Uma introdução à Teoria das Distribuições

por Fernando Sequeira
Lisboa

(Continuação do número anterior)

7. Uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$

Descrevemos $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$ como sendo uma ampliação de $\mathcal{C}(\mathrm{R})$ que conserva a sua estrutura vectorial e que torna a derivação sempre possível; os seus elementos são as derivadas generalizadas de funções contínuas.

Para definirmos uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$, vamos agora recorrer ao facto de ele ser a soma vectorial de uma família numerável $(\mathcal{C}_q(\mathrm{R}))_{q \in \mathrm{N}}$ de espaços vectoriais complexos $\mathcal{C}_q(\mathrm{R})$, em que para cada natural q, $\mathcal{C}_q(\mathrm{R})$ designa o sub-espaço de $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$ constituído pelas distribuições que se podem representar como derivadas de ordem q de funções contínuas. Em cada um destes espaços $\mathcal{C}_q(\mathrm{R})$ introduziremos uma topologia $\mathcal{T}_q$ que verifica certas propriedades (I e II deste parágrafo) sendo a topologia do $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$ definida como soma das topologias $\mathcal{T}_q$.

No entanto, é o conceito de convergência relativo às topologias $\mathcal{T}_q$ que nos interessa em especial, ou mais precisamente, a convergência num pelo menos dos $\mathcal{C}_q(\mathrm{R})$ (suposto munido de $\mathcal{T}_q$).

O leitor que queira evitar considerações de natureza topológica pode pois utilizar-se da definição de $\mathcal{T}_q$ e do consequente critério de convergência dado para sucessões, e prosseguir a leitura dos restantes parágrafos do trabalho.

Visando uma análise um pouco mais detalhada do problema, vamos descrever um processo de chegar à referida topologia de $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$, citando também algumas das suas principais propriedades. Com o mesmo objectivo sugerimos a resolução dos problemas que seguem no fim do parágrafo. Para facilitar a leitura, este parágrafo vem acompanhado de dois apêndices e de notas, com resultados, definições e propriadades a utilizar.

Comecemos então por considerar uma certa topologia $\mathcal{T}_0$ que se utiliza geralmente em $\mathcal{C}(\mathrm{R})$ e se impõe pelas suas propriedades, e determinemos uma topologia $\mathcal{T}$ sobre $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$ tal que:

A. *A topologia induzida sobre $\mathcal{C}(\mathrm{R})$ por $\mathcal{T}$ é menos fina que $\mathcal{T}_0$* (o que assegura que toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}(\mathrm{R})$ segundo $\mathcal{T}_0$, é também convergente segundo $\mathcal{T}$);

B. *O operador derivação D é contínuo para a topologia $\mathcal{T}$*

C. *$\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$ munido de $\mathcal{T}$ é um espaço vectorial topológico separado.*

Isto é uma topologia em $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$, que torna o operador derivação contínuo, e tal que $\mathcal{C}(\mathrm{R})$, munido de $\mathcal{T}_0$ fica topològicamente incluído em $\mathcal{C}_\omega(\mathrm{R})$.

A topologia $\mathcal{T}_0$, òbviamente compatível [nota 1] com a estructura vectorial de $\mathcal{C}(\mathrm{R})$ *pode ser introduzida através de um sistema fundamental de vizinhanças da origem* [nota 1] *constituído pelas partes $V(I, \varepsilon)$ de $\mathcal{C}(\mathrm{R})$ seguintes; para cada intervalo compacto $I \subset \mathrm{R}$, e cada real $\varepsilon > 0$, $V(I, \varepsilon)$ é constituído pelas* *funções* $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *que verificam a desigualdade*

$$\max_{x \in I} |f(x)| < \varepsilon .$$

Sempre que não exista perigo de confusões usaremos também a notação $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ para designar o espaço vectorial topológico assim obtido.

A topologia $\mathcal{T}_0$ verifica algumas propriedades que nos interessa salientar:

1. *Uma sucessão* (f_n) *de funções* $f_n \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *converge para* $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$, *se e só se ela converge uniformemente para* f *sobre todo o intervalo compacto* $I \subset \mathsf{R}$.

O operador primitivação definido sobre $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ é pois contínuo, verificando-se a igualdade

$$\lim (\mathcal{S} f_n) = \mathcal{S} \lim (f_n)$$

para toda a sucessão (f_n) convergente em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$.

2. $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *munido de* $\mathcal{T}_0$ *é limite projectivo* [nota 2] *de um sistema projectivo de espaços de Banach* [vidé apêndice I].

Por sua vez, para cada q natural, o sistema fundamental de vizinhanças $\{[D^q V(I, \varepsilon)]: I \in \mathcal{V}, \varepsilon \text{ real positivo}\}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto dos intervalos impactos $I \subset \mathsf{R}$, define uma topologia $\mathcal{T}_q$ sobre $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ tal que:

I) $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *munido de* $\mathcal{T}_q$ *é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de Banach* [ver apêndice 2];

II) *São contínuas as seguintes aplicações lineares:*

1. *A injecção canónica* $\mathcal{C}(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ (o que assegura a convergência em $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ de toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$);
2. *A injecção canónica* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$ (m: natural) (o que assegura que toda a sucessão convergente em $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ é também convergente em $\mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$);
3. *A restricsão de* D^q *a* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$, *considerada como aplicação de* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *em* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$;
4. *A restricção* D^m (m: natural) a $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$, *considerada como aplicação de* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *em* $\mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$.

De acordo com $\mathcal{T}_q$, *uma sucessão* (φ_n) *de elementos de* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *converge para* $\varphi \in \mathcal{C}_q(\mathsf{R})$, *se e só se existirem uma sucessão* (f_n) *de elementos* $f_n \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *e uma função* $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ *tais que:* a) $\varphi = [D^q f]$ *e para todo o natural* n, $\varphi_n = [D^q f_n]$; b) $(f_n) \to f$ *em* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$.

Obtém-se assim uma família numerável $(\mathcal{C}_q(\mathsf{R}))_{q \in \mathsf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos que verifica as seguintes propriedades:

i) *Todo o* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ *verifica* I;

ii) *Quaisquer que sejam os naturais* q *e* m, *tem-se* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \subset \mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$, *sendo a injecção canónica* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_{q+m}(\mathsf{R})$ *uma aplicação linear contínua;*

iii) $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ *é a soma vectorial dos espaços* $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$.

Nestas condições é natural munir-se $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ da mais fina das topologias que tornam contínuas as injecções canónicas $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, denominada soma das topologias $\mathcal{T}_q$; isto é, da mais fina das topologias que induzem em cada um dos $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ uma topologia menos fina por $\mathcal{T}_q$. Então, em virtude de II 1, *ela induzirá em* $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ *uma topologia que é também menos fina que* $\mathcal{T}_0$, como se pretendia. E de acordo com essa topologia, que designaremos por $\mathcal{T}$, *o operador derivação é contínuo*, como se pode provar facilmente. Para o efeito basta ter em consideração II. 4 e que um conjunto $A \subset \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$ é aberto segundo $\mathcal{T}$, se e só se cada uma das intersecções $A \cap \mathcal{C}_q(\mathsf{R})$, $q \in \mathsf{N}$, é um aberto de $\mathcal{T}_q$.

Mas para o que se segue, tem particular importância a convergência num pelo menos dos $\mathcal{C}_q$, (R). Relativamente a esse tipo de convergência é ainda verdadeiro que se uma dada sucessão (φ_n) de distribuições converge para φ nesse sentido, a sucessão $(D\varphi_n)$ das suas derivadas converge também para $D\varphi$ num pelo menos dos $\mathcal{C}_q(\mathrm{R})$, e nesse sentido pode escrever-se

$$D\lim(\varphi_n) = \lim(D\varphi_n).$$

Nota 1

Dado um espaço topológico X, denomina-se vizinhança de uma parte $A \subset X$, todo o conjunto que contém um aberto contendo A. As vizinhanças de uma parte $\{u\}$ com $u \in X$ denominam-se também vizinhanças de u.

Posto isto, demonstra-se que o conjunto $\mathcal{V}(u)$ das vizinhanças de um ponto $u \in X$ verifica as seguintes propriedades:

1. Toda a parte de X que contém um conjunto de $\mathcal{V}(u)$, pertence a $\mathcal{V}(u)$;
2. Toda a intersecção finita dos conjuntos de $\mathcal{V}(u)$ pertence a $\mathcal{V}(u)$;
3. u pertence a todo o $V \in \mathcal{V}(u)$;
4. Se $V \in \mathcal{V}(u)$, existe um $W \in \mathcal{V}(u)$ tal que V é uma vizinhança de todo o ponto de W.

Recìprocamente, se para cada $u \in X$ existe um conjunto $\mathcal{V}(u)$ de pontos de X que verifica 1, 2, 3 e 4, então existe uma e uma só topologia sobre X tal que para cada $u \in X$, $\mathcal{V}(u)$ é o conjunto das vizinhanças de u.

Isto significa que uma topologia sobre um conjunto X pode ser definida pelos conjuntos $\mathcal{V}(u)$ das vizinhanças de cada um dos seus pontos $u \in X$. Mais precisamente, para a definir é suficiente dar para cada $u \in X$, um sistema fundamental de vizinhanças, isto é, um conjunto $\mathcal{S}(u) \subset \mathcal{V}(u)$ tal que para todo o $V \in \mathcal{V}(u)$ existe um $W \in \mathcal{S}(u)$ tal que $W \subset V$. $\mathcal{V}(u)$ será então constituído pelas partes de X que contêm um conjunto de $\mathcal{S}(u)$.

A topologia $\mathfrak{T}$ diz-se separada e X um espaço separado, se além das propriedades 1, 2, 3 e 4, X verifica ainda a seguinte:

5. Quaisquer que sejam $u, v \in X$, com $u \neq v$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e $V \in \mathcal{V}(v)$ tais que $U \cap V = \Phi$.

Se X é também um espaço vectorial complexo, diz-se que $\mathfrak{T}$ é compatível com a sua estructura vectorial, sempre que se verificam as seguintes propriedades:

6. Se $w = u + v$, com $u, v, w \in X$, então qualquer que seja $W \in \mathcal{V}(w)$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e $V \in \mathcal{V}(v)$ tais que $U + V \subset W$;
7. Se $w = \lambda \cdot u$, com $\lambda \in \mathrm{C}$ e $u, w \in X$, então qualquer que seja a vizinhança $W \in \mathcal{V}(w)$, existem $U \in \mathcal{V}(u)$ e um real $\varepsilon > 0$, tais que $(\lambda + \lambda') \cdot U \subset W$ para todo o complexo λ' verificando $|\lambda'| < \varepsilon$.

Como consequência destas propriedades resulta então que sendo $u \in X$ e $\mathcal{S}(0)$ um sistema fundamental de vizinhanças da origem, o conjunto das translatadas $u + V$, com $V \in \mathcal{S}(0)$, é também um sistema fundamental das vizinhanças de u. Este resultado permite pois, definir uma topologia sobre X, compatível com a sua estructura vectorial, por meio de um sistema fundamental de vizinhanças da origem.

De uma forma geral, seja $\mathcal{S}(0)$ um conjunto de partes de X (que supomos um espaço vectorial complexo) que verifica as seguintes propriedades:

i. O zero pertence a todo o conjunto de $\mathcal{S}(0)$;

ii. Quaisquer que sejam $U, V \in \mathcal{S}(0)$, *existe um* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $W \subset U \cap V$;

iii. Qualquer que seja $u \neq 0$, *existe* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $u \notin W$;

iv. Se $U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $W \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $W \pm W \subset U$;

v. Se $u \in U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $V \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $u + V \subset U$;

vi. Quaisquer que sejam $U \in \mathcal{S}(0)$ *e o complexo* $\alpha \neq 0$, *existe* $V \in \mathcal{S}(0)$ *tal que* $\alpha V \subset U$;

vii. Quaisquer que sejam $U \in \mathcal{S}(0)$ *e* $v \in X$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\lambda v \in U$ *quando* $|\lambda| < \varepsilon$;

viii. Qualquer que seja $U \in \mathcal{S}(0)$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\lambda U \subset U$ *quando* $|\lambda| < \varepsilon$.

Nestas condições demonstra-se que existe uma e uma só topologia sobre X, separada, compatível com a sua estructura vectorial, para a qual $\mathcal{S}(0)$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem.

Nota 2

Sendo $\mathcal{V}$ um conjunto parcialmente ordenado, filtrante à direita, diz-se sistema projectivo de espaços vectoriais topológicos com índice em $\mathcal{V}$, todo o par $((X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{V}}, (f_\alpha^\beta)_{\alpha, \beta \in \mathcal{V}})$ onde $(X_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{V}}$ é uma família de espaçes vectoriais topológicos e $(f_\alpha^\beta)^{\mathcal{V}}$ é uma família de aplicações lineares contínuas $f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$ cujo conjunto de índices é constituído pelos pares $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$, com $\alpha \leqq \beta$, e os f_α^β verificam as seguintes propriedades: *a*) f_α^α, $\alpha \in \mathcal{V}$, é a identidade de X_α; *b*) Quaisquer que sejam $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, tem-se $f_\alpha^\beta \circ f_\beta^\gamma = f_\alpha^\gamma$.

Posto isto, diz-se limite projectivo deste sistema o par $(X, (f_\alpha)_{\mathcal{V}})$ onde X é um espaço vectorial topológico e $(f_\alpha)^{\mathcal{V}}$ é uma família de aplicações lineares contínuas $f_\alpha : X \to X_\alpha$ tais que: *a*) $f_\alpha^\beta \circ f_\beta = f_\alpha$ quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$, com $\alpha \leqq \beta$; *b*) Dado um espaço vectorial topológico Y e uma família $(g_\alpha)_{\mathcal{V}}$ de aplicações lineares contínuas $g_\alpha : Y \to X_\alpha$, verificando as relações $f_\alpha^\beta \circ g_\beta = g_\alpha$, $\alpha, \beta \in \mathcal{V}$ e $\alpha \leqq \beta$, existe uma e uma só aplicação linear contínua $h : X \to Y$ tal que $f_\alpha \circ h = g_\alpha$, para todo o $\alpha \in \mathcal{V}$.

Nota 3

Chama-se espaço localmente convexo todo o espaço vectorial complexo E onde se definiu uma topologia por meio de um sistema fundamental de vizinhanças da origem constituído por conjuntos absolutamente convexos e absorventes, isto é, por conjuntos V que verificam as seguintes propriedades:

1. $\alpha u + \beta v$ pertence a V quaisquer que sejam $u, v \in V$ e os complexos α, β, com $|\alpha| + |\beta| \leqq 1$;

2. Para todo o $u \in E$ existe um real $\rho > 0$ tal que $u \in \rho V$.

E diz-se completo para as sucessões, se toda a sucessão de CAUCHY, é convergente em E.

Apêndice I

$\mathcal{C}(\mathrm{R})$ munido de $\mathcal{T}_0$ é limite projectivo do sistema $((F(I))_{I \in \mathcal{V}}, (\rho_J^I)_{I, J \in \mathcal{V}})$ definido como se segue:

a) $\mathcal{V}$ é o conjunto dos intervalos compactos de R, munido da relação de ordem $\subset$;

b) Para cada $I \in \mathcal{V}$, $F(I)$ é o espaço de BANACH formado pelo conjunto das funsões complexas definidas e contínuas sobre I, munido da estructura vectorial usual e da norma definida para cada $f \in F(I)$ por

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|$$

c) Quaisquer que sejam $I, J \in \mathcal{V}$, com $J \subset I$, ρ_J^I é a aplicação linear contínua $F(I) \to F(J)$ que a cada $f \in F(I)$ faz corresponder a sua restricção a J.

Para todo o $I \in \mathcal{V}$, a aplicação canónica $\rho_I : \mathcal{C}(\mathrm{R}) \to F(I)$, a cada $f \in \mathcal{C}(\mathrm{R})$ faz corresponder a sua restricção a I. $\mathcal{T}_0$ é pois a menos fina das topologias que tornam contínuas as aplicações ρ_I.

Apêndice II

Pode demonstrar-se que $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ é isomorfo a um sub-espaço vectorial de $\mathcal{C}(\mathsf{R})$. Com efeito, seleccionando um conjunto $\{x_1, x_2, \cdots x_q\}$ de q pontos distintos de R, segue-se que o sub-espaço vectorial $F_q(\mathsf{R})$ de $\mathcal{C}(\mathsf{R})$, instituido pelas funções $f \in \mathcal{C}(\mathsf{R})$ que se anulam naqueles pontos, é isomorfo a $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$: a aplicação $\Psi_q: F_q(\mathsf{R}) \to \mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ que a cada $f \in F_q(\mathsf{R})$ faz corresponder a distribuição $\Psi_q(f) = [D^q f]$ é um isomorfismo vectorial.

Pode pois munir-se $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ da imagem dada por Ψ_q da topologia induzida em $F_q(\mathsf{R})$ por $\mathcal{T}_0$, e essa imagem é precisamente $\mathcal{T}_q$. Ela é de resto independente dos q pontos escolhidos inicialmente.

Recorrendo ao isomorfismo Ψ_q demonstra-se então fàcilmente que $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ munido de $\mathcal{T}_q$ é limite projectivo do sistema $(F_q(I))_{I \in \mathcal{V}_q}$, $(\rho_J^I)_{I, J \in \mathcal{V}_q})$ definido como se segue:

a) $\mathcal{V}_q$ é o conjunto dos intervalos compactos de R que contêm os q pontos, escolhidos, munido da relação de ordem $\subset$;

b) Para cada $I \in \mathcal{V}_q$, $F_q(I)$ é o espaço de Banach formado pelo conjunto das funções complexas, definidas e contínuas sobre I, que se anulam nos q pontos considerados, conjunto este munido da estructura vectorial usual e de norma dada para cada $f \in F_q(J)$ por

$$\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|.$$

c) ρ_J^I, para cada I, $J \in \mathcal{V}_q$, com $J \subset I$, é a aplicação de $F_q(I)$ em $F_q(J)$ que a cada $f \in F_q(I)$ faz corresponder a sua restrição a J.

As aplicações canónicas $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}) \to F_q(I)$, $I \in \mathcal{V}_q$, são as aplicações $\rho_I \circ \Psi_q^{-1}$ onde ρ_I designa a restrição a I; a topologia $\mathcal{T}_q$ é pois a menos fina das topologias que tornam contínuas estas aplicações.

Problemas

1. Demonstre que:

a) O conjunto das partes $V(I, \varepsilon)$ de $\mathcal{C}(\mathsf{R})$, definidas neste parágrafo satisfaz as propriedades *i*) a *viii*) da nota 1, determinando por isso, unìvocamente, uma topologia $\mathcal{T}_0$ sobre $\mathcal{C}(\mathsf{R})$, compatível com a estructura vectorial deste espaço, separada, e para a qual o referido conjunto constitui um sistema fundamental de vizinhanças da origem;

b) Cada uma das partes $V(I, \varepsilon)$ é absolutamente convexa e absorvente [ver nota 3].

c) $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ munido de $\mathcal{T}_0$ é completo para as sucessões.

2. Atendendo a que $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ munido de $\mathcal{T}_0$ é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de Banach [ver apêndice I e nota 2] e supondo que $\hat{f}$ é uma função definida sobre R e com valores em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$, demonstre que:

a) Se para todo o $x \in \mathsf{R}$ existe em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$ e é nulo o limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h}$, então $\hat{f}$ é uma constante sobre R; de uma forma geral, as soluções da equação $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^n \hat{f} = 0$ (n número natural) são polinómios inteiros em x de grau inferior a n, com coeficientes em $\mathcal{C}(\mathsf{R})$;

b) Se $\hat{f}$ é contínua para a topologia $\mathcal{T}_0$, tem-se $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_0^x \hat{f}(t)\, dt = \hat{f}(x)$ e portanto é válida a fórmula de Barrow

$$\int_\alpha^\beta \hat{f}(t)\, dt = \hat{g}(\beta) - \hat{g}(\alpha)$$

em que $\hat{g}$ é uma primitiva de $\hat{f}$;

c) Se $\hat{f}$ é contìnuamente derivável sobre R e se φ é uma função escalar também continuamente derivável sobre R, tem-se

$$\frac{d}{dx}(\varphi\cdot\hat{f})=\varphi'\cdot\hat{f}+\varphi\cdot\hat{f}'$$

onde $\hat{f}'$ e φ' designam as respectivas derivadas;

d) Se $\hat{f}$ é contínuamente derivável sobre R, verificam-se as igualdades

$$\int_0^x t\hat{f}''(t)\,dt=x\hat{f}'(x)-\int_0^x \hat{f}'(t)\,dt$$

e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \hat{f}'(t)\,dt=\hat{f}'(0);$$

e) Se $\hat{f}$ admite derivada contínua até à ordem n, tem-se

$$\hat{f}(x)=\hat{f}(0)+\hat{f}'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}\hat{f}''(0)\,x^2+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(n-1)!}\hat{f}^{(n-1)}(0)\,x^{n-1}+$$
$$+\int_0^x \hat{f}^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

para todo o $x\in$ R, e

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\int_0^x \hat{f}^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt=\frac{1}{n!}\hat{f}^{(n)}(0).$$

f) Se existe o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n!\,\hat{f}(x)}{x^n}=\alpha\neq\infty$, para todo o natural m tem-se

$$\lim_{x\to 0}\frac{(n+m)!\,\mathcal{I}^m\hat{f}(x)}{x^{n+m}}=\alpha$$

onde $\mathcal{I}^m$ é a potência m do operador primitivação $\mathcal{I}\hat{f}=\int_0^x \hat{f}(t)\,dt$.

NOTA: *Estas propriedades (a a f) são ainda válidas se o espaço onde $\hat{f}$ toma valores é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de* BANACH.

3) Demonstre que o conjunto

$$\{[D^q\,V(I,\varepsilon)]:\ I\in\mathcal{V},\ \varepsilon \text{ real positivo}\}$$

de partes de $\mathcal{C}_q(\mathsf{R})$ verifica as propriedades *i* a *viii* da nota 1.

4) Demonstre a propriedade II.

8. Distribuições vectoriais

Recorrendo a uma restricção do tipo de funções contínuas que se consideram, podem também definir-se certas distribuições vectoriais, como derivadas generalizadas de ordem finita de funções contínuas.

Com esse objectivo consideremos, à imagem do que sucede com $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, um espaço vectorial complexo E, e uma família numerável $(E_q)_{q\in\mathsf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos E_q tais que:

I. *Cada um dos E_q é limite projectivo de um sistema projectivo de espaços de* BANACH;

II. *$E_q\subset E_{q+m}$ quaisquer que sejam os naturais q e m, sendo a injecção canónica $E_q\to E_{q+m}$ uma aplicação linear contínua;*

III. *E é a soma vectorial dos espaços E_q.*

E designemos por:

a) $\mathcal{C}(\mathsf{R},E)$ o espaço vectorial complexo formado pelo conjunto das funções $\hat{f}$, definidas sobre R, com valores num dos E_q (dependente de $\hat{f}$) e contínuas relativamente à topologia desse espaço, conjunto este munido da estructura vectorial usual;

b) $\mathcal{C}^1(\mathsf{R},E)$ o subespaço de $\mathcal{C}(\mathsf{R},E)$ constituído pelas funções $\hat{f}$ que verificam a seguinte propriedade: para cada $\hat{f}$ existe um E_q tal que $\hat{f}$ é uma aplicação de R em E_q, contìnuamente derivável relativamente à topologia de E_q.

Verifica-se então que se $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathsf{R}, E)$ e se $\hat{f}'$ é a sua derivada calculada num certo E_q, $\hat{f}'$ é também a derivada de $\hat{f}$ em todo o E_{q+m}, o que justifica denominá-la derivada de $\hat{f}$.

O operador $\hat{f} \to \hat{f}'$ é pois uma aplicação linear de $\mathcal{C}^1(\mathsf{R}, E)$ em $\mathcal{C}(\mathsf{R}, E)$.

Nestas condições, pode pôr-se o problema de determinar um sobre-espaço mínimo $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ de $\mathcal{C}(\mathsf{R}, E)$, onde a derivação é sempre possível, um operador linear e um prolongamento da derivada definida em $\mathcal{C}^1(\mathsf{R}, E)$. Por outras palavras; *determinar um sobre-espaço vectorial complexo $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ de $\mathcal{C}(\mathsf{R}, E)$ e duas aplicações lineares $\Phi : \mathcal{C}(\mathsf{R}, E) \to \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ e $D : \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E) \to \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ tais que:*

i. Φ é injectiva;

ii. Se $\hat{f} \in \mathcal{C}^1(\mathsf{R}, E)$, então $\Phi(\hat{f}') = D\Phi(\hat{f})$;

iii. Todo o $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ pode exprimir-se com a forma $\hat{\varphi} = D^n \Phi(\hat{f})$ onde n é um inteiro não negativo e $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathsf{R}, E)$;

iv. Se $D\hat{\varphi} = 0$, com $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$, então $\hat{\varphi} = \Phi$ (constante).

Percorrendo caminhos paralelos aos utilizados para o caso escalar, pode demonstrar-se a existência e a unicidade (a menos de um isomorfismo vectorial) de $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$. Um modelo pode ainda ser obtido recorrendo ao conjunto $\mathcal{C}^*(\mathsf{R}, E)$ constituído pelos elementos de forma $D^n \hat{f}$, com n inteiro não negativo e $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathsf{R}, E)$, e à relação de equivalência definida sobre $\mathcal{C}^*(\mathsf{R}, E)$ do seguinte modo: dados dois elementos $D^n \hat{f}$ e $D^m \hat{g}$ pertencentes a $\mathcal{C}^*(\mathsf{R}, E)$, eles dizem-se equivalentes e escreve-se $[D^n \hat{f}] = [D^m \hat{g}]$, se e só se $J^m \hat{f} - J^n \hat{g}$ é um polinómio de grau inferior a $n + m$, cujos coeficientes são elementos de E.

O conjunto das classes de equivalência assim obtidas munido de adição definida por

$$[D^n \hat{f}] + [D^m \hat{g}] = [D^{n+m}(J^m \hat{f} + J^n \hat{g})]$$

e do produto por escalares dado por

$$\lambda \cdot [D^n \hat{f}] = [D^n(\lambda \hat{f})], \quad \lambda \in \mathsf{C}$$

constitui um espaço vectorial complexo. Associado às aplicações Φ e D definidas por

$$\Phi(f) = [D^0 \hat{f}], \quad \hat{f} \in \mathsf{C}(\mathsf{R}, E)$$

e

$$D[D^n f] = [D^{n+1} \hat{f}]$$

verifica as propriedades *i* a *iv*, constituindo portanto uma solução do problema. Designá-la-emos por $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$; os seus elementos são certas distribuições vectoriais que se podem representar como derivadas de ordem finita de funções contínuas, uma vez que identifiquemos os elementos da forma $\Phi(\hat{f})$, $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathsf{R}, E)$, com os próprios $\hat{f}$. As distribuições assim obtidas são suficientes para o nosso objectivo.

*

* *

Dados uma família numerável $(E_q)_{q \in \mathsf{N}}$ de espaços vectoriais topológicos que verifica as propriedades I e II, e para cada $q \in \mathsf{N}$, o subespaço $\mathcal{C}_q(\mathsf{R}, E_q) \subset \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$, constituído pelas distribuições que se podem representar como derivadas de ordem q de funções, definidas sobre R, com valores em E_q e contínuas para a topologia de E_q, pode demonstrar-se que a família $(\mathcal{C}_q(\mathsf{R}, E_q))_{q \in \mathsf{N}}$ também verifica as propriedades I e II, e que $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R}, E)$ é precisamente a sua soma vectorial.

Este resultado permite então definir as distribuições de ordem finita em R^2, como distribuições de ordem finita em R, com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, e por indução as distribuições de ordem finita em R^n. Assim, uma distribuição $\hat{\varphi}$ de ordem finita em R^n pode apresentar-se como a derivada generalizada $D_1^{p_1} D_2^{p_2}, \cdots, D_n^{p_n}$ de ordem p_1 em relação a x_1, p_2 em relação a $x_2, \cdots$, de uma função complexa $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ definida e contínua sobre R^n.

No que se segue, utilizaremos a seguinte convenção: dado um conjunto

$$p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

de n números inteiros não negativos, representamos por D^p o operador $D_1^{p_1} D_1^{p_1}, \cdots, D_n^{p_n}$, e por J^p o operador $J_1^{p_1} J_2^{p_2}, \cdots, J_n^{p_n}$ onde J_i, $i \leq n$, é definido por

$$J_i f = \int_0^{x_i} f(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \cdots, x_n)\, d\xi$$

para toda a função f contínua sobre R^n.

Posto isto, dados dois elementos $[D^p f]$ e $[D^q g]$ onde $p = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$ e $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$, eles representam a mesma distribuição, se e só se $J^q f - J^p g$ é da forma $\sum_{i=1}^{n} \Pi_i$, onde para cada $i \leq n$, Π_i é um polinómio de grau inferior a $p_i + q_i$ na variável x_i e cujos coeficientes são distribuições de ordem finita nas restantes variáveis.

A soma de duas distribuições $[D^p f] + [D^q g]$ vem dada por

$$[D^p f] + [D^q g] = [D^{p+q}(J^q f + J^p g)]$$

e o produto de um complexo λ por uma distribuição $[D^p f]$, é por sua vez

$$\lambda \cdot [D^p f] = [D^p(\lambda f)].$$

*

* *

Apliquemos agora estes resultados a alguns exemplos. Seja h a função de Heaviside, e consideremos a função de x, que em cada ponto $x \in \mathsf{R}$ toma o valor $h(y-x)$. Ela é uma função vectorial, com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, contínua e indefinidamente diferenciável em ordem a x e pode ser representada por $D_y\, g(y-x)$ onde $g(y-x)$ é a função definida por

$$g(y-x) = \begin{cases} y-x & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x \end{cases}.$$

A seu respeito, é então verdadeiro que $D_y\, g(y-x) = -D_x\, g(y-x)$, porquanto $J_x\, g(y-x) + J_y\, g(y-x) = \frac{1}{2} y^2$.

De uma forma geral, dada uma distribuição qualquer $\varphi \in D^n f$, com $f \in \mathcal{C}\mathsf{R})$, $n \in \mathsf{N}$, a função que em cada ponto $x \in \mathsf{R}$, toma o valor

$$\mathcal{T}_x\, \varphi(g) = \varphi(y-x) = D^n f(y-x)$$

é contínua e indefinidamente diferenciável em ordem a x, e a sua derivada toma o valor $-D_y^{n+1} f(y-x)$ para todo o $x \in \mathsf{R}$. Podemos então escrever

$$D_x\, \varphi(y-x) = -D_y\, \varphi(y-x)$$

e para todo o natural p,

$$D_x^p\, \varphi(y-x) = (-1)^p D_y^p\, \varphi(y-x).$$

No caso da distribuição $\delta(x) \in \mathcal{C}_\omega(\mathsf{R})$, teremos:

$$\delta(y-x) = D_y^2\, g(y-x) = D_x^2\, g(y-x)$$

onde

$$g(y-x)=\begin{cases} y-x & \text{se } y \geq x \\ 0 & \text{se } y < x \end{cases}$$

e portanto

$$\delta(y-x)=D_x^2(g(y-x)-(y-x))=D_x^2 g(x-y)$$

isto é

$$\delta(y-x)=\delta(x-y).$$

*

* *

Um outro conceito que nos interessa é o de valor num ponto de uma distribuição vectorial. Adoptaremos a seguinte definição: *diz-se que vma distribuição* $\hat{\varphi} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ *tem valor num ponto* $\alpha \in \mathbf{R}$, *se e só se ela admite uma representante* $D^n \hat{f}$, *com* $\hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$, *tal que num dos* E_q *existe o limite*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{n!\,\hat{f}(x)}{(x-\alpha)^n}.$$

Este limite, que representaremos por $\hat{\varphi}(\alpha)$, *denomina-se valor de* $\hat{\varphi}$ *no ponto* α.

Por forma análoga à utilizada no parágrafo 4, podemos ainda definir os valores $\hat{\varphi}(\alpha^+)$, $\hat{\varphi}(\alpha^-)$, $\hat{\varphi}(-\infty)$, $\hat{\varphi}(+\infty)$, que são prolongamentos de conceitos análogos relativos a funções, e que verificam as propriedades usuais, descritas no parágrafo 4 para o caso das distribuições escalares.

Recorrendo a estes conceitos podem então definir-se os integrais

$$\int_{\alpha^{\pm}}^{\beta^{\pm}} \hat{\mu}(x)\,dx = \hat{\varphi}(\beta^{\pm}) - \hat{\varphi}(\alpha^{\pm})$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \hat{\mu}(x)\,dx = \hat{\varphi}(\beta) - \hat{\varphi}(\alpha)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mu}(x)\,dx = \hat{\varphi}(+\infty) - \hat{\varphi}(-\infty)$$

onde $\hat{\mu} \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$, $\hat{\varphi}$ é uma primitiva de $\hat{\mu}$ e se supõe existirem aqueles valores ou limites laterais.

A título de exemplo consideremos as distribuições vectoriais $h(y-x)$ e $\delta(y-x)$ onde h designa a função de Heaviside. De acordo com as definições dadas, tem-se

$$[h(y-x)]_{x=\alpha} = h(y-\alpha),$$

$$[\delta(y-x)]_{x=\alpha} = \delta(y-\alpha),$$

$$[h(y-x)]_{x=+\infty} = 0$$

e

$$[h(y-x)]_{x=-\infty} = 1$$

o que nos permite escrever por sua vez

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(y-x)\,dx = h(y-\beta) - h(y-\alpha)$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y-x)\,dx = 1.$$

Problemas

1) Sendo $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{C}}_\omega(\mathbf{R})$ uma distribuição vectorial com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, demonstre que:

$a)$ $$\int_{\alpha}^{\beta} \hat{\varphi}(x)\,dx = \theta(y) \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}),\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} D_y \hat{\varphi}(x)\,dx = D_y\,\theta(y)$$

$b)$ $$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(x)\,dx = \theta(y) \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} D_y \hat{\varphi}(x)\,dx = D_y\,\theta(y).$$

2) Demonstre que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iyx}}{\alpha + i x}\,dx =$$

$$= \begin{cases} 2\pi h(y)\,e^{-\alpha y} & \text{se } \alpha > 0 \\ -2\pi(1-h(y))\,e^{-\alpha y} & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.$$

3) Considere e^{iyx} como uma distribuição em x com valores em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e a identidade

$$e^{iyx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_y^{n-k} \left[\frac{\alpha^k e^{iyx}}{(\alpha + i x)^n} \right]$$

válida para todo o natural n e todo o real $\alpha \neq 0$.

Posto isto, determine:

a) Os limites $\lim_{x \to \pm\infty} e^{iyx}$;

b) Tendo em atenção os problemas 1 e 2, o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} d\,x$;

c) O integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} d\,x$.

9. Alguns casos de multiplicação com distribuições. Fórmula de Dirac

Seja $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ o subespaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R}, E)$ constituído pelas funções indefinidamente diferenciáveis, sendo esta diferenciabilidade entendida no sentido referido no parágrafo 8. Entre os seus elementos e as distribuições de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ pode então definir-se uma multiplicação do seguinte modo: dadas $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, diz-se produto de $\hat{f}$ por φ e representa-se por $\hat{f} \cdot \varphi$ uma distribuição de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ tal que:

I. Se φ é uma função contínua, $\hat{f} \cdot \varphi$ é o produto usual;

II. É válida a regra de derivação

$$(1) \qquad D(\hat{f} \cdot \varphi) = \hat{f} \cdot D\varphi + \hat{f}' \cdot \varphi$$

onde $\hat{f}'$ designa a derivada de $\hat{f}$ no sentido referido atrás, e D representa indestintamente a derivação em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}, E)$ e em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

De forma análoga à utilizada no § 6, demonstra-se que esta operação fica univocamente determinada pelas propriedades I e II, e que sendo $\varphi = D^n g$ com $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, e $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$, tem-se

$$(2) \qquad \hat{f} \cdot \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} [\hat{f}^{(k)} \cdot g]$$

onde $\hat{f}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ designa a derivada de ordem k de $\hat{f}$. E demonstra-se ainda que esta multiplicação satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(\hat{f} + \hat{g}) \cdot \varphi = \hat{f} \cdot \varphi + \hat{g} \cdot \varphi$

2. $\hat{f}(\varphi + \psi) = \hat{f} \cdot \varphi + \hat{f} \cdot \psi$

quaisquer que sejam $\hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$, e $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e ainda

3. Se $\hat{\theta} = \hat{f} \cdot \varphi$, com $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e se num ponto $\alpha \in \mathbf{R}$ existe o valor $\varphi(\alpha)$, então existe $\theta(\hat{\alpha})$ e tem-se $\hat{\theta}(\alpha) = \hat{f}(\alpha) \cdot \varphi(\alpha)$.

Por indução demonstra-se ainda que

$$(3) \qquad \hat{f} \cdot D^n \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} (\hat{f}^{(k)} \cdot \varphi).$$

Consideremos agora o produto $\hat{f} \cdot \delta$ onde $\hat{f} \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R}, E)$ e δ é a distribuição de Dirac: Como

$$\int_0^x \hat{f}'(\xi)\, h(\xi)\, d\xi = (\hat{f}(x) - \hat{f}(0))\, h(x)$$

onde h designa a função de Heaviside, derivando ambos os membros desta igualdade vem

$$(4) \qquad \hat{f}(x) \cdot \delta(x) = \hat{f}(0) \cdot \delta(x)$$

Substituindo na igualdade 3, tem-se por sua vez

$$(5)\quad \hat{f}\cdot\delta^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}D^{n-k}(\hat{f}^{(k)}\cdot\delta)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(0)\cdot\delta^{(n-k)}$$

Consideremos então o produto $\theta(y-x)\cdot\cdot\,\delta^{(n)}(x)$ onde $\theta\in\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ e $\delta^{(n)}$ designa a derivada de ordem n (inteiro não negativo) de δ. Vem de acordo com 5

$$\theta(y-x)\cdot\delta(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\theta^{(k)}(y)\,\delta^{(n-k)}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_y^k\,\theta(y)\,\delta^{(n-k)}(x).$$

Para $n=0$, vem

$$\theta(y-x)\cdot\delta(x)=\theta(y)\cdot\delta(x)$$

o que associado à igualdade $\theta(y)\cdot\delta(x)==D_x[\theta(y)h(x)]$ onde h designa a função de HEAVISIDE, vai permitir-nos escrever a conhecida fórmula de Dirac:

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(y-x)\,\delta(x)\,dx=\theta(y)$$

válida para toda a distribuição $\theta\in\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

Do mesmo modo, se $\varphi=D^n g$, com $g\in\mathcal{C}(\mathbf{R})$, e usando a igualdade 2, obtem-se

$$\delta(y-x)\cdot\varphi(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k D_x^k[\delta_x^{(n-k)}(y-x)\cdot g(x)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_x^k D_y^{n-k}[\delta(y-x)\,g(x)]$$

e atendendo a que $\delta(y-x)\,g(x)=\delta(y-x)\,g(y)$, vem

$$\delta(y-x)\cdot\varphi(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_x^k D_y^{n-k}[\delta(y-x)\,g(y)]$$

isto é

$$(7)\qquad \delta(y-x)\,\varphi(x)=\delta(y-x)\cdot\varphi(y).$$

Este resultado, que é muito importante, pode ser aplicado ao cálculo do integral $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(g-x)\,\varphi(x)\,dx$. Então, atendendo a que $\delta(y-x)\cdot\varphi(y)=-D_x[h(g-x)\cdot\varphi(y)]$ onde h é a função de HEAVISIDE, e a que

$$\lim_{x\to+\infty}h(y-x)\,\varphi(y)=0$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}h(y-x)\,\varphi(y)=\varphi(y),$$

vem

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y-x)\,\varphi(x)\,dx=\varphi(y)$$

igualdade esta que é também conhecida por fórmula de Dirac.

Se φ admite uma primitiva com valores nos pontos α e β de $\mathbf{R}$, existe também o integral $\int_{\alpha}^{\beta}\delta(y-x)\,\varphi(x)\,dx$, e vem

$$\int_{\alpha}^{\beta}\delta(y-x)\,\varphi(x)\,dx=h(y-\alpha)\,\varphi(y)-$$

$$-h(y-\beta)\,\varphi(y).$$

*

* *

Uma multiplicação com interesse é ainda a que se pode efectuar entre elementos de $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R})$ e de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R},E)$. Também agora, dados $f\in\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R})$ e $\hat{\varphi}\in\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R},E)$, diz-se produto de f por $\hat{\varphi}$ uma distribuição que se representa por $f\cdot\hat{\varphi}$ tal que:

I') Se $\hat{\varphi}$ é uma função contínua, $f\cdot\hat{\varphi}$ é o produto usual;

II') É válida a regra de derivação

$$D(f\cdot\hat{\varphi})=f\cdot D\hat{\varphi}+f'\cdot\hat{\varphi}.$$

Esta operação fica unìvocamente determinada pelas propriedades I' e II', e sendo $\hat{\varphi}=D^n\hat{g}$, com $\hat{g}\in\mathcal{C}(\mathsf{R},E)$, tem-se ainda

$$f\cdot\hat{\varphi}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}D^{n-k}[f^{(k)}\cdot\hat{g}].$$

A respeito desta multiplicação, como se pode demonstrar fàcilmente, as igualdades

1. $(f+g)\cdot\hat{\varphi}=f\cdot\hat{\varphi}+g\cdot\hat{\varphi}$;
2. $f(\hat{\varphi}+\hat{\psi})=f\cdot\hat{\varphi}+f\cdot\hat{\psi}$;
3. $f\cdot(g\cdot\hat{\varphi})=(f\cdot g)\cdot\hat{\varphi}$;
4. $1\cdot\hat{\varphi}=\hat{\varphi}$;

são válidas quaisquer que sejam $f\cdot g\in\mathcal{C}^{\omega}(\mathsf{R})$ e $\hat{\varphi},\hat{\psi}\in\mathcal{C}_{\omega}(\mathsf{R},E)$.

$\mathcal{C}_{\omega}(\mathsf{R},E)$ constitui pois um módulo sobre o anel $\mathcal{C}^{\omega}(\mathsf{R})$.

Problemas

Seja f uma função complexa, definida e contínua sobre R, que verifica a seguinte propriedade: existe um natural n tal que $\dfrac{f(x)}{(x+i\alpha)^n}$, com α real $\neq 0$, é limitado sobre R. Nessas condições, demonstre que:

a) Sendo $\hat{\theta}(x)=e^{iyx}\cdot f(x)$ uma distribuição vectorial em x, com valores em $\mathcal{C}_{\omega}(\mathsf{R})$, tem-se

$$\hat{\theta}(-\infty)=\hat{\theta}(+\infty)=0;$$

b) Se $\varphi=D^m f$ com m natural, e $\hat{\Psi}(x)=$ $=e^{iyx}\cdot\varphi(x)$, vem

$$\hat{\Psi}(-\infty)=\hat{\Psi}(+\infty)=0.$$

c) Existem os integrais

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}f(x)\,dx$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}\varphi(x)\,dx.$$

d) Se $\varphi=D^m f$, com m natural, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}D\varphi(x)\,dx=(-iy)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyx}\varphi(x)dx.$$