soma* de dois conjuntos $K, L \subset R^n$ por

$$K + L = \{z \mid z = x + y,\ x \in K,\ y \in L\}$$

e o *produto* de K por $\alpha \in R$ por

$$\alpha K = \{z \mid z = \alpha x,\ x \in K\}.$$

Se $L \subset K$ com $\alpha = -1$ define-se a *diferença* $K - L = K + \alpha L$.

Mostre que com K e L convexos e $L \subset K$ é convexa a diferença $K - L$.

II

Suponha um programa linear dado sob a forma:

$$(L) \qquad \begin{array}{l} Q(x) = p^T x \overset{!}{=} \min \\ A x \geqslant b,\ x \geqslant 0 \end{array}$$

onde $x, p \in R^q$, $b \in R^m$ e A é uma matriz (real) de m linhas e q colunas, de característica qualquer.

Determine o dual de (L) e mostre que os dois programas são equivalentes.

III

a) Converta para vírgula flutuante (computador hexadecimal de palavras de 32 bits) o valor real 16.25;

b) Estando armazenada na memória de um computador, por colunas, uma matriz A, triangular superior de ordem N, e um vector X de N componentes, escreva um subprograma em FORTRAN que efectue o cálculo de $B = A \cdot X$ e transmita as componentes de B ao programa principal.

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciências Matemáticas — **5.º Ano — Programação Matemática — Exame Final — 2.ª chamada — 28-7-1973.**

I

5814 — a) Mostre que o conjunto das soluções admissíveis do programa convexo:

$$\begin{aligned} F(x) &\overset{!}{=} \min \\ f_j(x) &\leqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, m) \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

onde $F, f_1, \cdots, f_m$ são funções convexas, é um conjunto convexo.

b) Dê um contra-exemplo mostrando que se sobre um conjunto convexo que não seja aberto está definida uma função convexa, ela não é obrigatoriamente contínua.

II

Prove que condição necessária e suficiente para que uma função f definida num subconjunto convexo K do espaço R^n seja convexa é que o conjunto $\{(x, \Phi) \mid x \in K, \ \Phi \in R, \ f(x) \leqslant \Phi\}$ seja convexo em R^{n+1}.

III

Considere o *problema dos transportes* para o exemplo seguinte: uma empresa produtora e distribuidora de um determinado produto possui 8 fábricas com as capacidades $c_j \ (j = 1, \cdots, 8)$; estas devem abastecer 200 clientes mensalmente com as quantidades q_k $(k = 1, \cdots, 200)$. A capacidade total de produção é ajustada periodicamente de tal modo que seja sempre $\sum_{j=1}^{8} c_j = \sum_{k=1}^{200} q_k$. O custo de transporte da fábrica j para o local k é a_{jk}. Pretende determinar-se quais as quantidades x_{jk} a enviar da fábrica j para o cliente k, de tal modo que sejam mínimos os custos totais dos transportes, i. e. $Q = \sum_j \sum_k c_{jk} \, x_{jk} \overset{!}{=} \min$.

a) Estabeleça a matriz A deste problema dos transportes;

b) Determine se o *programa linear* resultante é sempre solúvel;

c) Escreva um troço de programa FORTRAN que gere A de tal modo que conhecida a localização de um elemento seja possível determinar o seu valor evitando trabalhar com a matriz A, ou qualquer das suas submatrizes, em memória.

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciências Matemáticas — **5.º Ano — Informática Superior — 1.º Teste — 18-12-1973.**

I

5815 — a) Mostre que se L e K são vectores lógicos com $(\rho L) = \rho K$ ou matrizes lógicas conformáveis com $(\rho L)[2] = (\rho K)[1]$, então são válidas as identidades duais

$$\wedge/, (L \vee . \wedge K) = \sim(\sim L) \wedge . \vee \sim K$$
$$\wedge/, (L \wedge . = K) = \sim(\sim L) \vee . \neq \sim K .$$

b) Poderá tirar-se alguma conclusão relativamente à estrutura das funções (diádicas) $\vee, \wedge, =$ e $\neq$? Deduza uma identidade dual para $\lceil$ e $\lfloor$.

II

a) Supondo que a função (diádica) $\lfloor$ não é uma função nativa num determinado interpretador, defina uma função diádica, MIN, que a simule.

b) Use MIN na definição de uma nova função MINIMO que simule $\lfloor/$ (redução por MIN) para argumentos tanto vectoriais como matriciais.

III

Dado um alfabeto A, mostre que a estrutura que se obtém definindo sobre A^* (conjunto das produções finitas de A) a catenação de dois quaisquer dos seus elementos («strings») é um semi-grupo (semi-grupo livre gerado por A), com identidade.

Universidade de Luanda — Curso Superior de Economia — **Estatística — 1.° Teste — 19-12-1973.**

I

5816 — *a*) Mostre que, para qualquer sucessão de valores não agrupados $x_1, \cdots, x_n$, designando por $\bar{x}$, G e H, resp., as médias aritmética, geométrica e harmónica, se tem sempre $\bar{x} \geqslant G \geqslant H$, verificando-se a igualdade se e só se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. (Sujestão: indução finita relativamente a n).

b) Considere uma distribuição de frequências (dados agrupados) com marcas de classe $x_i = 0, 1, \cdots, n$ e frequências $f_i = \binom{n}{i}$. Calcule:

1) O intervalo de variação;
2) A média aritmética;
3) A mediana;
4) A moda;
5) O terceiro momento centrado, m_3;
6) A variância.

Se quizesse caracterizar sumariamente esta distribuição por uma medida de localização e outra de dispersão, indique quais as que lhe parecem mais adequadas; justifique.

II

O capital acumulado ao fim de n anos, c_n, a partir de uma unidade de capital colocada à taxa de $r\,\%$ ao ano é dada pela fórmula $c_n = (1 + r/100)^n$; escreva um *programa completo* (com excepção das instruções de saída) que efectue o cálculo de uma tabela de valores de c para $n = 1, 2, \cdots, 100$ e $r = 3{,}5$, 4, $4{,}5$, $5, \cdots, 8$. Neste programa é importante, além da lógica, a rapidez da execução dos cálculos. (Sujestão: $c_n = c_1 \cdot c_{n-1}$).

III

a) Seja Ω o conjunto dos alunos matriculados em Estatística, M o subconjunto de Ω dos alunos do sexo masculino, A o dos de olhos azuis e G os que têm mais de 1,75 m de altura.

1) Indique um conjunto de $P(\Omega)$ que não seja nenhum dos acima especificados;
2) Mostre que se $G \subset M$ então $G \cap (G \triangle M) = \emptyset$ e $G + (M \triangle G) = M$;
3) Indique qual o conjunto $A \triangle M \triangle G$.

IV

A empresa $A\,B\,C$ produziu as seguintes quantidades em milhares de unidades) nos anos indicados:

1963	62,0
1964	69,8
1965	84,3
1966	90,4
1967	81,0
1968	98,0
1969	122,4
1970	130,8
1971	146,8
1972	170,6

Indique uma medida estatística adequada para exprimir a evolução ao longo deste período; justifique a escolha que fez dessa medida estatística.

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciências Matemáticas — **5.° Ano — Informática Superior — 2.° Teste — 18 de Fevereiro de 1974.**

I

5817 — Escreva uma função diádica que simule o operador do «produto interno» da catenação e da estruturação $(,\cdot\rho)$. Nota: com esta função poder-se-ão gerar, entre outras, estruturas com elementos repetidos como $(\iota 3), \cdot\rho\,\iota 3 \leftrightarrow 1\,2\,2\,3\,3\,3$.

II

Desenvolva um algoritmo que, incorporado numa parse, permita determinar se, dada uma instrução aritmética escrita numa linguagem automática — por exemplo em FORTRAN — os nomes simbólicos que ocorrem nessa instrução são identificadores da linguagem (no caso do FORTRAN se se tratam de nomes alfanuméricos sem caracteres em branco com um a seis caracteres, o primeiro dos quais alfabético).

III

Classifique as linguagens de programação do ponto de vista da sua tradução/execução e indique algumas em cada um desses grupos, com uma breve indicação de alguns aspectos que considere importantes e que as distingam umas das outras.

Universidade de Luanda — Licenciatura em Ciencias Matemáticas — **5.° Ano — Informática Superior — Exame Final — 28 de Fevereiro de 1974.**

I

5818 — Desenvolva um algoritmo que, incorporado numa parse de um compilador de FORTRAN, permita determinar a validade léxica das instruções de GO TO simples e de GO TO calculado (pressuponha, para facilitar, que estas instruções não estão rotuladas e que não ocupam mais de um cartão de programa). Este algoritmo deverá englobar um teste à correcção do (s) rótulo (s) de transferência que entram nas instruções, bem como, no caso do GO TO calculado, ao valor da variável de salto.

II

É dada uma matriz de observações X de elementos x_{ki} $(k=1,\cdots,n$ e $i=1,\cdots,m)$. Define-se, para os vectores-coluna de X, uma matriz de variâncias e covariâncias de elemento genérico

$$r_{ij}=\frac{\sum_k (x_{ki}-\bar{x}_i)\,(x_{kj}-\bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_k (x_{ki}-\bar{x}_i)^2 \sum_k (x_{kj}-\bar{x}_j)^2}} \quad (i,j=1,\cdots,m)$$

onde $\bar{x}_i=\sum_k x_{ki}/n$ e $\bar{x}_j=\sum_k x_{kj}/n$. Escreva uma função monádica que admita X como argumento, teste que X é de facto uma matriz, e forneça como resultado a matriz dos r's.

III

Define-se a sucessão de Fibonnacci $\{F_n\}$,

$$0\;1\;1\;2\;3\;5\;8\;13\cdots,$$

em que cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n\geqslant 2)$, $F_0=0$, $F_1=1$.

a) Escreva uma função APL tal que, dado N, permita calcular *recursivamente* os N primeiros termos desta sucessão.

b) Exponha as vantagens e possíveis inconvenientes da escrita de programas do tipo recursivo.

IV

Diga o que são gramáticas de estrutura de frase e qual a diferença entre as de contexto sensitivo e as de contexto livre.

Enunciados dos n.os 5812 a 5818 de J. Marques Henriques