Généralisation d'un théorème de Morgado

par Stephane Foldes
Paris

Dans son étude «On the closure operators of the cardinal sum of partially ordered sets» (Proc. Ams. Ser. A, 64/1961), MORGADO a démontré le théorème suivant: si M_1 et M_2 sont des ensembles partiellement ordonnés, chacun ayant un minimum et un maximum, $M_1 \oplus M_2$ leur somme ordinale et si pour un ensemble partiellement ordonné P on désigne par $\Phi(P)$ l'ensemble partiellement ordonné des opérateurs de fermeture sur P, alors on a:

$$\Phi(M_1 \oplus M_2) \simeq 2 \times \Phi(M_1) \times \Phi(M_2),$$

où $\times$ désigne le produit cardinal.

Puis il généralise ce résultat par récurrence à une somme ordinale à n composants.

Terminologie, notations:

Soient P un ensemble partiellement ordonné et Q_p un ens. p. ord. pour chaque $p \in P$. Considérons l'ensemble des couples (x, p) avec $p \in P$, $x \in Q_p$ et ordonnons—le comme suit:

$$(x_1, p_1) \leqq (x_2, p_2) \Longleftrightarrow (p_1 = p_2 \text{ et } x_1 \leqq x_2 \text{ dans } Q_{p_1} = Q_{p_2}) \text{ ou } p_1 < p_2 .$$

L'ens. p. ord. ainsi obtenu est appellé somme $(P, \leqq)$-ordonnée de la famille $(Q_p)_{p \in P}$ et il est désigné par $\sum\limits_{p \in (P, \leq)} Q_p$. La somme ordinale, la somme cardinale et le produit ordinal sont des cas particuliers de cette définition.

Un ens. p. ord. P est une demi-racine (resp. demi-racine relativement bien ordonnée) si la section finale de chaque élément de P est une chaîne (resp. une chaîne bien ordonnée). Si de plus chaque élément de P est majoré par un élément maximal, on dira que P est relativement majoré.

Soient P une demi-racine relativement bien ordonnée et Q_p un ens. p. ord. avec éléments minimum O_p et maximum u_p, pour $\forall p \in P$.

Définissons une application:

$$F : \Phi(P) \times \prod_{p \in P} \Phi(Q_p) \to \Phi\left(\sum_{p \in (P, \leq)} Q_p\right);$$

pour $a \in \Phi(P) \times \prod\limits_{p \in P} \Phi(Q_p)$ (produit cardinal),

$$a = (\varphi, \cdots, \varphi_p, \cdots),$$

l'opérateur $F(a) \in \Phi\Big(\sum\limits_{p \in (P, \leq)} Q_p\Big)$ est défini comme suit: soit $(x, p) \in \sum\limits_{p \in (P, \leq)} Q_p$; alors,

si $\varphi(p) = p$, $F(a)(x, p) = (\varphi_p(x), p)$;
si $\varphi(p) > p$ et $\varphi_p(x) < u_p$, $F(a)(x, p) = (\varphi_p(x), p)$;
si $\varphi(p) > p$ et $\varphi_p(x) = u_p$, $F(a)(x, p) = (\varphi_{p'}(O_{p'}), p')$,

où p' est le premier élément de $(p, \rightarrow)$ vérifiant $\varphi(p') = p'$ ou $\varphi_{p'}(O_{p'}) < u_p$.

On a:

$$a \leqq b \Leftrightarrow F(a) \leqq F(b).$$

Nous avons obtenu le

TH. 1. *Si* $(Q_p)_{p\in P}$ *est une famille d'ensembles partiellement ordonnés chaque* Q_p *ayant un élément minimum et un élément maximum et si* P *est un demi-racine relativement bien ordonnée, alors* $\Phi(P)\times\prod_{p\in P}\Phi(Q_p)$ *est isomorphe à une partie de* $\Phi\left(\sum_{p\in(P,\leq)} Q_p\right)$.

Ajoutons aux hypothèses du th. 1. la suivante: P est relativement majoré. Montrons que F est surjective:

Soit $\theta\in\Phi\left(\sum_{p\in(P,\leq)} Q_p\right)$.

Définissons $\varphi\in\Phi(P)$ en déterminant l'ensemble $\mathcal{F}_\varphi$ de ses invariants:

$$\mathcal{F}_\varphi=\{p\in P\,|\,\theta(u_p,p)=(u_p,p)\}.$$

Pour chaque $p\in P$ définissons $\varphi_p\in\Phi(Q_p)$-par l'ensemble $\mathcal{F}_{\varphi_p}$ des invariants:

$$\mathcal{F}_{\varphi_p}=\{x\in Q\,|\,(x,p) \text{ est } \theta\text{-fermé}\}\cup\{u_v\}.$$

Posons:

$$a=(\varphi,\cdots,\varphi_p,\cdots)\in\Phi(P)\times\prod_{p\in P}\Phi(Q_p).$$

On peut vérifier facilement que $F(a)=\theta$. Nous pouvons énoncer le

TH. 2. *Soit* P *une demi-racine relativement bien ordonnée et relativement majorée et soit* Q_p *un ens. p. ord. avec minimum et maximum* $\forall\, p\in P$. *On a l'isomorphisme suivant:*

$$\Phi\left(\sum_{p\in(P,\leq)} Q_p\right)\simeq\Phi(P)\times\prod_{p\in P}\Phi(Q_p)$$

ou encore, M *désignant l'ens. des éléments maximaux de* P,

$$\Phi\left(\sum_{p\in(P,\leq)} Q_p\right)\simeq\varphi(P\setminus M)\times\prod_{p\in P}\Phi(Q_p)\simeq$$

$$\simeq 2^{\overline{\overline{P\setminus M}}}\times\prod_{p\in P}\Phi(Q_p).$$

(Pour $\Phi(P)\simeq\varphi(P\setminus M)$ voir MORGADO: Some results on closure operators of partially ordered sets, Port. Math. 19/1960).

On voit comment obtenir différents corollaires. Examinons un cas particulier à titre d'example: Soit α un nombre ordinal de première espèce: $\alpha=\beta+1$ et soit $S=M_0\oplus\cdots\oplus M_\xi\oplus\cdots\oplus M_\beta$ une somme ordinale de type α. Supposons que chaque $M_\xi\,(\xi<\alpha)$ possède un minimum et un maximum. On a:

$$\Phi(S)\simeq 2^{\overline{\beta}}\times\prod_{\xi<\alpha}\Phi(M_\xi).$$

Si α est fini, c'est précisément le résultat de MORGADO.