Coerência subjectivista e teoria ortodoxa das probabilidades

Notas sobre matéria exposta no Seminário de Estatística do Centro de Matemática Aplicada da Faculdade de Ciências de Lisboa, em 71/72 e 72/73

por A. R. Simões Neto

Introdução

Em uma série de lições proferidas em 1935, no Instituto Henri Poincaré, em Paris, formulou BRUNO DE FINETTI, luminar da escola subjectivista de probabilidades, e independemente de RAMSEY, outro subjectivista de qualidade, uma condição, a que chamou de «coerência», para a probabilização de espaços de acontecimentos. Trata-se de uma condição muito simples, que, no fundo, permite matematizar o «grau de crença racional que se deposita em uma proposição» a que KEYNES reduzia a probabilidade, e da qual se podem deduzir as proposições básicas da teoria ortodoxa das probabilidades.

O texto dessas lições encontra se no vol. VII (1937) dos Annales de l'Institut Henri Poincaré, e existe dele versão inglesa, integrada, com o título «Foresight: its logical laws, its subjective sources», na valiosa antologia «Studies in Subjective Probability», de KYBURG e STOKER (J. Wiley, Londres, 1964); é peça de valor no «corpus» da literatura probabilística, e o seu conhecimento parece-me quase indispensável a quem pretenda alguma familiaridade com a filosofia subjectivista.

Seguiremos, no essencial, o trabalho de DE FINETTY, dando de algumas proposições demonstrações que apenas estão, nele, sugeridas e, de outras, demonstrações mais simples; mas postularemos, antes, a existência de um «demónio», da estirpe do de MAXWELL, que baptisámos, em honra de mestre BRUNO, de «demónio de DE FINETTI». Se se aceita que é esse demónio quem preside à atribuição de probabilidades, esbatem-se alguns dos problemas suscitados pela intromissão do conceito de «dinheiro» nessa atribuição.

Embora se parta de um conceito subjectivista, e se acompanhe a marcha de um subjectivista, não se toma, na construção seguinte, partido filosófico; trata-se, apenas, de um exercício lógico e metodológico, e fica entendido que nos referiremos sempre a espaços *finitos* de acontecimentos.

Construção

Logo na segunda página do primeiro capítulo, diz DE FINETTI:

«On peut, cependant, donner aussi une définition quantitative, numérique, directe du degré de probabilité attribué par un individu donné à un élénement déterminé, de telle façon que toute la théorie des probabilités puisse se déduire immédiatement d'un condition très naturelle, ayant une signification évidente.

Il s'agit simplement de préciser mathématiquement l'idée banale et évidente que le degré de probabilité attribué par un individu à un évenement est révélé par les conditions dans lesquelles il serait disposé de parier sur cet évenement. Le procédé axiomatique dont nous venons d'indiquer plus haut les lignes générales (1) présente l'avantage de permettre une analyse plus poussée et plus détaillée des concepts fondamentaux, de partir uniquement de notions qualitatives, d'éliminer la notion de *monnaie*, étrangère à la question mais qui est nécéssaire pour parler de paris; cependant, une fois démontré que l'on peut écarter la défiance que fait naître le caractère, un peu trop concret et peut-être artificiel de la définition fondée sur les paris, le second procédé s'avère préférable, surtout pour sa clarté».

Um dos objectivos da criação do nosso demónio (que em breve descreveremos) é justamente ajudar a vencer esta, natural em humanos de certa cultura ética, *desconfiança:* as atribuições de probabilidades vão ser sempre feitas por esse demónio segundo um esquema de apostas, mas ele tem pelo dinheiro uma demoníaca, ou divina, indiferença.

Tomemos uma variante da definição de probabilidade proposta por DE FINETTI (aquela a que ele se refere no início da longa citação precedente): a probabilidade que um certo indivíduo X atribui a um certo acontecimento A, a representar por $P_X(A)$, é o quociente E/S, da máxima quantia E (positiva ou negativa, positiva se for entrada paga, negativa se for entrada recebida) que esse indivíduo está disposto a arriscar para se habilitar a receber a quantia-prémio S (também positiva ou negativa, consoante seja prémio a receber ou a pagar) no caso de ocorrer o acontecimento A. As quantias E e S têm, òbviamente, para cada jogador o mesmo sinal. Dado que as probabilidades vão ser sempre atribuidas pelo demónio de DE FINETTI, dispensa-se a menção de quem as faz, pelo que se escreverá $P(A)$ em vez de $P_X(A)$; como as atribuições são feitas segundo este mecanismo de apostas, e como o imaginário dinheiro que o demónio, no seu imaginário inferno, manipula é *real,* no sentido da matemática, pode já deduzir-se, da definição de probabilidade como quociente de duas quantias do mesmo sinal, que uma probabilidade é um número real não negativo (o que recupera o 1.º axioma de KOLMOGOROV).

A introdução do factor «dinheiro» em questões de probabilidade tem vários inconvenientes, além do apontado por DE FINETTI no fragmento citado — interferência de considerações de «esperança moral» sobre considerações de esperança matemática, insuficiente motivação para uma correcta, se de tal coisa se pode falar, avaliação de probabilidades, no caso de as somas envolvidas serem irrisórias (como bem mostra SAVAGE, em «The Foundations of Statistics», J. Wiley, Londres, 1954), etc. De alguns desses inconvenientes já o grande BERNOULLI se dera conta, e como também aqui talvez o nosso demónio possa dar uma ajuda, é altura de esboçar o seu retrato.

É o verdadeiro demónio do jogo; joga sobre tudo, tudo lhe serve de pretexto para apostar; é razoàvelmente esquizofrénico, com uma personalidade de jogador (no sentido de *ponto*), e outra de banqueiro; não joga senão a dinheiro, embora o dinheiro nada lhe interesse, já porque dele para nada precisa, já porque, como contra si próprio joga, o saldo financeiro é sempre nulo — deste modo, é imune às considerações de «esperança moral» e a tudo o que ande ligado ao vulto das quantias em jogo. Mas a sua esquizofrenia não é total, as suas duas personalidades não se ignoram completamente, pelo que as avaliações que faz como jogador coincidem com as que faz como ponto. Além disso, e esta peculiaridade é essencial, gosta de ganhar, mas detesta perder, e não é masoquista. Dissemos que esta característica é fundamental porque dela resulta (e isso interessa-nos especialmente) que todas as atribuições de probabi-

(1) Trata-se de uma axiomática puramente qualitativa, baseada na simples comparação de probabilidade, com que DE FINETTI abre o seu estudo.

lidade feitas pelo nosso demónio satisfazem a condição de coerência de DE FINETTI, condição que passamos a formular.

Diz-se que um sistema de apostas feitas sobre um determinado sistema de acontecimentos é *coerente*, e portanto que é coerente a correspondente atribuição de probabilidades a esses acontecimentos, se *não for certo* que o jogador que faz essas apostas tenha prejuizo. Note-se que um sistema de apostas que *garanta* lucro (positivo) ao apostador, também não é coerente, porque se para ele é certo o lucro então para o banqueiro é certo o prejuizo. Será, portanto, coerente, uma atribuição de probabilidades aos acontecimentos de um determinado sistema, logo que, num jogo baseado nessas probabilidades e nesses acontecimentos, exista pelo menos um desfecho que não implique prejuizo, e pelo menos um desfecho que não implique lucro, para o apostador.

Resumindo e fixando notação

Dados n acontecimentos A_i, $i=1,2,\cdots,n$, e estando associado à ocorrência do acontecimento A_i o prémio S_i, um jogador que avalie em p_i a probabilidade de A_i habilita-se a S_i com a entrada $p_i \cdot S_i$. A quantia que globalmente investe é, evidentemente, $T=\sum_{i=1}^{n} p_i S_i$. Como os acontecimentos não são necessáriamente incompatíveis 2 a 2, seja S'_i o valor dos prémios acumulados no caso de ocorrência de A_i.

O sistema dos p_i será *coerente*, no sentido de DE FINETTI, se e só se

$$\exists_j,\ \exists_k:\ S'_j - T \geqq 0, \qquad S'_k - T \leqq 0 .$$

Repare-se que, no caso de acontecimentos incompatíveis 2 a 2, é $\forall_i$, $S'_i = S_i$, e a condição de coerência equivale à conhecida propriedade do valor médio

$$\text{mín}\, S_j - \Sigma p_i S_i \leqq 0 \leqq \text{máx}\, S_j - \Sigma p_j S_i .$$

Da obediência à seguinte *postura:* «A partir desta data só são autorizadas avaliações de probabilidade quando realizadas pelo demónio de DE FINETTI», ou seja, da aceitação como axioma da seguinte proposição: «A probabilização de um espaço de acontecimentos é feita segundo um esquema de apostas, e válida se, e só se, for coerente, sendo esse esquema e essa coerência os atrás descritos», decorrem os axiomas de KOLMOGOROV e o teorema das probabilidades compostas – toda a teoria ortodoxa, portanto.

Desenvolvamos, então, um pouco, esta «axiomática de um axioma só».

Construção

TEOREMA 1. *Uma probabilidade é um núreal não negativo.*

Ficou demonstrado atrás.

TEOREMA 2. *Se* Ω *é um acontecimento certo, então* $\mathrm{P}(\Omega)=1$.

DEM. Se tem como certo o acontecimento A, tem de se investir nele a soma S para receber a soma S, se se quiser ser coerente; se se aposta mais que S é certo o prejuizo, se se aposta menos que S é certo o lucro, e em qualquer dos casos a aposta não é coerente.

TEOREMA 3. *Se* ϕ *é impossível, então* $\mathrm{P}(\phi)=0$.

Demónio coerente não investe senão quantias nulas em acontecimentos que considera impossíveis, e o domínio de DE FINETTI é sempre coerente.

TEOREMA 4: $P(A^c) = 1 - P(A)$, *em que* A^c *designa o acontecimento complementar de* A.

DEM. Suponhamos (e com isso não se perde generalidade), que os prémios são de 1 unidade, tanto se ocorrer, como se não ocorrer, o acontecimento A, e que se faz a atribuição de probabilidades $P(A) = p$ e $P(A^c) = q$. Esta atribuição só é coerente se for $p + q = 1$. Com efeito, seja o que for que aconteça, A ou A^c, o demónio recebe a quantia 1, tendo pago, para a receber, a quantia $p + q$; em qualquer dos casos o saldo é $L = 1 - (p + q)$. Como o saldo é único, tem de ser nulo para a atribuição ser coerente.

Se o prémio por A for S e o prémio por A^c for S', então as quantias a investir são, respectivamente $p \cdot S$ e $q \cdot S'$.

No caso de ocorrer A, o saldo é

$$L = S - (pS + qS');$$

no caso de não ocorrer A, o saldo é

$$L' = S'(pS + qS').$$

O sistema de equações, em S e S',

$$\left| \begin{array}{l} S - (pS + qS') = L \\ S' - (pS + qS') = L' \end{array} \right.$$

terá de ser impossível para a atribuição da probabilidade ser coerente, porque se assim não fosse podíamos arbitrar L e L' ambos positivos, ou ambos negativos (o que representaria atribuição não-coerente) e resolver para S e S'.

O determinante do sistema,

$$\Delta = \begin{bmatrix} (1-p) & -q \\ -p & (1-q) \end{bmatrix},$$

terá de ser nulo

$$\Delta = 1 - (p + q) = 0 \Rightarrow p + q = 1,$$

ou seja

$$P(A) = 1 - P(A^c), \quad \text{c. q. d.}$$

É claro que este resultado é corolário imediato do próximo Teorema 5; fez-se a demonstração agora como exercício de aplicação directa da condição de coerência.

TEOREMA 5. *Dado um sistema completo de acontecimentos* A_i, *de probabilidades* p_i, $\Sigma p_i = 1$ *é condição necessária e suficiente de coerência.*

DEM. Diz-se completo um sistema de acontecimentos incompatíveis dois a dois, e dos quais um (e portanto só um) se realiza com certeza. Continuemos a supor, por comodidade, que o prémio pela realização de qualquer dos acontecimentos é igual a 1, isto é $\forall i, S_i = 1$. A quantia globalmente investida é igual a Σp_i, e, dado que o sistema é completo, é certo que o apostador recebe a quantia 1, pelo que o saldo final é necessàriamente igual a $1 - \Sigma p_i$. Como só há um saldo possível, a condição de coerência impõe que ele seja nulo, e portanto que $\Sigma p_i = 1$, como queríamos provar.

Que a condição é suficiente, é imediato, se se supuser $S_i = 1, \forall i$. Com efeito, $\Sigma p_i = 1 \Rightarrow 1 - \Sigma p_i = 0$, e como $1 - \Sigma p_i$ é o único saldo possível, a aposta é coerente.

Não se pense que a hipótese da igualdade de todos os prémios tira generalidade ao resultado; no caso de prémios S_i quaisquer, que a condição é suficiente pode demonstrar-se por exemplo como segue: em cada A_i, o jogador inverte a quantia $p_i S_i$, desembolsando um total $T = \Sigma p_i S_i$. Se ocorrer A_j, o saldo será

$$L_j = S_j - \sum_i p_i S_i = S_j - T.$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade $L_j = S_j - T$ por p_j, e somando em j, vem

$$\sum_{j=1}^{n} p_j L_j = \sum_{j=1}^{n} p_j S_j - \sum_{j=1}^{n} p_j T;$$

mas $\sum_j p_j S_j = T$ e $\sum_j p_j = 1$; logo

$$\sum_{j=1}^{n} p_j L_j - T = 0;$$

e como $p_j \geq 0$, os L_j não podem ter todos o mesmo sinal, e a aposta é coerente.

TEOREMA 6. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) : P(A) + P(B)$ *isto é, se dois acontecimentos são incompatíveis, a probabilidade de que se realize um deles é igual à soma das respectivas probabilidades.*

Esta proposição é consequência imediata dos teoremas 4 e 5. Basta notar que o terno de acontecimentos A, B e $(A U B)^c$ constitue um sistema completo.

Ficam com este teorema recuperados os três axiomas das probabilidades de KOLMOGOROV (claro que temos vindo a mencionar a axiomática de KOLMOGOROV como paradigma); mostremos agora como pode surgir, no quadro do jogo, o conceito e a formulação matemática de probabilidade condicional, e, portanto o teorema das probabilidades compostas, ou regra da multiplicação. Para isso, o nosso demónio vai cumprir, com quase total escrúpulo, um jogo proposto por DE FINETTI.

Considerem-se dois acontecimentos, A e B, de determinado espaço, e vejamos como avaliar a probabilidade de A se soubermos que prèviamente aconteceu B, ou seja como definir $P(A/B)$. Regulamentemos, sobre os acontecimentos A e B, a primeira parte do jogo, como segue:

— joga-se primeiro para B; se ocorrer B, joga-se para A, ficando assim definido um acontecimento, a designar por (A/B). Desse acontecimento (A/B) dependerá a recepção de um prémio S_1 mediante o investimento da entrada $p_1 \cdot S_1$, o que significa que se atribui ao acontecimento (A/B) a probabilidade p_1;

— se acontecer B mas depois não acontecer A, a entrada $p_1 \cdot S_1$ perde-se;

— se não acontecer B, o jogo anula-se e a entrada retorna ao apostador.

Compliquemos o jogo, completando-o, com mais as seguintes apostas:

— aposta-se no acontecimento $(A \cap B)$ a quantia $p_2 \cdot S_2$, o que significa que nos habilitamos ao prémio S_2 no caso de ocorrência de $(A \cap B)$ e que atribuimos a este acontecimento a probabilidade p_2;

— aposta-se no acontecimento B a quantia $p_3 \cdot S_3$, o que significa que lhe atribuimos a prob. p_3 e que o prémio em causa é S_3.

O esquema final das apostas do demónio é, portanto, o seguinte:

Acontecimentos	B	$A \cap B$	A/B
Prob. atribuídas	p_3	p_2	p_1
Prémios	S_3	S_2	S_1
Entradas	$p_3 \cdot S_3$	$p_2 \cdot S_2$	$p_1 \cdot S_1$
Investimento global	$p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3$		

«Les jeux étant faits», verifica-se necessàriamente uma das três coisas seguintes:

I) não acontece B;
II) acontece B, mas não acontece, depois, A;
III) acontece B e acontece, depois, A.

No caso I), o balanço é

$$L_I = -p_2 S_2 - p_3 S_3;$$

o jogador perde o que apostou em B e em $(A \cap B)$, mas é-lhe devolvido, nos termos da primeira parte do contrato, o que apostou em (A/B);

No caso II), $B \cap A^c$, o balanço será

$$L_{II} = S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3).$$

No caso III), ganham-se as três apostas, pelo que o balanço será

$$L_{III} = S_1 + S_2 + S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3).$$

Consideremos o seguinte sistema de equações lineares em S_1, S_2 e S_3

$$\left|\begin{array}{l} -p_2 S_2 - p_3 S_3 = L_I \\ S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3) = L_{II} \\ S_1 + S_2 + S_3 - (p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3) = L_{III}. \end{array}\right.$$

A condição de coerência impõe que este sistema seja impossível, porque se fosse possível, podíamos escolher arbitràriamente L_I, L_{II} e L_{III} e encontrar os S_i correspondentes. Logo que os L arbitrados fossem todos positivos, ou todos negativos, estaria violada a condição de coerência. O sistema só é impossível se for nulo o seu determinante, o qual tem, como é fácil verificar, o valor

$$\Delta = p_1 p_3 - p_2.$$

Como a condição de coerência impõe $\Delta = 0$, vem

$$p_2 = p_1 p_3$$

ou seja

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B).$$

Esta é, à parte pormenores a demonstração de DE FINETTI.

Conclusão

Com o último resultado demonstrado, conclue-se que os princípios básicos do cálculo com probabilidades estão contidos na condição de coerência, sempre respeitada pelo demónio que atribue essas probabilidades (ou, se quisermos ver as coisas do outro lado, que esse demónio só pode ser coerente se respeitar os princípios básicos), e chega-se à fronteira dos problemas de independência e teorema de BAYES. Mas essa é fronteira vigiada por outras alfândegas (1)...

---

(1) Ver o ensaio com que SAVAGE abre o voluminho «The Foundations of Statistical Inference — A Discussion», que comporta na lombada apenas a menção «Statistical Inference — L. J. SAVAGE», publicado por Methuen & Cia, Londres, em 1962.