

# Pedro Nunes e as Linhas de Rumo

João Filipe Queiró

Departamento de Matemática - Universidade de Coimbra

## Introdução

Um dos mais interessantes temas de matemática estudados por Pedro Nunes (1502-1578) foi o das linhas de rumo. As suas contribuições principais nesse assunto são, de uma forma geral, bem conhecidas entre os leitores de língua portuguesa, tendo sido vários os autores a expô-las de forma correcta nos seus escritos sobre Pedro Nunes.

Uma linha de rumo (também chamada “curva loxodrómica”) é uma curva sobre a esfera com uma definição muito simples: supondo traçados sobre a esfera meridianos como no globo terrestre (isto é, círculos máximos passando por dois pólos), trata-se de uma curva que corta todos os meridianos segundo um mesmo ângulo. O interesse de um tal tipo de curva para a navegação é óbvio. De facto, a maneira mais natural de navegar no mar alto - ou seja sem pontos de referência costeiros - é obrigar o barco a manter um ângulo constante com o norte da bússola. A rota seguida deste modo é uma linha de rumo.

## Que curvas são as linhas de rumo?

Uma questão que se coloca é a de saber que tipo de curvas são as linhas de rumo, e em particular se se trata de círculos máximos, que como se sabe dão os caminhos mais curtos entre dois pontos (os círculos máximos são as “rectas” da superfície esférica). Por exemplo, se o rumo

for de  $0^\circ$ , a rota seguida é o meridiano do lugar de partida, que é um círculo máximo. E se estivermos no equador e seguirmos um rumo de  $90^\circ$ , percorremos exactamente o equador, que também é um círculo máximo. Mas logo vemos que, se seguirmos um rumo de  $90^\circ$  a partir de um ponto que não esteja sobre o equador, a curva descrita é o paralelo do lugar de partida, que é um círculo mas não é um círculo máximo. Logo, as linhas de rumo não são sempre círculos máximos. A vantagem que há em navegar mantendo o rumo constante é, portanto, acompanhada pelo inconveniente de a rota seguida não ser a mais curta.

O primeiro matemático a colocar e analisar estas questões foi Pedro Nunes. Em 1537, em anexo à sua tradução do *Tratado da Esfera* de Sacrobosco, publicou Pedro Nunes dois tratados em português sobre questões de navegação. Destes dois textos, o primeiro, com o título *Tratado sobre certas dúvidas da navegação*, foi inspirado por algumas perguntas de Martim Afonso de Sousa (1500-1564), capitão da armada, explorador do Brasil entre 1531 e 1533 e futuro governador da Índia. O segundo intitula-se *Tratado em defesa da carta de marear, com o regimento da altura*. Nestes tratados, Pedro Nunes afirma com toda a clareza que os círculos máximos, que dão a menor distância entre dois pontos, não são, salvo no caso do equador e dos meridianos, rotas de rumo constante. Isto é, quem quiser seguir por um círculo máximo tem que estar sempre a mudar o rumo (o ângulo com o meridiano).

Diz ele:

[Na arte de navegar] há dois modos: o primeiro é ir por uma mesma rota, sem fazer mudança (...). O segundo modo seria ir por círculos maiores (...).

E noutras passagens, mais adiante:

(...) ir por círculo maior (...) é andar menos caminho.

Se queremos navegar por círculo maior, necessário é sabermos a mudança que fazem os ângulos da posição dos lugares, para conforme a isso mudarmos a rota.

(...) o caminho que se faz por uma rota não é por círculo maior que é o direito e contínuo, pois sempre fazemos com os novos meridianos ângulo igual ao com que partimos, o que era impossível fazer círculo maior se por ele fossemos; antes é uma linha curva e irregular.

(...) os rumos [não são] círculos, mas linhas curvas irregulares, que vão fazendo com todos os meridianos que passamos ângulos iguais (...).

A distinção é claríssima. Nestes textos de Pedro Nunes encontra-se, pela primeira vez, a identificação de um novo tipo de curva, as linhas de rumo, acompanhada de algumas figuras com a representação gráfica de uma linha de rumo, bem como a afirmação inequívoca de que - salvo no

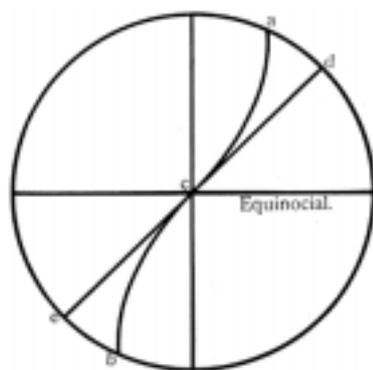


Figura de Pedro Nunes (1537) representando a linha de rumo de 45° e o correspondente círculo máximo passando por um ponto do equador

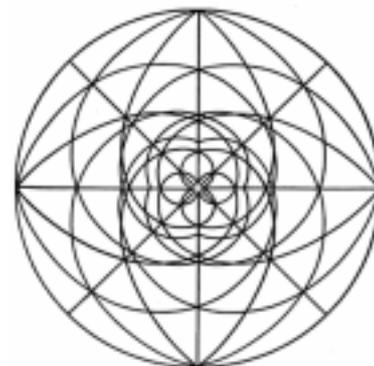


Figura de Pedro Nunes (1537) representando várias linhas de rumo vistas em projecção do pólo norte.

caso do equador e dos meridianos - as linhas de rumo são curvas diferentes dos círculos máximos, e portanto não dão os caminhos mais curtos.

No segundo dos tratados, Pedro Nunes inclui uma secção intitulada "Como se navegará por círculo maior", onde propõe um compromisso entre os dois modos de navegação. Sugere ele que o piloto vá mudando o rumo de vez em quando, de uma forma que descreve em pormenor, de modo que a rota seguida, composta por arcos de linhas de rumo, se aproxime de um círculo máximo. Assim se compatibilizam e aproveitam as vantagens dos dois modos de navegar, e esta ideia de Pedro Nunes foi aproveitada até aos dias de hoje.

Sendo estes os factos, tão claros e tão antigos, há qualquer coisa de extraordinário em que, ainda hoje, várias fontes se enganem a respeito do que Pedro Nunes disse e estudou sobre as linhas de rumo. Serve de exemplo a seguinte passagem da *Encyclopædia Britannica*, num artigo sobre curvas (tradução minha):

[A linha de rumo] é habitualmente definida como a curva que corta os meridianos de uma esfera segundo um ângulo constante. A curva foi concebida pela primeira vez por Pedro Nunes em 1550. (...) Nunes pensava que uma [linha de rumo] que une dois pontos numa esfera era a distância mais curta na esfera entre esses pontos. Mas os marinheiros do século 19 perceberam que a navegação por

*círculo máximo é preferível para encurtar as distâncias.*

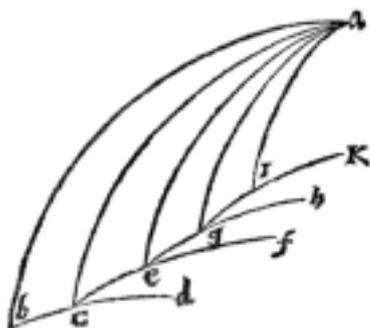
Claro que Pedro Nunes não pensava nada disso, como atrás se viu. A frase sobre o que os marinheiros do século 19 “perceberam” não merece comentários. E a data de 1550 é inventada: não existe nenhuma obra de Pedro Nunes publicada nesse ano.

## A matemática das linhas de rumo

Numa versão desenvolvida, em latim, dos seus tratados publicada em 1566, em Basileia, escreve Pedro Nunes sobre a linha de rumo:

*A linha curva é diferente [de um círculo máximo] e é semelhante a uma hélice (...).*

É nos tratados latinos que Pedro Nunes leva mais longe a sua análise das linhas de rumo. Com o objectivo de permitir traçar linhas deste tipo sobre globos, o que poderia ser um bom auxiliar na navegação, Pedro Nunes apresenta um complicado processo para obter pontos sobre linhas de rumo na esfera. Este processo consiste na resolução sequencial de vários triângulos esféricos. A figura seguinte



é do texto original de Pedro Nunes.

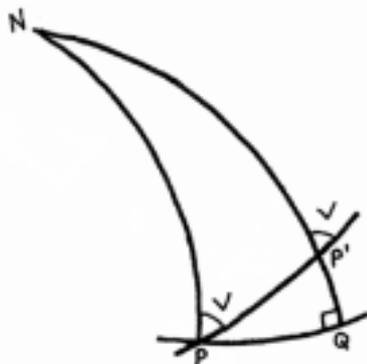
O ponto *a* é o pólo norte, e o ponto *b* é um ponto (no equador) pertencente à linha de rumo correspondente a um

ângulo *V* dado. O processo de Pedro Nunes permite calcular sucessivamente as coordenadas dos pontos *c*, *e*, etc., que estão aproximadamente sobre a linha de rumo. Percebe-se porque é que a construção é aproximada: os lados mais pequenos dos sucessivos triângulos esféricos são arcos de círculo máximo, e portanto em cada passo há um ligeiro desvio em relação ao rumo indicado por *V*. Quando os ângulos no pólo diminuem, os pontos sucessivamente calculados aproximam-se de pontos exactos da linha de rumo.

Este notável trabalho de Pedro Nunes é descrito em pormenor no artigo de Raymond d’Hollander “Historique de la loxodromie”, publicado na revista *Mare Liberum* nº 1 (1990), p. 29-69. No fim da sua construção, Pedro Nunes inclui uma tabela para apresentar os resultados dos cálculos para os rumos correspondentes aos sete ângulos 11°15’, 22°30’, 33°45’, 45°, 56°15’, 67°30’ e 78°45’. Extraordinariamente, Pedro Nunes deixa a tabela vazia, e diz que os números podem ser calculados por “adolescentes estudiosos, segundo as precedentes demonstrações”. No seu artigo, em 1990, d’Hollander fez os cálculos necessários ao preenchimento da tabela.

Modernamente, a descrição da linha de rumo é feita usando a linguagem das funções (as funções do século XVI eram as tabelas). Vamos de seguida obter a equação da linha de rumo correspondente ao ângulo *V*. Mediremos os ângulos em radianos e suporemos *V* diferente de 0 e de  $\pi/2$ , já que esses casos são triviais, como acima referido. Usando as letras  $\varphi$  e  $\lambda$  para designar a latitude e a longitude, vamos obter a equação na forma  $\lambda = \lambda(\varphi)$ , isto é, vamos obter a expressão da longitude dos pontos da curva em função da respectiva latitude. Para fixar ideias, vamos considerar a linha de rumo com ângulo *V* e que passa pelo ponto de latitude e longitude ambas iguais a 0. E vamos supor que o raio da esfera é 1.

Na figura seguinte, *P* é um ponto da linha de rumo, com coordenadas  $(\varphi, \lambda)$ . O ponto *P'*, também pertencente à linha de rumo, é obtido dando um acréscimo *h* à latitude  $\varphi$ . *N* é o pólo norte e *Q* é o ponto de intersecção do paralelo de *P* com o meridiano de *P'*.



Tomando  $h$  muito pequeno, podemos considerar que o triângulo  $PQP'$  é um triângulo plano. Esse triângulo é retângulo no vértice  $Q$ , e no vértice  $P'$  o ângulo é  $V$ . Como a diferença de longitudes entre  $Q$  e  $P$  é  $\lambda(\varphi+h) - \lambda(\varphi)$ , e como os dois pontos estão no paralelo de latitude  $\varphi$  (que é uma circunferência de raio  $\cos \varphi$ ), a distância entre  $P$  e  $Q$  é igual a  $\cos \varphi \cdot [\lambda(\varphi+h) - \lambda(\varphi)]$ . Logo, tem-se

$$\operatorname{tg} V = \frac{\cos \varphi \cdot [\lambda(\varphi+h) - \lambda(\varphi)]}{h}$$

donde

$$\lambda'(\varphi) = \operatorname{tg} V \cdot \sec \varphi .$$

Como  $\lambda(0) = 0$ , segue-se que

$$\lambda(\varphi) = \operatorname{tg} V \cdot \int_0^{\varphi} \sec t \, dt .$$

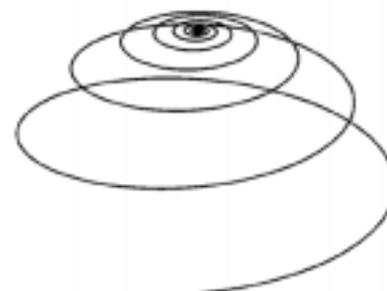
A primitiva da secante não é das mais fáceis de calcular, e a sua determinação foi um problema que interessou vários matemáticos no século XVII. Achada a primitiva, temos finalmente a equação da linha de rumo correspondente ao ângulo  $V$ :

$$\lambda = \operatorname{tg} V \cdot \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

ou, equivalentemente,

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} e^{\lambda \operatorname{cotg}(V)} .$$

Na figura seguinte está a metade norte da linha de rumo de ângulo  $8\pi/17$  (cerca de  $85^\circ$ ).



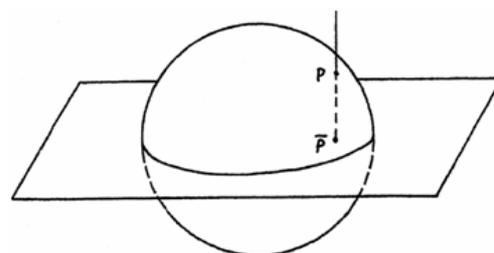
## Linhas de rumo e espirais no plano

Para ver como ficam as linhas de rumo “vistas de cima”, introduzimos coordenadas rectangulares para os pontos da esfera

$$x = \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$y = \cos \varphi \cdot \sin \lambda$$

(a terceira coordenada,  $z = \sin \varphi$ , não interessa para isto).



Os parâmetros da curva plana em coordenadas polares são  $\lambda$  e

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \cos \varphi .$$

Da expressão de  $\varphi$  em termos de  $\lambda$  sai

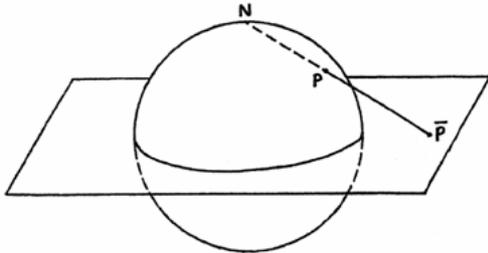
$$\cos \varphi = \frac{2e^{\lambda \cot g(V)}}{1 + e^{2\lambda \cot g(V)}}$$

o que é o mesmo que  
 $\rho = \operatorname{cosech}(\lambda \cot g(V))$  .

Isto é uma espiral, mas não é a espiral logarítmica.

A espiral logarítmica aparece quando se projecta a linha de rumo no plano do equador a partir do pólo norte (na chamada "projecção estereográfica"). Sejam X e Y coordenadas rectangulares no plano do equador. Um ponto (x,y,z) da esfera projectado a partir do pólo norte resulta no ponto de coordenadas

$$X = \frac{x}{1-z} \quad , \quad Y = \frac{y}{1-z} \quad .$$



Como fica a projecção da linha de rumo? Os parâmetros em coordenadas polares são o mesmo  $\lambda$  de há pouco e

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\rho}{1-z} = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad .$$

Como

$$e^{\lambda \cot g(V)} = \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad ,$$

vem

$$r = e^{\lambda \cot g(V)}$$

e a curva projectada é uma espiral logarítmica.

O primeiro matemático a fazer esta observação foi possivelmente o inglês Thomas Harriot (1560-1621).

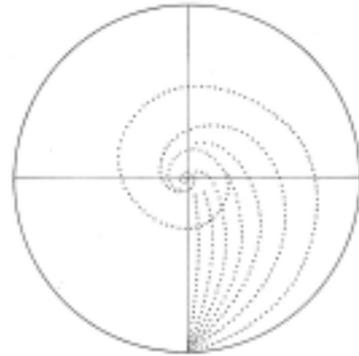
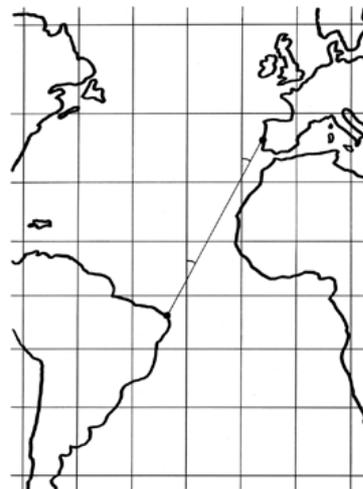


Figura de Thomas Harriot (manuscrito de 1595) representando pontos dos sete rumos vistos em projecção polar

## O problema da carta

Igualmente importante é a parte do trabalho de Pedro Nunes dedicada a questões de cartografia. O matemático português enuncia claramente como propriedade desejável para as cartas que nestas as linhas de rumo sejam representadas por linhas rectas. O interesse disto para a navegação é evidente: numa tal carta, unindo o ponto de partida e o ponto de destino por um segmento de recta, obtém-se imediatamente qual deve ser o rumo a seguir na viagem .



O problema matemático que se levanta é o de como traçar cartas com essa propriedade. Intuitivamente, vê-se que, na quadrícula meridianos / paralelos, o espaçamento entre estes últimos tem que aumentar com a latitude. Nos tratados de 1537 Pedro Nunes apenas esboça uma solução para o problema, que matematicamente é equivalente ao da descrição das linhas de rumo.

A descrição das propostas de Pedro Nunes a este respeito fica para outra ocasião. Modernamente, a carta com essa propriedade costuma chamar-se “carta de latitudes crescidas” ou “carta de Mercator”, do nome do cartógrafo flamengo Gerard Mercator (1512-1594), que em 1569 publicou um mapa do mundo com a referida intenção. Mas o primeiro autor a descrever com exactidão o processo matemático de desenhar cartas em que as linhas de rumo são

representadas por linhas rectas foi o inglês Edward Wright (1558-1615), em 1599, num livro em que cita abundantemente Pedro Nunes.

Como observação final, note-se que os trabalhos de Pedro Nunes sobre náutica foram sobretudo, pelo seu rigor e precisão, trabalhos de matemática pura. Pouco ou nenhum interesse terão tido para o esforço das navegações do tempo, condicionadas por ventos, correntes e incertezas quanto à posição dos navios. Mas é precisamente o seu rigor e precisão que os torna importantes a longo prazo. De facto, só séculos depois, com a navegação motorizada, e com o aperfeiçoamento dos métodos de determinação de posições, é que ideias como a navegação por rumos ou por arcos de linhas de rumo tiveram integral aplicação. Como alguém disse, não há nada mais prático do que uma boa teoria.

## Bartoon

