Uma aplicação de cálculo simbólico com interesse para o estudo da teoria dos circuitos eléctricos

por Fernando M. Sequeira
Lisboa

Introdução

O cálculo simbólico definido por J. SEBASTIÃO E SILVA no trabalho «Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables à spectre vide ou non borné» [2], permite resolver muitos problemas de física e de electricidade; convém no entanto realizar certos trabalhos de adaptação dos resultados nele expressos, no sentido de os tornar mais manejáveis.

Com esse objectivo deduzimos pois algumas fórmulas de aplicação imediata, cujo domínio de validade é todavia mais lato do que o definido pelas condições em que elas foram deduzidas. Já usadas em circunstâncias menos gerais, e por vezes de forma heurística, elas permitem uma aplicação fácil do cálculo simbólico à teoria dos circuitos, ao estudo dos sistemas dinâmicos lineares, à teoria do controle linear automático, à resolução de sistemas de equações diferenciais, etc. Na parte final apresentamos alguns exemplos dessas aplicações.

1. As redes lineares interpretadas como funções

Um quadrupolo eléctrico, na medida em que a cada «sinal de entrada» faz corresponder um «sinal de saida», define uma função. Tanto o sinal de entrada, como o de saída, são em geral constituídos por duas distribuições $u_1(t)$ e $u_2(t)$ na variável tempo: duas correntes, duas tensões ou uma corrente e uma tensão; no que se segue, designá-las-emos por *componentes do sinal*, ou simplesmente por *sinais*.

Um quadrupolo diz-se linear, quando à soma de dois sinais de entrada faz corresponder a soma das respectivas saídas, e à multiplicação de um sinal por uma constante, faz corresponder a multiplicação pela mesma constante da respectiva saída.

Se G designa a função definida pelo quadrupole, X a entrada e Y a saída, estas propriedades podem-se representar pelas expressões:

a) $Y = G(X)$;

b) $G(X_1 + X_2) = G(X_1) + G(X_2)$;

c) $G(\lambda X) = \lambda G(X)$

onde X_1 e X_2 designam dois sinais de entrada e λ é uma constante.

A adição de sinais e a multiplicação por constantes são as usuais, e correspondem à adição e à multiplicação por essas constantes das respectivas componentes:

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, \ u_2 + v_2)$$

$$\lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \ \lambda u_2)$$

onde (u_1, u_2) e (v_1, v_2), são dois sinais de duas componentes cada, e λ é uma constante.

Cada componente da saída é também uma função linear da entrada, podendo-se escrever

$$v_1 = G_1(u_1, u_2)$$

$$v_2 = G_2(u_1, u_2)$$

onde u_1, u_2 são as componentes da entrada e v_1, v_2 as da saída.

Definindo-se então as aplicações $G_{l,k}$, $l, k=1, 2$ pelas relações $G_{11}(u_1)=G_1(u_1, 0)$, $G_{12}(u_2)=G_1(0, u_2)$, $G_{21}(u_1)=G_2(u_1, 0)$ e $G_{22}(u_2)=G_2(0, u_2)$, pode escrever-se

$$v_l=\sum_{k=1}^{2} G_{lk}(u_k) \qquad l=1,2$$

ficando pois cada quadrupole linear determinado por estas quatro aplicações G_{lk}.

Um esquema análogo pode também aplicar-se a uma rede linear. Sabe-se que então existe um conjunto de grandezas, correntes ou tensões, $u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t)$ linearmente independentes, tais que a corrente através de qualquer ramo l da rede, ou a tensão entre os seus terminais, v_l, se pode exprimir como função linear daquelas grandezas:

$$v_l = G_l(u_1, u_2, \cdots, u_p).$$

E em virtude de a rede ser linear, para cada l e cada k pode-se definir uma aplicação linear G_{lk} que a cada componente u_k da entrada faz corresponder a componente de saída $G_{lk}(u_k)$ dada pela relação

$$G_{lk}(u_k)=G_l(0, 0, \cdots, 0, u_k, 0, \cdots, 0)$$

tendo-se então

$$G_l(u_1, u_2, \cdots, u_p)=\sum_{k=1}^{p} G_{lk}(u_k).$$

O estudo do funcionamento das redes pode pois fazer-se através das aplicações lineares G_{lk}, que a cada componente da entrada (distribuição na variável tempo) faz corresponder uma distribuição na mesma variável.

2. Os sinais como elementos de um espaço de distribuições

No que se segue vamos supor que os sinais são distribuições na variável tempo, de tipo exponencial [1], isto é, da forma

$$g=D^n[e^{n|t|}f(t)]$$

onde $n=0, 1, 2, \cdots$, f é uma função complexa, contínua, limitada, e D designa a derivação em ordem ao tempo. Designaremos por Λ o espaço vectorial constituído por estas distribuições, que suporemos munido de estructura topológica usual (1).

Esta situação é suficientemente geral para englobar os casos que se apresentam na prática, e além disso Λ verifica algumas propriedades que são importantes para o estudo dos circuitos.

Uma dessas propriedades resulta do seguinte. Tendo em atenção que toda a distribuição $g \in \Lambda$ é decomponível numa diferença [1] $g^+ - g^-$ de duas distribuições g^+ e g^- pertencentes a Λ, nulas respectivamente à esquerda e à direita da origem, determinadas a menos de uma combinação linear de $\delta(t)$ e de suas derivadas, pode definir-se a transformação bilateral de Fourier do seguinte modo [1]: dado $g=g^+ - g^- \in \Lambda$, diz-se transformada de Fourier $\mathcal{F}(g)$ de g, a função complexa $\varphi(z)$, holomorfa no complementar V_α de uma faixa $|\operatorname{Im} z| \leqq \alpha$ (α real não negativo dependente de g) do plano complexo, e determinada a menos de um polinómio inteiro em z pelas relações

$$\varphi(z)=\begin{cases} \int_R g^+(t)e^{izt}dt & \text{se } \operatorname{Im} z>0 \\ \int_R g^-(t)e^{izt}dt & \text{se } \operatorname{Im} z<0. \end{cases}$$

Demonstra-se ainda que cada uma destas imagens $\mathcal{F}(g)$, $g \in \Lambda$, é uma função de crescimento lento (2) sobre o fecho de V_α. Estas classes de funções, determinadas a menos de um polinómio inteiro em z, chamam-se ultradistribuições temperadas [1], e o seu conjunto munido da adição e da multiplicação por complexos usuais, constitui um espaço vectorial complexo, que designaremos por U.

Recìprocamente, dada uma ultradistribuição temperada, a relação

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta\alpha} e^{-izt}\,\varphi(z)\,dz$$

onde φ é uma representante qualquer da ultradistribuição, determina unìvocamente uma distribuição $g(t)\in\Lambda$. Neste integral, Δ_α é a fronteira de uma banda $|I_m z|\leqq\alpha$ (α real positivo) do plano complexo, tal que $\varphi(z)$ é holomorfa no complementar V_α dessa banda, e de crescimento lento sobre o fecho de V_α; a fronteira é orientada por forma a deixar à direita os pontos da banda.

As aplicações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são injectivas, sendo $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$ e $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ as identidades de respectivamente U e Λ.

Se identificarmos pois cada sinal a uma distribuição de Λ, e as decomposições espectrais aos elementos de U, a transformação de Fourier e a sua inversa fazem corresponder a cada sinal uma decomposição espectral e recìprocamente.

Estas aplicações são lineares, e sobre U é possível definir uma topologia (3) por forma que elas são também isomorfismos contínuos [1].

Entre os elementos de U, têm particular interesse os que são representados por funções $\varphi(z)$, prolongáveis como funções holomorfas ao complementar do eixo real e de crescimento lento (para ∞ e para o eixo real) nos smi-planos $\operatorname{Im} z>0$ e $\operatorname{Im} z<0$; nessas condições existem os limites no sentido das distribuições temperadas (4),

$$\lim_{y\to 0^{\pm}}\varphi(\omega+iy)=g^{\pm}(\omega).$$

As distribuições $g^{+}(\omega)$ e $g^{-}(\omega)$ são temperadas, e sendo injectiva a aplicação linear $\varphi(z)\to g^{+}(\omega)-g^{-}(\omega)$, identificam-se por vezes estas funções holomorfas $\varphi(z)$ com as suas imagens $g(\omega)=g^{+}(\omega)-g^{-}(\omega)$ no espaço S' das distribuições temperadas.

Recorrendo a estas identificações, a transformação bilateral de Fourier, coincide com a transformação de Fourier usual, definindo um automorfismo de S', que é contínuo para a topologia usual de S' (4).

3. Uma álgebra de operadores

A continuidade de um operador relativamente a uma dada topologia permite muitas vezes tirar conclusões importantes a respeito das suas propriedades. E no caso das redes tem-se um exemplo.

Com efeito, se se identificam os sinais com elementos de Λ, e se a continuidade dos operadores é relativa à topologia deste espaço, resultam de forma quase imediata muitas das propriedades com interesse para estudo dos circuitos.

Uma dessas propriedades resulta de se supor ainda que as características dos circuitos não se alteram ao longo do tempo, o que significa que os operadores G definidos pelas redes são comutáveis com a translacção no tempo. Como consequência, vem que:

I. *A todo o operador G definido por uma rede, contínuo para a topologia de Λ, corresponde uma distribuição $g(t)$ de decrescimento sub-exponencial* (5), *tal que*

$$G(f)=g*f=\int_{\mathsf{R}} g(t-\xi)\,f(\xi)\,d\xi$$

para todo o $f\in\Lambda$.

$g(t)$ é obviamente a imagem $G(\delta)$ de função de Dirac, ou a resposta do circuito a um impulso de Dirac.

Uma outra propriedade é a seguinte:

II. *A decomposição espectral do sinal de saída obtém-se multiplicando por* $\mathcal{F}(g)$ [1] *a decomposição espectral do sinal de entrada.*

Resultado importante advém ainda de se admitir um princípio de causalidade entre a entrada e a saída: o valor do sinal de saída num dado instante t (quando existir) não pode depender do valor do sinal de entrada em instantes posteriores a t, o que implica:

III. *As respostas* $g(t)$ *dos circuitos a impulsos de* DIRAC *são nulas à esquerda de origem.*

Supondo portanto que os sinais são de crescimento exponencial, impondo a continuidade dos operadores relativamente à topologia de Λ, bem como a comutabilidade com a translacção no tempo e o referido princípio de causalidade entre a entrada e a saída, selecciona-se um tipo de operadores para os quais se deduzem as propriedades I, II e III.

Sucede porém, que estes operadores não são suficientes para estudar muitos dos circircuitos com interesse; os circuitos ligados a este tipo de operadores respondem com um sinal de decrescimento sub-exponencial ao impulso $\delta(t)$.

Uma generalização destas propriedades a outros circuitos, e portanto a outros operadores, é então de considerar; e um exemplo é o constituído pelos operadores G da forma

$$G(f)=g*f=\int_{\mathsf{R}} g(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

onde $g\in\Delta$ e é nula à esquerda da origem. São estes os operadores que nos interessam, isto é, operadores lineares G que ao impulso $\delta(t)$ fazem corresponder imagens $G(\delta)= =g\in\Lambda$, nulas à esquerda da origem.

Cada um destes operadores $G\leftrightarrow g$ terá então o seu domínio constituído pelas distribuições $f\in\Lambda$ para as quais existe o produto de convolução $g*f$, satisfaz o referido princípio de causalidade e comuta com a translacção.

O conjunto destas distribuições $g\in\Lambda$ nulas à esquerda da origem, munido da estrutura vectorial induzida por Λ e do produto de convolução, constitui uma álgebra comutativa complexa, com elemento unidade. Se a munirmos da topologia induzida por Λ, relativamente à qual o produto de convolução é contínuo, ela passa a constituir também uma álgebra localmente convexa, completa e separada. No que se segue designá-la-emos por Λ^+.

A transformação de FOURIER $\mathcal{F}$ define um isomorfismo vectorial entre Λ^+ e o subespaço U^+ de U constituído pelas ultradistribuições que admitem uma representante $\varphi(z)$ nula no semi-plano $\operatorname{Im} z<0$. Se em U^+ introduzimos o produto usual, U^+ adquire a estructura de uma álgebra, e $\mathcal{F}$ passa a definir um isomorfismo algébrico entre Λ^+ e U^+.

Se rodarmos de 90° os elementos de U^+ pela transformação $z\to -iz$, obtemos por sua vez uma álgebra V^+, isomorfa de U^+, e que é constituído pelas imagens de LAPLACE [1] $\mathcal{L}(g)$ dos elementos $g\in\Lambda^+$. A transformação de LAPLACE define um isomorfismo entre Λ^+ e V^+, e a seu respeito são válidas as relações

$$a)\ \ \mathcal{L}=R^{-1}\mathcal{F} \qquad c)\ \ \mathcal{L}^{-1}=\mathcal{F}^{-1}R$$
$$b)\ \ \mathcal{F}=R\mathcal{L} \qquad d)\ \ \mathcal{F}^{-1}=\mathcal{L}^{-1}R^{-1}$$

onde R representa a rotação de 90° definida em V^+ pela transformação $z\to iz$.

A respeito das transformações de FOURIER e de LAPLACE são ainda válidas as seguintes propriedades:

I. $\mathcal{F}(Dg) = -iz\mathcal{F}(g)$

II. $\mathcal{F}(g * h) = \mathcal{F}(g) \cdot \mathcal{F}(h)$

III. $\mathcal{F}^{-1}(\varphi \cdot \psi) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi) * \mathcal{F}^{-1}(\psi)$

IV. $\mathcal{F}(t \cdot g) = -iD_z\mathcal{F}(g)$

I'. $\mathcal{L}(Dg) = z \cdot \mathcal{L}(g)$

II'. $\mathcal{L}(g * h) = \mathcal{L}(g) \cdot \mathcal{L}(h)$

III'. $\mathcal{L}^{-1}(\Phi \cdot \theta) = \mathcal{L}^{-1}(\Phi) * \mathcal{L}^{-1}(\theta)$

IV'. $\mathcal{L}(t \cdot g) = -D_z\mathcal{L}(g)$

quaisquer que sejam $g, h \in \Lambda^+$, $\varphi, \psi \in U^+$ e $\Phi, \theta \in V^+$.

Ás transformadas de FOURIER dos elementos de Λ^+ chamaremos respostas de frequência dos circuitos correspondentes, e às transformadas de LAPLACE, funções de transferência.

As respostas de frequência serão pois, as funções complexas $\varphi(z)$, holomorfas num semi-plano $\operatorname{Im} z > \alpha$ (α real, dependente de φ) e de crescimento lento sobre o seu fecho, e as funções de transferência serão as funções $\theta(z)$, holomorfas num semi-plano $Re\, z > \alpha$ (α real dependente de θ) e de crescimento lento sobre o seu fecho.

4. Funções de operadores

No parágrafo anterior definiu-se uma álgebra de operadores lineares, com elemento unidade, isomorfa de Λ^+, constituída pelos operadores G da forma

$$G(f) = \int_R g(t - \xi) f(\xi)\, d\xi$$

com $g \in \Lambda^+$. No que se segue, identificaremos pois cada um destes operadores com a distribuição correspondente, isto é, a álgebra dos operadores com Δ^+.

A estructura vectorial desta álgebra verifica-se a respeito das operações usuais de adição e de multiplicação por complexos, e do produto de convolução. Munido de estructura topológica induzida por Λ, ela é ainda completa.

A transformação de FOURIER define por sua vez um isomorfismo entre Λ^+ e U^+, que ao produto de convolução em Λ^+ faz corresponder o produto usual em U^+. A transformação de LAPLACE define por sua vez um isomorfismo entre Λ^+ e V^+, que ao produto de convolução em Λ^+ faz corresponder o produto usual em V^+.

Posto isto, seja $\mathcal{G}$ um filtro de sub-conjuntos do plano complexo, que admite uma base regular $\{G_k\}$ (6), e $A(\mathcal{G})$ a álgebra das funções holomorfas de crescimento lento sobre $\mathcal{G}$ [2]: Nestas condições, prova-se que [2]: *existe uma correspondência biunívoca* $g \leftrightarrow \mathcal{B}$ *entre os elementos de* Λ^+ *cujo filtro espectral é mais fino do que* $\mathcal{G}$, *e os homomorfismos contínuos* $\mathcal{B}$ *de* $A(\mathcal{G})$ *em* Λ^+, *tais que* $\mathcal{B}(1) = \delta(t)$. *Esta correspondência é definida pelas fórmulas*

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{B}(\hat{z}) = g \\ \mathcal{B}(\Phi) = \dfrac{1}{2\pi i}(g - \alpha)^n * \\ * \displaystyle\int_{\Gamma_n} \frac{\Phi(\lambda)(g - \lambda\delta)^{-1}}{(\lambda - \alpha)^n} d\lambda \qquad \forall\, \Phi \in A(\mathcal{G}) \end{cases}$$

onde α *é qualquer ponto do plano complexo pertencente a* $\mathbf{C} - G_1$, $\dfrac{\Phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^{n-1}}$ *é suposta limitada sobre* G_n *e holomorfa no seu interior, e* Γ_n *é a fronteira de* G_n *orientada por forma a deixar à direita os pontos de* G_n.

Isto é, quando todo o elemento de $\mathcal{G}$ é um conjunto espectral de um dado $g \in \Lambda^+$, é possível definir as funções $\Phi(g)$, com $\Phi \in A(\mathcal{G})$, e o homomorfismo $\Phi \to \Phi(g)$ é contínuo.

Para determinar os conjuntos espectrais de um dado $g \in \Lambda^+$ pode então fazer-se uso do seguinte resultado, que se demonstra recorrendo à transformação de FOURIER: *um conjunto $S \subset \mathbf{C}$ é um conjunto espectral de $g \in \Lambda^+$, se e só se existe um $n \in \mathbf{N}$, um real $\beta > 0$ e um $I_k = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \geqq k\}$, $k \in \mathbf{N}$, tais que para todo o $z \in I_k$ e todo o $\lambda \in \mathbf{C} - S$ se tem $|z^n(\lambda - \varphi(z))| > \beta$, em que $\varphi(z) = \mathcal{F}(g)$.*

Este resultado implica por sua vez que *o filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$, se e só se para todo o G_l de uma base regular $\{G_l\}$ existe um I_k, $k \in \mathbf{N}$, tal que $\Phi(I_k) \subset G_l$.*

Nestas condições, aplicando a transformação de FOURIER à fórmula (1), e fazendo $\mathcal{F}(g) = \varphi$, vem

$$\mathcal{F}(\Phi(g)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\varphi(z) - \alpha)^n \int_{\Gamma_n} \frac{\Phi(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^n (\varphi(z) - \lambda)} d\lambda =$$

$$= \Phi(\varphi(z))$$

isto é

$$\Phi(g) = \mathcal{F}^{-1} \Phi(\varphi(z)). \tag{2}$$

Quando o filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$, a função composta $\Phi(\varphi(z))$ definida sobre um I_k é um elemento de U^+, tendo pois sentido a fórmula (2).

Uma generalização possível destes resultados pode ser obtida com a álgebra $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ das funções com valores em Λ^+, holomorfas e de crescimento lento sobre $\mathcal{G}$. A este respeito, identificando cada elemento $\Phi \in A(\mathcal{G})$ com $\Phi \times \delta(t) \in A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ prova-se que [2]: *para todo o elemento $g \in \Lambda^+$ cujo filtro espectral é mais fino do que $\mathcal{G}$, o homomorfismo $\mathcal{H}$ de $A(\mathcal{G})$ em Λ^+, que a cada $\Phi \in A(\mathcal{G})$ faz corresponder $\Phi(g)$, admite um e um só prolongamento contínuo $\mathcal{H}^*$ a $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ tal que*

$$\mathcal{H}^*(\Phi \cdot h) = \mathcal{H}(\Phi) * h$$

quaisquer que sejam $\Phi \in A(\mathcal{G})$ e $h \in \Lambda^+$.

Este prolongamento é obtido através da fórmula

$$\mathcal{H}^*(\Phi) = \frac{1}{2\pi i}(g - \alpha)^n * \tag{3}$$

$$* \int_{\Gamma_n} \frac{(g - \lambda\delta)^{-1}}{(\lambda - \alpha)^n} * \hat{\Phi}(\lambda)\, d\lambda \quad \forall\, \hat{\Phi} \in A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$$

onde α é qualquer ponto do plano complexo pertencente a $\mathbf{C} - G_1$, $\dfrac{\hat{\Phi}(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^{n-1}}$ é suposta limitada sobre G_n $(n \in \mathbf{N})$ e holomorfa no seu interior, e Γ_n é a fronteira de G_n orientada por forma a deixar à direita os pontos de G_n.

Aplicando a transformação de FOURIER à igualdade (3) obtêm-se por sua vez

$$\mathcal{F}(\hat{\Phi}(g)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}(\varphi(z) - \alpha)^n \int_{\Gamma_n} \frac{\mathcal{F}(\hat{\Phi}(\lambda))}{(\lambda - \alpha)^n (\varphi(z) - \lambda)} d\lambda =$$

$$= [\mathcal{F}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \varphi(z)}$$

onde $\varphi(z) = \mathcal{F}(g)$. Isto é,

$$\hat{\Phi}(g) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \varphi(z)} \tag{4}$$

que é óbviamente um prolongamento da fórmula 2.

Por um processo análogo, e usando a transformação de LAPLACE, poder-se-ia também demonstrar que nas condições descritas na proposição anterior, se tem

$$\hat{\Phi}(g) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \theta(z)} \tag{5}$$

onde $\theta(z) = \mathcal{L}(g)$.

As fórmulas (4) e (5) sugerem então definir $\hat{\Phi}(g)$ sempre que $[\mathcal{F}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \varphi(z)} \in U^+$, ou o que é equivalente, sempre que

$$[\mathcal{L}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda = \theta(z)} \in V^+.$$

Esta extensão permite, dado $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$, fazer corresponder a cada elemento $g \in \Lambda^+$

um homomorfismo algébrico (não necessàriamente contínuo) entre uma sub-álgebra de $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$. dependente de g e que diremos relativa a g, e Λ^+. Este homomorfismo, sempre que o filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$, coincide com o homomorfismo $\mathcal{B}^*$ definido na igualdade (3), e é contínuo. Em qualquer das hipóteses, se $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Psi}$ são funções pertencentes à sub-álgebra relativa a g, tem-se:

$$(\hat{\Phi} + \hat{\Psi})(g) = \hat{\Phi}(g) + \hat{\Psi}(g)$$

$$(\lambda \cdot \hat{\Phi})(g) = \lambda \cdot \hat{\Phi}(g) \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}.$$

$$(\hat{\Phi} \cdot \hat{\Psi})(g) = \hat{\Phi}(g) * \hat{\Psi}(g)$$

Um caso com interesse é aquele em que $\mathcal{G}$ é o filtro gerado pelos semi-planos $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \alpha,\ \alpha \text{ real}\}$ e o elemento de Λ^+ é δ' (que corresponde ao operador derivação). Então, para todo o $\hat{\Phi} \in A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ temos

$$\hat{\Phi}(\delta') = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}\hat{\Phi}(\lambda)]_{\lambda=z}$$

sendo a aplicação $\hat{\Phi} \to \Phi(\delta')$ de $A(\mathcal{G}, \Lambda^+)$ em Λ^+, um homomorfismo contínuo. Se $\hat{\Phi} \in A(\mathcal{G})$, tem-se

$$\Phi(\delta') = \mathcal{L}^{-1}\Phi(z)$$

5. Algumas aplicações

1. Comecemos por considerar alguns dipolos eléctricos simples, e para cada um desses dipolos determinemos a distribuição $g(t) \in \Lambda^+$ associada, que permite através da igualdade

$$e(t) = g(t) * i(t)$$

relacionar a corrente que atravessa o dipolo com a tensão nos seus terminais (supomos que o dipolo é linear).

Nos casos em que o dipolo é constituído por uma resistência R, uma capacidade C ou uma inductância L, resulta imediatamente que a distribuição $g(t)$ associada é respectivamente

Resistência $\quad R\,\delta(t)$

Capacidade $\quad \dfrac{1}{C}h(t) \quad$ (h função de HEAVISIDE).

Inductância $\quad L\,\delta'(t)$

Da associação em série ou em paralelo de dois dipolos, a que correspondem por exemplo as distribuições g_1 e g_2, resultam por sua vez dipolos cuja distribuição g está relacionada com as anteriores pelas equações

$$g = g_1 + g_2 \quad \text{(associação em série)}$$

$$g = g_1 * g_2 * (g_1 + g_2)^{-1} \quad \text{(associação em paralelo).}$$

Este segundo resultado só tem sentido se $g_1 + g_2$ tem inverso, isto é, se

$$\frac{1}{\mathcal{L}(g_1) + \mathcal{L}(g_2)} \in V^+.$$

Associando em série e em paralelo os dipolos assinalados atrás, obtêm-se então as seguintes distribuições:

$$R\,\delta + L\,\delta' \qquad (R \text{ e } L \text{ em série})$$

$$R\,\delta + \frac{1}{C}h \qquad (R \text{ e } C \text{ em série})$$

$$L\,\delta' + \frac{1}{C}h \qquad (L \text{ e } C \text{ em série})$$

$$\frac{i}{L\sqrt{LC}}\, e^{\frac{i}{\sqrt{LC}}t}\, h(t) * e^{-\frac{i}{\sqrt{LC}}t}\, h(t) +$$

$$+ \frac{1}{C} e^{-\frac{i}{\sqrt{LC}}t}\, h(t) \qquad (L \text{ e } C \text{ em paralelo})$$

$$R\delta(t) - \frac{R^2}{L} e^{-\frac{R}{L}t} h(t)$$

(R e L em paralelo)

$$\frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} h(t). \quad (R \text{ e } C \text{ em paralelo})$$

2. De acordo com os resultados do parágrafo 4, tem sentido escrever e^g para todo o $g \in \Lambda^+$, tal que $e^{\mathcal{L}(g)} \in V^+$. Por sua vez, se $e^{\mathcal{L}(f)}$ e $e^{\mathcal{L}(g)}$, com $f, g \in \Lambda^+$, são elementos de V^+, tem-se

$$(1) \qquad e^{f+g} = e^f * e^g .$$

Consideremos então a igualdade

$$(2) \qquad e^g = \delta .$$

As distribuições $g \in \Lambda^+$ que a verificam satisfazem a relação $e^{\mathcal{L}(g)} = 1$, e portanto $\mathcal{L}(g) = 2n\pi i$, com n inteiro, ou

$$g = 2n\pi i\delta \qquad (n \text{ inteiro}).$$

De (1) infere-se então que

$$e^{f+2n\pi i\delta} = e^f$$

para todo o $f \in \Lambda^+$ tal que $e^{\mathcal{L}(f)} \in V^+$.

Seja agora a equação

$$(3) \qquad e^f = g$$

onde $g \in \Lambda^+$ é um dado e se pretende determinar f.

Se $\frac{1}{\mathcal{L}(g)} \in V^+$, a função $\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}$, onde $\theta(z) = \mathcal{L}(g)$, é um elemento de V^+, e admite primitivas em V^+ que diferem entre si em uma constante. Sendo pois $\gamma(z)$ uma dessas primitivas, tem-se

$$\frac{d}{dz}(\theta(z)e^{-\gamma(z)-\alpha}) = 0$$

qualquer que seja a constante α, e portanto

$$\theta(z) = \text{const. } e^{\gamma(z)+\alpha}$$

podendo-se determinar α por forma que a constante seja igual a 1. Para esse valor de α, tem-se pois

$$\theta(z) = e^{\gamma(z)+\alpha}$$

e portanto

$$e^{\mathcal{L}^{-1}(\gamma(z)+\alpha)} = g$$

isto é, $f_0 = \mathcal{L}^{-1}(\gamma(z) + \alpha)$ é uma solução de equação 3.

Por sua vez, sendo g invertível, se existir uma outra solução f_1 de equação 3, tem-se

$$e^{f_1} * e^{-f_0} = g * g^{-1} = \delta$$

isto é, $f_1 - f_0 = 2n\pi i\delta$, onde n é um inteiro.

Por analogia com o que se passa com as funções, pode então dizer-se que toda a solução de equação 3 é um logaritmo de g e escrever

$$f = \ln g .$$

A título de exemplo, consideremss a distribuição δ'. Como $e^{-\alpha z} \in V^+$ para todo o α real positivo, e como $\mathcal{L}(\delta') = z$, pode escrever-se $e^{-\alpha\delta'}$, e vem

$$e^{-\alpha\delta'} = \mathcal{L}^{-1}(e^{-\alpha z}) = \delta(t - \alpha).$$

Por sua vez, o facto de

$$\delta(t-\alpha) * f(t) = f(t-\alpha)$$

para todo o $f \in \Lambda$, permite dizer que o operador associado à distribuição $e^{-\alpha\delta'}$ é uma translacção.

Na prática este operador pode representar uma linha de atraso que não deforma os sinais.

3. As equações diferenciais de um sistema linear dinâmico com m graus de liberdade têm a forma [3]

$$(4)\quad \begin{cases} G_{11}(u_1)+G_{12}(u_2)+\cdots+G_{1m}(u_m)=v_1(t) \\ G_{21}(u_1)+G_{22}(u_2)+\cdots+G_{2m}(u_m)=v_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{m1}(u_1)+G_{m2}(u_2)+\cdots+G_{mm}(u_m)=v_m(t) \end{cases}$$

onde os G_{lk} são operadores lineares do tipo considerado, e os $v_i(t)\in\Lambda^+$ são dados. Os $u_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,m)$ são também elementos de Λ^+ e definem o estado do sistema.

Sendo então $g_{lk}(t)$ a distribuição de Λ^+ associada ao operador linear G_{lk}, $l,k=1,2,\cdots,m$, o sistema 4 pode escrever-se com a forma

$$(5)\quad \sum_{k=1}^{m} g_{lk}*u_k=v_l \qquad l=1,2,\cdots,m$$

e utilizando as transformadas de LAPLACE

$$(6)\quad \sum_{k=1}^{m} \theta_{lk}(z)\,\varphi_k(z)=\psi_l(z) \qquad l=1,2,\cdots,m$$

onde $\theta_{lk}(z)=\mathcal{L}(g_{lk})$, $\varphi_k(z)=\mathcal{L}(u_k)$ e $\psi_l(z)=\mathcal{L}(v_l)$, $l,k=1,2,\cdots,m$.

Se o determinante

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} \theta_{11}(z) & \theta_{12}(z) & \cdots & \theta_{1m}(z) \\ \theta_{21}(z) & \theta_{22}(z) & \cdots & \theta_{2m}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{m1}(z) & \theta_{m2}(z) & \cdots & \theta_{mm}(z) \end{vmatrix}$$

é tal que $\dfrac{1}{\Delta(z)}\in V^+$, existem em V^+ e são únicas as funções $\varphi_k(z)$, $k=1,2,\cdots,m$ que verificam o sistema 6. Elas são as dadas pelas relações

$$\varphi_k(z)=\frac{1}{\Delta(z)}\cdot\sum_{l=1}^{m}\Delta_{kl}(z)\,\psi_l(z) \qquad k=1,2,\cdots,m$$

onde cada um dos $\Delta_{kl}(z)$ é o menor complementar do elemento $\theta_{lk}(z)$ afectado do sinal $(-1)^{l+k}$.

Passando então ás imagens inversas de LAPLACE, vem

$$u_k(t)=\Delta(t)^{-1}*\sum_{l=1}^{m}\Delta_{kl}(t)*v_l(t) \qquad k=1,2,\cdots,m$$

onde

$$\Delta^{-1}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\Delta(z)}\right]$$

e

$$\Delta_{kl}(t)=\mathcal{L}^{-1}[\Delta_{kl}(z)], \quad l,k=1,2,\cdots,m.$$

O estado do sistema fica pois univocamente determinado sempre que $\dfrac{1}{\Delta(z)}\in V^+$.

Se no sistema 5 substituirmos agora um dos $g_{lk}(t)$ por uma variável complexa λ, o determinante $\Delta(z,\lambda)$ fica a depender do λ, e pode-se então discutir para que valores de λ é $\dfrac{1}{\Delta(z,\lambda)}$ um elemento de V^+. Para esses valores obtêm-se soluções da forma

$$u_k(\lambda,t)=\Delta^{-1}(\lambda,t)*\sum_{l=1}^{m}\Delta_{kl}(\lambda,t)*v_l(t)$$

onde os $\Delta^{-1}(\lambda,t),\Delta_{kl}(\lambda,t)$, $k,l=1,2,\cdots,m$, são funções vectoriais de λ, com valores em Λ^+.

A possibilidade de substituir λ por um certo $g(t)\in\Lambda^+$ está então sujeita às condições descriptas no parágrafo 4.

4. Consideremos um servomecanismo que consiste em dois aparelhos, um de entrada e outro de saída, devendo o segundo reproduzir os movimentos do primeiro com a maior precisão possível; ele contém também um amplificador que gera uma corrente $i(t)=g_1(t)*e(t)$

onde $e(t)$ é a tensão aplicada na sua entrada, e um motor accionado por $i(t)$, por forma que a posição $v(t)$ do aparelho de saída é uma função linear de $i(t): v(t) = g_2(t) * i(t)$.

Posto isto, pretende construir-se um aparelho X que mediante as posições do aparelho de entrada $u(t)$ e do aparelho de saída $v(t)$ forneça uma tensão a aplicar à entrada do amplificador por forma que:

a) $e(t)$ seja uma função linear da diferença $u(t) - v(t)$;

b) O aparelho de saída reproduza os movimentos do aparelho de entrada.

Substituindo por λ (variável complexa) a distribuição correspondente a X, podemos escrever as equações:

1. $e(t) = \lambda(u - v)$

2. $i(t) = g_1 * (\lambda(u - v))$

3. $v(t) = g_2 * g_1 * (\lambda(u - v))$

e portanto

$$(\delta + \lambda g_2 * g_1) * v = \lambda g_2 * g_1 * u$$

Põe-se então o problema de saber para que valores de $\lambda \in \mathbf{C}$ é invertível a distribuição $\delta + \lambda g_2 * g_1$, isto é, em que valores de $\lambda \in \mathbf{C}$ está definida a função vectorial

$$\hat{\Phi}(\lambda) = \lambda g_2 * g_1 * (\delta + \lambda g_2 * g_1)^{-1}.$$

Ora de acordo com os resultados do parágrafo 4, esta função está definida para todo o λ tal que

$$\frac{\lambda \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \lambda \theta_1(z) \theta_2(z)} \in V^+$$

onde $\theta_1(z) = \mathcal{L}(g_1)$ e $\theta_2(z) = \mathcal{L}(g_2)$.

De acordo também com (5) do parágrafo 4, a saída será uma função linear da entrada, se ao aparelho X corresponder uma distribuição g tal que

$$\frac{\theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)} \in V^+$$

onde $\theta(z) = \mathcal{L}(g)$.

Nessas condições, vem

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}\right] * u(t).$$

Suponhamos agora que existe um filtro regularizável $\mathcal{G}$ de conjuntos do plano complexo, tal que $\hat{\Phi} \in A(g, \Lambda^+)$, e que o filtro espectral de g é mais fino do que $\mathcal{G}$. Nessa conformidade, e na medida em que

$$\frac{\theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)}{1 + \theta(z) \theta_1(z) \theta_2(z)} \simeq 1,$$

será também

$$v(t) \simeq \delta(t) * u(t).$$

5. Dada uma função qualquer $\theta(z) \in V^+$, holomorfa num semi-plano direito

$$V_\alpha = \{z \in \mathbf{C} : Re\, z > \alpha\}, \ \alpha \text{ real},$$

e do crescimento lento sobre o fecho de V_α, existe sempre uma sucessão de funções racionais $(\rho_n(z))$ com polos no complementar do fecho de V_α, que converge em V^+ para $\theta(z)$. Este resultado demonstra-se tendo em atenção que existe um natural n e um complexo γ tais que

$$\theta(z) = \frac{(z - \gamma)^n}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\theta(\lambda)}{(\lambda - \gamma)^n (\lambda - z)} d\lambda.$$

Posto isto, sendo $g = \mathcal{L}^{-1}(\theta(z))$, a sucessão (g_n) constituída pelos elementos $g_n = \mathcal{L}^{-1}(\rho_n(z))$, converge em Λ^+ para g. Por outras palavras, o conjunto dos elementos de Λ^+ que são produtos de convolução finitos entre elementos de forma $\delta' + \beta\delta$,

$e^{\omega t} h(t)$ e $\omega\delta$ com β e $\omega \in \mathbf{C}$, é denso em Λ^+.

Este resultado, aplicado aos circuitos, poderá eventualmente justificar o traçado de circuitos equivalentes.

6. Uma extensão possível do conceito de «estabilidade de uma rede ou de um circuito», à situação presente, é a que resulta da seguinte definição: dada uma rede linear, diz-se que ela é estável quando as distribuições $g_{lk}(t) \in \Lambda^+$ associadas a essa rede, isto é, as respostas a impulsos de DIRAC, são distribuições de decrescimento rápido.

As imagens de FOURIER destas distribuições são funções $\varphi(z)$, holomorfas no semi-plano $\operatorname{Im} z > 0$, e tais que o limite

$$(7) \qquad \lim_{y \to 0^+} \varphi(\omega + iy) = g(\omega)$$

é uma função $g(\omega)$ indefinidamente diferenciável e de crescimento lento sobre $\mathbf{R}$. O limite entende-se no sentido da topologia que se utiliza geralmente sobre o espaço vectorial S destas funções [4], e de acordo com a qual $\varphi(\omega + iy)$ e as suas derivadas $\varphi^{(k)}(\omega + iy)$, $k = 1, 2, \cdots$, convergem uniformemente sobre os intervalos compactos de $\mathbf{R}$ para $g(\omega)$ e $g^{(k)}(\omega)$, $k = 1, 2, \cdots$, respectivamente.

Usando pois a identificação $\varphi(z) \equiv g(\omega)$ assinalado no fim do parágrafo 2, podemos dizer que as respostas de frequência destes circuitos são funções de S.

Relativamente às funções de transferência, pode-se por sua vez dizer que elas são funções $\theta(z)$, holomorfas no semi-plano direito $Re\, z > 0$, e tais que existe o limite $\lim_{x \to 0^+} \theta(x + iy)$ em S.

Do resto sabe-se que toda a aplicação linear contínua G do espaço vectorial S' das distribuições temperadas em si mesmo, comutável com a translacção é da forma

$$G(f) = \int_{\mathbf{R}} g(t - \xi) f(\xi)\, d\xi$$

onde g é uma distribuição de decrescimento rápido [1]; e reciprocamente.

Aplicando então a transformação de FOURIER a esta igualdade, obtém-se

$$\mathcal{F} G(f) = \mathcal{F}(g) \times \mathcal{F}(f)$$

onde $\mathcal{F}(g) \in S$, $\mathcal{F}(f) \in S'$, e a multiplicação assinalada no 2.° membro desta igualdade é a que se costuma definir entre elementos de S e de S'. Nesta igualdade, foi também utilizada a identificação, referida no parágrafo 2, entre funções holomorfas e distribuições.

7. Num meio material a polarização eléctrica $\vec{P}$ em cada ponto é uma função linear $\vec{P} = G(\vec{E})$ do respectivo campo eléctrico $\vec{E}$ nesse ponto; se as características do meio não se alteram com o tempo, G é comutável com a translação no tempo.

Por forma semelhante à usada no parágrafo 1, podemos então definir nove aplicações lineares $G_{lk}\,(l, k = 1, 2, 3)$ que permitem relacionar as componentes P_l da polarização eléctrica com as componentes E_k do campo:

$$P_l = \sum_{k=1}^{3} G_{lk}(E_k) \qquad l = 1, 2, 3.$$

Para cada par l, k, $G_{lk}(E_k)$ dá a componente l da polarização criada por um campo eléctrico E_k com a direcção k.

Uma interpretação suficientemente geral será então supor que estas componentes (variáveis com o tempo) são elementos de Λ, e que os operadores G_{lk} são do tipo considerado no parágrafo 3.

Nessas condições pode escrever-se

$$P_l(t) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_0\, \chi_{lk} * E_k(t) \qquad l = 1, 2, 3$$

onde para cada par l, k, $\varepsilon_0\, \chi_{lk}(t)$ designa o elemento de Λ^+ correspondente ao operador G_{lk}, isto é, a polarização criada na direcção l por um campo eléctrico $\delta(t)$ de direcção k, e ε_0 a constante dieléctrica do vácuo; as transformadas de FOURIER destes elementos $\chi_{lk}(t)$ constituem o tensor da susceptibilidade eléctrica do meio.

De forma semelhante, podem também relacionar-se a indução e o campo magnético, e determinar os elementos $\mu_{kl}(t) \in \Lambda^+$ correspondentes ao tensor da permeabilidade magnética.

Sendo o meio isotrópico, estas distribuições são de forma $\chi_{lk}(t) = \delta_{lk}\chi(t)$ e $\mu_{lk}(t) = \delta_{lk}\mu(t)$, onde $\chi(t)$ e $\mu(t)$ são elementos de Λ^+, e δ_{lk} designa o símbolo de KRONECKER. Se existir uma distribuição $n(t)$ tal que

$$n(t) * n(t) = (1 + \chi(t)) * \mu(t)$$

ela corresponderá naturalmente ao índice de refracção, e será da forma $\alpha\delta(t)$ (α = constante) quando o meio não for dispersivo. A transformada de FOURIER de $n(t)$ permite determinar a velocidade de propagação das ondas no meio, em função das respectivas frequências.

NOTAS

(1) Considerando o espaço vectorial das funções complexas, limitadas $f(t)$, munido da norma $\|f\| = \sup_{t \in R} |f(t)|$, a topologia Λ é a do limite inductivo dos espaços imagens daquele pelas aplicações $f \to D^n(e^{n|t|} f(t))$.

(2) Uma função $\varphi(z)$ diz-se de crescimento lento sobre um conjuto Ω do plano complexo, quando existe um inteiro p positivo e um $\gamma \in \mathbf{C}$ tais que $\frac{\varphi(z)}{(z-\gamma)^p}$ é limitada sobre Ω.

(3) U é o quociente, pelo subespaço dos polinómios inteiros em z, do espaço das funções holomorfas do crescimento lento sobre o filtro gerado pelo conjunto dos complementares das bandas $|\mathrm{Im}\, z| < \alpha$ ($\alpha > 0$). A topologia de U é a do espaço quociente.

(4) Considerando o espaço vectorial das funções complexas limitadas $f(t)$, munido da norma $\|f\| = \sup_{t \in R} |f(t)|$, a topologia do espaço S' das distribuições temperadas é a do limite inductivo dos espaços imagens daquele pelas aplicações $f \to D^n(1+x^2)^n f(x)$.

(5) Uma distribuição $g(t)$ diz-se de decrescimento sub-exponencial, quando para todo o $k \in \mathbf{N}$, $e^{k|t|}(g)t$ é limitada: As imagens de FOURIER destas distribuições são funções holomorfas $\varphi(z)$ que verificam a seguinte propriedade: $\varphi(z)$ definida em semi-planos $\mathrm{Im}\, z > \alpha$ e $\mathrm{Im}\, z < \beta$ (α, β: reais) admite prolongamentos analíticos a todo o plano complexo $\varphi^+(z)$ e $\varphi^-(z)$, que são de crescimento lento sobre todo o semi-plano $\mathrm{Im}\, z \geqslant \gamma$ e $\mathrm{Im}\, z \leqslant \gamma$ (γ: real) respecticamente.

(6) Diz-se que uma base $\{G_k : k \in \mathbf{N}\}$ de um filtro é regular, se ela é normal e distanciada, e se qualquer seja $k \in \mathbf{N}$, a fronteira de G_k é rectificável após inversão.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans de calcul opératio-nel*, Math. Annalen, Bd 136, S 58-96 (1958).

[2] ———, *Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables, à spectre vide ou non bonné*, Annali di Matematica pura ed applicata (IV) Vol. LVIII, pp. 219-276 (1962).

[3] V. V. SOLODOVNIKOV, *Statistical Dynamics of Linear Automatic Control Systems* (Ed. D. Von Nostrand Company, Ltd. London (1965).

[4] E. M. DE JAGER, *Theory of distributions*, Mathematics Applied to Physics (Ed. United Nations Educational, 1970).