Operações financeiras certas e incertas. Funções de comutação

por Rui João Baptista Soares
Lisboa

Introdução

Nas operações financeiras certas, uma entidade juridicamente bem constituída, compromete-se a entregar a outra entidade de uma só vez ou em períodos igualmente espaçados, uma determinada quantidade de unidades de moeda, aconteça o que acontecer.

Nas operações financeiras incertas as mesmas entidades vêem-se envolvidas em operações sujeitas a um regime de probabilidades.

Fundamentalmente o tipo de situações que se descreve para uma das entidades é o mesmo em relação à outra, atendendo a que uma tem saldo positivo resultante dos «favores» prestados à outra; de notar que num instante a soma das duas quantidades é constante.

I. Operações financeiras certas

Suponhamos que a entidade A empresta o capital 1 à entidade B por um período de tempo; em retribuição A costuma pedir uma *taxa de juro* i que representa a quantia, expressa em unidades de capital, que a entidade B tem de pagar em cada período pela unidade de capital em retribuição do valor do empréstimo.

Mas a entidade B pode, ao fim de um período, não se encontrar em situação que permita liquidar o empréstimo; então pede a A que a prolongue por n períodos, ao fim dos quais B deverá retribuir a A a quantia $(1+i)^n$ dizendo-se então que A capitalizou em *regime de juros compostos*.

Todavia A podia raciocinar de modo diferente e querer determinar a quantidade que devia emprestar, em regime de juros compostos, para ao fim de n períodos obter o capital 1. Surge então a grandeza v — *factor de desconto,* que se define pela igualdade

$$1)\qquad v(1+i)=1$$

e que representa o valor do capital que vale 1 unidade ao fim de um período. Associado a v define-se d — *taxa de desconto efectiva* por uma das igualdades

$$2)\qquad d=1-v$$

$$2')\qquad d=iv\,.$$

Dir-se-ia, no caso presente, que A estava a determinar o valor actual 1 ao fim de um período; ao fim de n períodos teríamos o valor actual v^n do capital 1.

Estas duas situações que acabamos de descrever traduzem dois tipos de operações inversas uma da outra e que são respectivamente a *capitalização* e *actualização.*

Esquematicamente

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, shift left] \arrow[dr, phantom, "(1+i)"] & A \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1+i)"] & & A \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1+i)"] & A \arrow[d, shift left] \\
B \arrow[u, shift left] \arrow[r, shift left] & B \arrow[l, shift left, "V"] \arrow[r, shift left] & \cdots \arrow[l, shift left, "V"] & B \arrow[r, shift left] & B \arrow[l, shift left, "V"] \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

Acontece com frequência que os encargos sofridos por uma das entidades determina um acordo entre elas por forma que a operação em causa (capitalização ou actualização) seja feita não no período vulgar de um ano, mas sim em fracções desse mesmo período, estabelecendo uma *taxa de juro fraccionado* i_m, que representa a quantia, expressa em unidades de capital, que a entidade a quem se emprestou tem de pagar pela unidade de capital e por cada fracção $\frac{1}{m}$ do período, em retribuição do valor do empréstimo.

Definimos agora as quantidades $i^{(m)}$ — *taxa de capitalização nominal* — convertível m vezes em cada um dos períodos a que se refere a taxa i, pela igualdade

$$3) \qquad i^{(m)} = m[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1]$$

e $d^{(m)}$ — *taxa de desconto nominal* — convertível m vezes em cada um dos períodos a que se referem as taxas i e d, por uma das igualdades

$$4) \qquad d^{(m)} = m[1 - v^{\frac{1}{m}}]$$

$$4') \qquad d^{(m)} = m \cdot i^{(m)} \cdot v^{\frac{1}{m}}.$$

Nesta última

$$5) \qquad v^{\frac{1}{m}} = (1+i)^{-\frac{1}{m}}.$$

Duas taxas dizem-se *equivalentes* quando

$$6) \qquad i_m = \frac{i^{(m)}}{m}.$$

Dá-se o nome de *taxa instantânea de capitalização* à grandeza δ definida por

$$7) \qquad \delta = \log_e(1+i) = \lim_{m\to\infty} i^{(m)}$$

e *taxa instantânea de desconto* à grandeza δ' definida por

$$7') \qquad \delta' = \lim_{n\to\infty} d^{(m)}.$$

Até ao momento o contrato determinava que uma das entidades entregasse, de uma vez por todas, passado um certo prazo, uma certa quantia. Nada impede que no momento do acordo uma das entidades resolva seguir uma das modalidades seguintes:

M_1 — emprestar a unidade de capital ao longo de n períodos, fazendo n entregas iguais;

M_2 — emprestar k unidades de capital no período número k $(1 \leqq k \leqq n)$;

M_3 — emprestar $p + (k-1)q$ unidades de capital no período número $k\,(1 \leqq k \leqq n)$;

N — emprestar (de acordo com M_1, M_2 ou M_3) após terem decorrido k períodos a contar do momento em que se celebra o contrato. Diz-se que houve k *períodos de diferimento*;

O_1 — as entregas (em M_1, M_2, M_3 ou N) são feitas no começo de cada período a contar do momento em que se fez o contrato; diz-se que os termos são *antecipados*;

O_2 — as entregas (em M_1, M_2, M_3 ou N) são feitas no fim de cada período e então diz-se que os termos são *postecipados*;

P — as entregas indicadas em O_1 e O_2 podem fazer-se em fracções do período e os termos serão *fraccionados*.

Antes de passarmos à dedução da fórmula geral que sintetiza as situações indicadas e que definem *contratos de renda* vamos introduzir a simbologia adequada. Deste modo:

a — valor actual, referido ao início do primeiro período, de uma renda;

s — valor acumulado, referido ao fim do último período, produzido por uma renda;

$\overline{n|}$ — uma letra afectada deste índice direito indica o número de períodos durante os quais se faz a entrega;

$k|$ — uma letra afectada deste índice esquerdo indica o número de períodos de diferimentos;

(m) — uma letra afectada deste expoente indica que houve fraccionamento do período e portanto durante n períodos, haverá mn entregas de $\frac{1}{m}$ unidades de capital.

$(I_{p,q}\cdot)$ — indica que os termos da renda se dispõem em progressos aritmética do 1.º termo p e razão q(1);

$(\ddot{\cdot})$ — uma letra encimada com este símbolo indica que a renda tem termos antecipados.

Devemos ainda ter presente que para passar, numa determinada operação O, dos valores deduzidos com termos partecipados ou normais aos valores deduzidos com termos antecipados, isso equivale à capitalização para o fim do período

8) $$\ddot{O} = O(1+i)$$

Reciprocamente

8') $$O = \ddot{O}\cdot v$$

No caso de fraccionamento teremos

9) $$\ddot{O} = O(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

9') $$O = \ddot{O}\, v^{\frac{1}{m}}.$$

Usando um determinado tipo de termos e pretendendo passar para os valores deduzidos no outro tipo de termos, bastará atender a

10) $$a = s\cdot v^n$$

10') $$s = a(1+i)^n.$$

Após estas considerações passemos ao cálculo ${}_{k'|}(I_{p,q}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}$ que representa o valor actual, referido ao início do primeiro dos períodos de deferimento, de uma renda fraccionada diferida de $k' = mr$ períodos com $m\cdot n$ termos normais crescentes em progressão aritmética de 1.º termo p e razão q, cujo período é igual a $\frac{1}{m}$ do período de taxa i.

$$ {}_{k'|}(I_{p,q}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{1}{m}\left\{\sum_{t=1}^{mr+mn}[p+(t-1)q]\,v^{\frac{t}{m}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{t=1}^{mr}[p+(t-1)q]\,v^{\frac{t}{m}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{m}\left[(p-q)\sum_{t=mr+1}^{mr+mn} v^{\frac{t}{m}} + q\sum_{t=mr+1}^{mr+mn} t\,v^{\frac{t}{m}}\right] =$$

$$= \frac{1}{m}\left[(p-q)\sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}} + q\sum_{t=1}^{mn}(mr+t)\,v^{\frac{t}{m}}\right] v^r.$$

Pondo

11) $$a^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn} v^{\frac{t}{m}}$$

12) $$(I_{mr+1,1}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}\ \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{mn}(mr+t)\,v^{\frac{t}{m}}$$

resulta

13) $$\boxed{\begin{aligned} &{}_{k'|}(I_{p,q}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}} = \\ &= \left[(p-q)\,a^{(m)}_{\overline{n|}} + q\,(I_{k'+1,1}\,a)^{(m)}_{\overline{n|}}\right] v^r \end{aligned}}$$

Apesar de 13) sintetizar todas as situações M_1, M_2, M_3, N, O_1, O_2 e P por combinação

(1) Quando $p=1=q$ utiliza-se $(I\cdot)$ em vez de $(I_{p,q}\cdot)$ o mesmo acontecendo quando $m=1$ ou $k=0$.

conveniente dos símbolos utilizados, recorre-se na prática a relações existentes entre as diferentes modalidades e de acordo com valores que se encontram tabelados para as diferentes taxas de juro (1). Tais fórmulas têm ainda a vantagem de permitira resolução de problemas mesmo para valores não tabelados recorrendo a interpolação.

II. Operações financeiras incertas

Uma entidade A prevê a realização de um acontecimento que lhe acarreta um prejuízo que pretende remediar. Pode, em certas circunstâncias, contratar uma outra entidade B que tome a responsabilidade de indemnizar A caso o acontecimento ocorra. Em retribuição B exige de A o pagamento de uma certa quantia — *prémio* — durante um intervalo de tempo a combinar. Diz-se que as duas entidades combinaram entre si um *contrato de seguro.*

Parece à primeira vista que a entidade A está em vantagem, enquanto B deverá indemnizar todas as entidades A_i que estejam nas mesmas condições de A. Todavia B procede de modo análogo em relação a outras entidades mas agora na situação inversa. Além disso a probabilidade de realização de certos acontecimentos futuros pode ser deduzida da frequência com que se realizaram no passado, o que permite a B estabelecer os prémios por forma a não perderem.

O seguro pode então considerar-se como um jogo entre as entidades A — a que chamaremos *segurado* — e B ou *companhia seguradora* e tem por fim distribuir igualmente por um grande número de segurados o prejuízo causado a um outro.

Esta ideia de mutualidade implica, desde logo, que nenhum segurado se encontre em situação vantajosa relativamente aos outros, pelo que as contribuições individuais devem ser proporcionais

a) à indemnização prevista

b) ao risco coberto.

Uma vez postas em comum as contribuições dos segurados, elas perdem a sua individualidade e constituem um fundo comum destinado a cobrir os riscos.

II. 1. *Jogo equitativo*

Suponhamos que dois jogadores A_1 e A_2 combinam entre si o seguinte:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \text{paga} & C_i & \text{a} & A_2 \\ A_2 & \text{paga} & E_i & \text{a} & A_1 \end{pmatrix}$$

pela saída de um acontecimento a_i no esquema

$$\mathcal{a} = \begin{pmatrix} a_1, \cdots, a_n \\ p_1, \cdots, p_n \end{pmatrix}$$

onde os a_i se excluem mutuamente e $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

O jogo dir-se-á *equitativo* quando

$$14) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i) = 0 .$$

Designando por

$$15) \qquad \begin{aligned} D_{A_1} &= \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i)^+ \\ D_{A_2} &= \sum_{i=1}^{n} p_i (E_i - C_i)^- \end{aligned}$$

define-se a quantidade D — *risco médio linear do jogo* — pela igualdade

(1) Vide por exemplo *Tabelas Financeiras e Actuariais.*

16) $$D = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \, | \, C_i - E_i \, | \, .$$

A grandeza M — *risco médio quadrático* — define-se por

17) $$M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i)^2}$$

e chama-se *risco máximo* à quantidade

18) $$\mathfrak{M} = \max_i (C_i - E_i) .$$

O jogador A_2 pode combinar o mesmo sistema com outro jogador A_3 para cobrir os prejuízos que o primeiro jogo lhe possa trazer. O risco matemático do jogador A_2 na hipótese de jogo equitativo será

$$D'_{A_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i - D_{A_1})^+$$

De modo análogo o risco matemático do jogador A_3 em relação a A_4 seria

$$D''_{A_1} = \sum_{i=1}^{n} p_i (C_i - E_i - D_{A_1} - D_{A'_1})^+ .$$

Para todos os riscos D_{A_1}, D'_{A_1}, D''_{A_1}, ... prova-se o seguinte teorema de Bohlmann

Teorema 1. *Seja* $d_i = C_i - E_i$; *então, se pelo menos um* d_i *fôr positivo, a série*

$$D_{A_1} + D'_{A_1} + D''_{A_1} + \cdots$$

converge e tem por soma $\mathfrak{M}$.

Este teorema apresenta grande interesse quando os acontecimentos a_i seguem a lei de Gauss.

*

* *

Seja q a probabilidade de chegada de um acontecimento, e C o valor actual da soma que a companhia deverá pagar; então a esperança matemática do segurado é

19) $$E = q\, C$$

e, tratando-se de um jogo equitativo, o *prémio puro* P

$$P = E$$

seria insuficiente para:

a) pagar as despesas de gestão da empresa;

b) prevenir-se contra os desníveis que possam ocorrer.

Somos assim conduzidos ao pagamento de um prémio P' a determinar por uma igualdade da forma

20) $$P'(1 - \theta) = q\, C(1 + \lambda)$$

onde θ e λ são constantes.

A condição indicada em *b*) permite estabelecer a grandeza d — *encargo do risco* que é a diferença entre o prémio P'' que realmente se paga e o prémio indicado em 20). É usual fazer o seu cálculo proporcionalmente ao risco médio linear e vai constituir uma *reserva de garantia* que intervirá quando o número de sinistros ultrapassar o seu valor mais provável.

II. 2. *Jogo não equitativo*

Viu-se que o prémio P'' não corresponde à esperança matemática do segurado o que torna o jogo não equitativo.

Consideremos as quantidades

G — bolo

p — probabilidade de ganhar

μ — número de partidas

$$\varepsilon = \frac{n}{G} .$$

Seja

21) $$pG - \eta = (p - \varepsilon)\,G$$

a entrada do jogador.

Se, ao fim de μ partidas, tiver havido um desvio $\pm h$ entre o número provável μp de vezes que esse jogador devia ter ganho e o número de vezes que ganhou, pode dizer-se que entrou nos jogos com a quantia $\mu G(p-\varepsilon)$ tendo recebido $G(\mu p \pm h)$ pelo que lucrou

22) $$G(\mu\varepsilon \pm h) = G\mu\left(\varepsilon \pm \frac{h}{\mu}\right) = G\mu\rho\,.$$

Como ε é constante e $\lim\limits_{\mu\to\infty} \dfrac{h}{\mu} = 0$ segue-se que o sinal de ρ acaba por ser positivo, donde

Proposição 1. *Se a entrada de um jogador é inferior à sua esperança matemática de uma quantidade η a probabilidade de que este jogador tenha lucro tende para a unidade quando o número de partidas cresce indefinidamente.*

À grandeza η que garante o lucro dá-se o nome de *carga*.

O estudo que acaba de fazer-se permite compreender como as companhias garantem o lucro.

Seja

23) $$h_\mu = \sqrt{2\mu pq}\cdot\lambda_0$$

o máximo valor do desvio do número de sinistrados. Verificando-se um desvio desfavorável, a companhia terá um prejuízo

24) $$Q = h_\mu G = \sqrt{2pq\mu}\cdot\lambda_0\,G\,.$$

Se a companhia tiver $n\mu$ segurados pagando a quantidade $\dfrac{G}{n}$ para segurar um risco de probabilidade p e valor $\dfrac{G}{n}$, teremos

25) $$Q' = h_{n\mu}G = \sqrt{2\mu npq}\cdot\lambda_0\,\frac{G}{n}\,.$$

De 24) e 25) resulta $Q' < Q$ pelo que

Proposição 2. *Para o mesmo total de prémios recebidos anualmente, a companhia tem vantagem em que eles se refiram a um grande número de segurados pagando menores prémios e, consequentemente, segurando quantias menores.*

Dá-se o nome de *pleno* ao valor máximo que a companhia pode segurar por unidade de risco conservando a probabilidade de não sofrer prejuízo superior a uma quantia C_0 previamente fixada. O seu valor será

26) $$C = \frac{C_0}{h_\mu}$$

e podémos dizer

Proposição 3. *O pleno varia na razão inversa da raiz quadrada do número de segurados; no caso de $n\mu$ segurados o pleno cresce proporcionalmente à raiz quadrada do número de seguros.*

A fim de compreender um pouco melhor como uma empresa deve ser estável analisemos rapidamente o problema clássico da ruína de uma estrutura markoviana com barreiras absorventes em 0 e a. Sejam p_z (probabilidade de sucesso) e q_z (probabilidade de ruína). Após a primeira partida obtemos

27) $$q_z = p\,q_{z+1} + q\,q_{z-1} \qquad 1 < z < a-1$$

com as condições de fronteira

28) $$q_0 = 1 \qquad q_a = 0$$

Na determinação de uma expressão explícita para q_z consideremos os casos

a) $p \neq q$.

Neste caso 27) admite as soluções particulares

$$q_z = 1 \qquad \text{e} \qquad q_z = \left(\frac{q}{p}\right)^z = u^z .$$

A solução geral será da forma

$$29) \qquad q_z = C_1 + C_2 u^z$$

e, atendendo às condições 28), vê-se que

$$C_1 = \frac{u^a}{u^a - 1} \qquad C_2 = \frac{1}{1 - u^a}$$

valores que substituídos em 29) dão

$$30) \qquad q_z = \frac{u^a - u^z}{u^a - 1}$$

b) $p = q = \frac{1}{2}$.

As soluções particulares $q_z = 1$ e $q_z = z$, e de novo as condições de fronteira, permitem escrever

$$31) \qquad q_z = 1 - \frac{z}{a} .$$

Sendo p_z a probabilidade de sucesso de um jogador igual à probabilidade de ruína do seu adversário, obtem-se a expressão para p_z substituindo nas fórmulas anteriores

$$p \longleftrightarrow q$$
$$q \longleftrightarrow p$$
$$z \longleftrightarrow a - z$$

e, finalmente

$$32) \qquad p_z + q_z = 1 .$$

Estas considerações permitem afirmar:

Proposição 4. *Considerando um jogador* A *com capital inicial* z *jogando contra um adversário infinitamente rico; A tem o previlégio de parar quando quiser e adopta a seguinte estratégia: joga até perder o seu capital ou prossegue até ganhar* a − z. *Nestas condições* p_z *é a probabilidade de sucesso e* q_z *a probabilidade de falência.*

A última possibilidade de ganhar ou perder para o jogador A é uma variável aleatória G que toma os valores $a - z$ e $-z$ com as probabilidades p_z e q_z respectivamente. Tem-se

$$33) \qquad \begin{array}{ll} E[G] = a(1 - q_z) - z & p \neq q \\ E[G] = 0 & p = q \end{array}$$

o que se traduz dizendo «um jogo favorável continua favorável e nenhum jogo desfavorável pode ser modificado em favorável».

Para finalizarmos estas considerações, damos sem demonstração a seguinte

Proposição 5. *O valor médio* D_z *da duração do jogo no problema clássico da ruína é dado por*

$$34) \qquad D_z = \begin{cases} \dfrac{1}{q - p}\left[z - a\dfrac{1 - u^z}{1 - u^a}\right] & p \neq q \\ (a - z)\, z & p = q \end{cases}$$

III. Seguros de vida

Conforme vimos anteriormente as operações financeiras certas distinguem-se das operações financeiras incertas porquanto as primeiras se baseiam apenas na «teoria do interesse» enquanto as últimas assentam no conhecimento de taxas de sobrevivência dos indivíduos. Estas são baseadas essencialmente em dados estatísticos agrupados em «tabelas de mortalidade».

III. 1. *Definições*

Para certos acontecimentos aleatórios é impossível calcular uma probabilidade por um raciocínio à priori, além de que não se apresentam em número arbitrário. O «espiolhamento» estatístico relativo a um grande número de acontecimentos mostra que se pode considerar um certo número de casos favoráveis para os quais se define uma probabilidade através da frequência com que ocorreram no total de casos observados.

Admitindo a existência de tais probabilidades eliminam-se todas as causas que possam acarretar situações desfavoráveis (doenças, profissões perigosas, ...) e faz-se a hipótese adicional: *a probabilidade de sobrevivência conjunta do grupo é igual ao produto das probabilidades de sobrevivência dos elementos que o constituem.*

Numa colectividade constituída por indivíduos correndo *riscos análogos* adoptaremos as seguintes convenções:

(x) — indivíduo da colectividade e de idade x;
l_0 — número de nados-vivos;
l_x — número de indivíduos, dos l_0 iniciais, que atingiram a idade x;
${}_np_x$ — probabilidade de (x) atingir a idade $x+n$;
${}_nq_x$ — probabilidade de (x) não chegar à idade $x+n$;
${}_{n|t}q_x$ — probabilidade de (x) morrer entre as idades $n+n$ e $x+n+t$.

De um modo geral teremos as seguintes regras:

R$_1$) a letra $p(q)$ afectada de índices designa sempre uma probabilidade de vida (morte);

R$_2$) o índice que está à direita da letra p (ou q) representa sempre a idade do indivíduo a que essa probabilidade se refere;

R$_3$) quando o índice que está à esquerda do p (ou q) é seguido de um traço vertical, tal exprime o tempo que somado ao índice da direita define a idade a partir da qual se exprime a probabilidade;

R$_4$) os índices iguais à unidade suprimem-se por vezes na escrita;

R$_5$) se $n=0 \Rightarrow {}_0p_x=1 \quad {}_0q_x=0$.

É evidente que, para um mesmo indivíduo, se verifica a relação fundamental

35) $${}_np_x + {}_nq_x = 1$$

e por aplicação do teorema das probabilidades compostas segue-se

36) $${}_np_x = \prod_{t=0}^{n-1} p_{x+t} .$$

Pondo $n = n_1 + n_2$ vem

37) $${}_{n_1+n_2}p_x = {}_{n_1}p_x \cdot {}_{n_2}p_{x+n_1}$$

donde se deduz a trivialidade

38) $${}_{n_1+n_2}p_x < {}_{n_2}p_{x+n_1} .$$

Temos ainda

39) $${}_{n|t}q_x = {}_np_x \cdot {}_tq_{x+n} = {}_np_x - {}_{n+t}p_x$$

o que permite calcular ${}_nq_x$ (1) atendendo ao teorema das probabilidades totais

40) $${}_nq_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|1}q_x .$$

Se designarmos por l_{x+n} o número provável de sobreviventes com idade $x+n$ de

(1) Recordar que é um acontecimento composto por várias formas incompatíveis umas com as outras.

um grupo cujo número é l_x fixado previamente, verifica-se

41) $$ {}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} $$

que traduz a definição clássica de probabilidade.

Fazendo $n = 1$ em 35) e 41) vem

42) $$ q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} $$

que permite definir a grandeza d_x — *taxa de mortalidade anual* (para a idade x). O conhecimento de q_x permite a elaboração de tabelas de mortalidade anuais que por sua vez permitem a construção de tábuas de sobrevivência a partir do número inicial l_0 de observados, mediante o seguinte sistema de relações

43) $$ \begin{cases} l_1 = l_0 (1 - q_0) \\ l_{n+1} = l_n (1 - q_n) = l_0 \prod\limits_{t=0}^{n} (1 - q_t) \end{cases} $$

onde os q_t se obtêm por recenseamento.

Todavia procura-se arranjar uma função $f(x)$ que, dependendo de um número de parâmetros comparativamente reduzido, traduza o melhor possível a igualdade

44) $$ l_{x+n} = f(x+n) \qquad \forall\, n \in Q . $$

De $x_1 < x_2$ resulta $l_{x_1} > l_{x_2} \Rightarrow l'_x < 0$; além disso sabemos que l_x se encontra definida para $x > 0$ e que existe ω — a que chamaremos *idade limite* — tal que $l_x = 0$ sempre que $x > \omega$. Nestas condições podemos definir a grandeza μ_x — *taxa instantânea de mortalidade* — pela relação

45) $$ \mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} $$

e *intensidade de vida* — ρ_x por

46) $$ \rho_x = \frac{1}{\mu_x} . $$

A taxa instantânea de mortalidade μ_x não é dada directamente por observação, mas a partir das tabelas podemos determiná-la numericamente utilizando uma das fórmulas

47) $$ \mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2\, l_x} \qquad \text{(Nystron)} $$

47)' $$ \mu_x = \frac{8(l_{x-1} - l_{x+1}) - (l_{x-2} - l_{x+2})}{12\, l_x} $$

$$ (x \geqq z) \qquad \text{(Stirling)} $$

De 45) obtém-se

$$ l_x = l_0 \cdot e^{-\int_0^x \mu_t \cdot dt} $$

e portanto

48) $$ {}_t p_x = e^{-\int_x^{x+t} \mu_\tau \cdot d\tau} . $$

Como $0 < t < \infty \Rightarrow 1 > {}_t p_x > 0$, o teorema de CAUCHY permite afirmar que existe um valor θ — *vida provável de um indivíduo de idade* x tal que

49) $$ {}_\theta p_x = \frac{1}{2} $$

o que significa que um indivíduo de idade x tem tanta possibilidade de viver daqui a θ anos como de estar morto nessa altura. Deverá entender-se por *vida média do grupo* G ao valor e_x dado pela expressão

50) $$ e_x = \frac{1}{l_x} \sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} . $$

A *vida média do indivíduo* de idade x será

51) $$ \mathring{e}_x = \frac{1}{2} + e_x . $$

Ao pretendermos calcular a probabilidade de sobrevivência do grupo constituído pelos indivíduos $x_1, \cdots, x_k$ (considerado como um todo) somos conduzidos ao estudo de

$$52)\qquad l_{x_1,\dots,x_k} \approx f(x_1, \cdots, x_k) = \prod_{i=0}^{k} f(x_i) \approx \prod_{i=0}^{k} l_{x_i}.$$

Aos símbolos já utilizados temos necessidade de acrescentar:

$x_1, \cdots, x_k$ — a letra p (ou q) afectada deste índice direito indica uma probabilidade de vida ou de morte relativa ao grupo constituído por k indivíduos e extinguível à primeira morte;

$\overline{x_1, \cdots, x_k}^{\,j}$ — indica que na probabilidade se consideram «*pelo menos j*» dos indivíduos do grupo;

$\overline{x_1, \cdots, x_k}^{\,[j]}$ — indica que se devem considerar «*exactamente j*» dos indivíduos do grupo.

Examinando o caso em que $k=2$ temos

$$53)\qquad {}_np_{x,y} + {}_nq_{\overline{x,y}} = 1$$

ou

$$53)'\qquad {}_np_{\overline{x,y}} + {}_nq_{x,y} = 1.$$

Dado que os acontecimentos intervenientes no cálculo de ${}_np_{\overline{x,y}}$ não são incompatíveis, obtém-se

$$54)\qquad {}_np_{\overline{x,y}} = {}_np_x + {}_np_y - {}_np_{x,y}.$$

Para o cálculo de ${}_np_{\overline{x,y}}^{[1]}$ devemos atender a que os acontecimentos componentes são:

a) x sobrevive e y morre

b) y sobrevive e x morre

donde

$$55)\qquad {}_np_{\overline{x,y}}^{[1]} = {}_np_x + {}_np_y - 2\,{}_np_{x,y}.$$

Analogamente se estabeleceria uma fórmula para ${}_nq_{\overline{x,y}}^{[1]}$ atendendo a que a independência se transmite aos contraditórios.

Podemos agora calcular a probabilidade ${}_{n|t}q_{\overline{x,y}}$ de que a primeira morte ocorra no intervalo $[n, n+t]$ obtendo-se

$$56)\qquad {}_{n|t}q_{\overline{x,y}} = {}_np_{x,y} \cdot {}_tq_{\overline{x+n,y+n}}.$$

Consideremos o caso muito frequente de seguros onde se pretende calcular a probabilidade de que (x) morra entre n e $n+t$ e (y) sobreviva ao fim de $n+t$ anos; designando tal probabilinade por ${}_{n|t}q^{1}_{\overline{x,y}}$ teremos

$$57)\qquad {}_{n|t}q^{1}_{\overline{x,y}} = {}_{n|t}q_x \cdot {}_{n+t}p_y = \left({}_np_x - {}_{n+t}p_x\right) \cdot {}_{n+t}p_y.$$

O símbolo ${}_{n|t}q^{1}_{x,y}$ designa a probabilidade de que (x) morra entre os anos n e $n+t$ e simultâneamente morra antes de (y).

Trata-se de um acontecimento composto das seguintes formas:

a) (y) não morre até aos $n+t+y$ anos;

b) (y) morre depois de (x);

o que permite escrever

$$58)\qquad {}_{n|t}q^{1}_{x,y} = \frac{1}{2}\left({}_np_x - {}_{n+t}p_x\right)\left({}_np_y - {}_{n+t}p_y\right).$$

Finalmente calcule-se $Q^{1}_{x,y}$ que representa a probabilidade de que (x) morra antes de (y). Por decomposição do acontecimento em formas incompatíveis duas a duas resulta:

59) $$\underset{x,y}{Q^{1}} = \sum_{t=0}^{\omega-x} {}_{t|1}\underset{x,y}{q^{1}} .$$

III. 2. *Equações de sobrevivência*

Retomemos por instantes as noções de taxa de mortalidade anual e a de coeficiente instantâneo de mortalidade para chamar a atenção a:

60) $$d_{x_1,\ldots,x_k} \neq \prod_{i=1}^{k} d_{x_i}$$

61) $$\mu_{x_1,\ldots,x_k} = \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i} .$$

Na prática considera-se uma *idade actuarial* ξ tal que

$$\mu_\xi = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_{x_i}$$

isto é, *a força de mortalidade correspondente à idade actuarial é a média aritmética das forças de mortalidade dos diversos indivíduos do grupo.*

Na construção de tábuas que permitam a determinação do prémio há inúmeros factores a considerar. Citaremos a idade, sexo, profissão, região geográfica entre outros para justificar o aparecimento através dos tempos de algumas fórmulas para o cálculo de l_x, tais como:

62) $l_x = 86 - x$ (MOIVRE)

63) $l_x = \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \quad 2 \lesseqgtr k \lesseqgtr 5$ (LAMBERT-YOUNG)

64) $l_x = \sum_{k=1}^{\infty} A_i e^{a_i x}$ (LAURENT)

65) $l_x = a_0 + a_1 a_2^x$ (SANG)

66) $l_x = e^{A+Bx+Ce^{r_1 x}+De^{r_2 x}}$ (LAZARUS)

67) $l_x = k\, g^{c^x}$ (GOMPERTZ)

68) $l_x = k\, s^x \cdot g^{c^x}$ (MAKEHAM)

Fazendo em 68) $x = 0$ resulta

69) $$k = \frac{l_0}{g} .$$

Para o cálculo de c temos, sucessivamente

70) $$\log l_x = \log k + x \cdot \log s + c^x \cdot \log g$$

71) $$\Delta \log p_x = c^x (c-1)^2 \cdot \log g$$

72) $$\Delta^{n+1} \log l_x = \Delta^n \log p_x$$

73) $$c = \frac{\Delta \log p_{x+1}}{\Delta \log p_x}$$

e conhecendo os valores correspondentes às idades x, $x+1$ e $x+2$ pode substituir-se o valor de c dado por 73) em 71) para determinar g. Finalmente s obtem-se de:

74) $$\log p_x = \log s + c^x (c-1) \cdot \log g .$$

Calculam-se por este processo tantos grupos de constantes (c, g, s) quantos os grupos de três observações procedendo-se depois a um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados.

No entanto HARDY e KING determinam c a partir de

75) $$c^t = \frac{\sum_{k=3t}^{4t-1} \log l_{x+k} - 2 \sum_{k=2t}^{3t-1} \log l_{x+k} + \sum_{k=t}^{2t-1} \log l_{x+k}}{\sum_{k=2t}^{3t-1} \log l_{x+k} - 2 \sum_{k=t}^{2t-1} \log l_{x+k} + \sum_{k=0}^{2t-1} \log l_{x+k}}$$

IV. Funções de comutação e tipos de seguro

Comutações são funções que dependem da taxa de juro e das idades dos diferentes componentes do grupo a que as operações vitalícias dizem respeito. É usual classificá-las em

1. Funções de comutação em *caso de vida*

76) $$D_x = v^x \cdot l_x$$

77) $$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+t}$$

78) $$S_x = \sum_{t=0}^{\infty} N_{x+t}.$$

2. Funções de comutação em *caso de morte*.

Se admitirmos que a morte se dá a meio do ano temos

79) $$\overline{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}} \cdot d_x$$

80) $$\overline{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}_{x+t}$$

81) $$\overline{R}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{M}_{x+t}.$$

No caso em que se consideram as mortes no fim do ano definem-se as funções de comutação

82) $$C_x = v^{x+1} \cdot d_x$$

83) $$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

84) $$R_x = \sum_{t=0}^{\infty} M_{x+t}.$$

Com o auxílio das funções de comutação facilmente se calculam:

a) *capital diferido* — operação que comporta o pagamento de um capital a uma pessoa indicada, se esta for viva no fim de um prazo prefixado. O seu valor é dado por

85) $${}_nE_x = {}_np_x \cdot v^x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

b) *renda vitalícia imediata* — a entrada em jogo é imediata, os pagamentos fazem-se no fim dos períodos e dura enquanto o rendeiro for vivo. Tem-se

86) $$a_x = \sum_{n=1}^{\infty} {}_np_x \cdot v^n = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

c) *renda vitalícia temporária* — a entrada é imediata, a renda é paga durante a vida do beneficiário e quando muito durante um certo número n_1 de anos previamente fixado. Calcula-se por

87) $${}_{|n_1}a_x = \sum_{n=1}^{n_1} {}_np_x \cdot v^n = \frac{N_{x+1} - N_{x+1+n_1}}{D_x}.$$

d) *renda vitalícia diferida* — a entrada é diferida de n_2 anos, a partir da qual a renda é paga e até morte do rendeiro. O seu valor é de:

88) $${}_{n_2|}a_x = \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n_2+n}p_x \cdot v^{n_2+n} = \frac{N_{x+1+n_2}}{D_x}.$$

e) *renda vitalícia diferida temporária* — a entrada é feita como em *d*) e o pagamento de acordo com c), donde resulta:

89) $${}_{n_2|n_1}a_x = \sum_{n=1}^{n_1} {}_{n_2+n}p_x v^{n_2+n} =$$

$$= \frac{N_{x+1+n_2} - N_{x+1+n_2+n_1}}{D_x}.$$

A título de exercício calculemos o valor $a_x^{(m)}$ de uma *renda fraccionada imediata*, com termos constantes normais cuja soma dos m termos pagos em cada ano corresponde a uma unidade de capital, pagável a (x) enquanto for vivo, Teremos então:

$$90)\qquad a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} {}_{\frac{t}{m}}E_x =$$

$$= \frac{1}{m}\left\{\left[\left(1-\frac{1}{m}\right){}_0E_x + \frac{1}{m}{}_1E_x\right] + \right.$$

$$+\left[\left(1-\frac{1}{m}\right){}_1E_x + \frac{1}{m}{}_2E_x\right] +$$

$$+\left[\left(1-\frac{2}{m}\right){}_0E_x + \frac{2}{m}{}_1E_x\right] +$$

$$\left.+\left[\left(1-\frac{2}{m}\right){}_1E_x + \frac{2}{m}{}_2E_x\right] + \cdots\right\} =$$

$$=\left[\left(m-\frac{m+1}{2}\right){}_0E_x + \frac{m+1}{2}{}_1E_x + \cdots\right] +$$

$$+\left[\left(m-\frac{m+1}{2}\right){}_1E_x + \frac{m+1}{2}{}_2E_x + \cdots\right] =$$

$$= \frac{m-1}{2}{}_0E_x + m\left({}_1E_x + {}_2E_x + \cdots\right) =$$

$$= a_x + \frac{m-1}{2m}.$$

A fórmula que acabamos de estabelecer é de grande utilidade pelo uso que dela se faz no cálculo de outras expressões e também por permitir a redução a valores tabelados.

BIBLIOGRAFIA

GALBRUN, HENRI, *Assurances sur la vie*. Calcul des réserves, in Tome III, fas. 2.º du Traité de Calcul des Probabilités et ses applications, publié par E. Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1927.

———, *Théorie mathématique des assurances*. Paris, Armand Colin, 1931, 197 pág.

LEMOS, VICTOR HUGO DUARTE, *Cálculo das Probabilidades*, 2.ª ed., Lisboa, Faculdade de Ciências, 1937-1938, 217+14 págs. policopiadas.

RICHARD, P. J., *Théorie et pratique des opérations d'assurance. Généralités. Assurances sur la vie*. Vol. I, Paris, G. Doin & Cie., 1944, 436 págs.

———, *Théorie et pratique des opérations d'assurance. Assurances diverses*. Vol. II, Paris, G. Doin & Cie., 1946, 640 págs.

FELLER, WILLIAM, *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. I. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1950, 419 págs.

TABELAS FINANCEIRAS E ACTUAIS. Lisboa, Centro de Estudos de Estatística Económica, 1960, 81 págs.