MOVIMENTO MATEMÁTICO

DOUTOR J. TIAGO DE OLIVEIRA

O Prof. J. Tiago de Oliveira, como professor convidado, realizou no 2.º semestre lectivo de 1971/72 (Março a Julho de 1972) no Technion — Israel Institute of Technology (em Haifa) um curso sobre «Order Statistics» e um seminário sobre «Statistics of extremes and applications», bem como conferências sobre «Bivariates extremes» no Technion e Universidade de Tel Aviv. Em Junho, participou ainda no simpósio «Discriminant Analysis and applications» em Atenas onde fez uma conferência sobre «Quasi-linear discrimination».

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

INTRODUÇÃO AOS COMPUTADORES E PROGRAMAÇÃO

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 1.º Semestre — 1.ª Chamada — 10 de Março de 1972.

I

5796 — Num programa em FORTRAN com as instruções.

```
REAL I
K = 16
I = K + 4./K
.....
```

Após a execução da última destas instruções, como ficam codificadas internamente as variáveis I e K, num computador com palavras de 32 bits?

II

a) Escreva um programa completo em FORTRAN tal que admita como «input» um valor inteiro N e seguidamente uma sucessão de N valores reais, num máximo de 1000. O programa deverá efectuar a troca dos elementos da sucessão da seguinte forma:

— O primeiro com o último;
— O segundo com o penúltimo;
— O terceiro com o antepenúltimo; etc.

O programa deverá conter uma única variável dimensionada e fazer a saída dos valores após as trocas, cinco por linha.

b) Diga quantas instruções executáveis contém o o programa que escreveu e quais são as não-executáveis.

c) Qual das seguintes proposições é verdadeira:

1) A coluna 6 de um cartão de programa FORTRAN contém uma letra, um dígito diferente de 0, um espaço em branco ou um asterisco;

2) A coluna 6 de um cartão de programa FORTRAN pode conter qualquer símbolo do alfabeto;

3) A coluna 6 de um cartão de programa FORTRAN pode conter um dígito diferente de 0 ou um C (se se tratar de um cartão de comentário).

III

Esta parte tem duas opções, A e B; escolha uma e *uma só* delas.

Opção A

Escreva um programa *APL* que calcule a soma da série (finita)

$$J = I - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

para $x = \pi/4$ (Nota: $1 \leftarrow \rightarrow ! \, 0$).

Opção B

Dado o programa FORTRAN (incompleto):

```
  INTEGER F (10000)
  F (1) = 1
  F (2) = F (1)
  I = 2
  .....
2 F (I + 1) = F (I) + F (I - 1)
  I = I + 1
  IF (F (I) - LIMITE) 2,3,3
3 WRITE (6,4) (F (K), K = 1, I)
4 FORMAT ('  ', 10 I 12)
  STOP
  END
```

a) Introduza a instrução que define a variável LIMITE de tal modo que o programa preveja a possibilidade de saída do ciclo antes de ser ultrapassado o valor máximo, previsto num computador de palavras de 32 bits, para os valores inteiros.

b) Esboce o diagrama de blocos do programa completo.

c) Diga qual o efeito deste programa.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 1.º Semestre — 2.ª Chamada — 15 de Março de 1972.

I

5797 — Num programa em FORTRAN com as instruções

```
INTEGER*2 A
B = 2.
A = - SQRT (B)
.....
```

Após a execução da última destas instruções como ficam codificados internamente os valores das variáveis A e B num computador com palavras de 32 bits?

II

Considere os seguintes programas (completos):

```
  DIMENSION L (10,10)
  DO 1 M = 1,10
  DO 1 N = 1,10
  CAL OTSER (N, M, K K)
1 L (M, N) = K K
  WRITE (6,3) ((L (I, J), J = 1,10), I = 1,10)
3 FORMAT ('  ', 10I4)
  STOP
  END
  SUBROUTINE OTSER (I, J, K)
  K = I - I/J * J
  RETURN
  END
```

a) Quantos programas estão codificados acima? Diga se existem subprogramas e de que tipos são; poderiam ser de outro tipo? Justifique.

b) De todas as instruções acima diga quais são as não-executáveis e indique de que tipo são.

c) Apresente os resultados do programa, linha a linha, simulando a impressora.

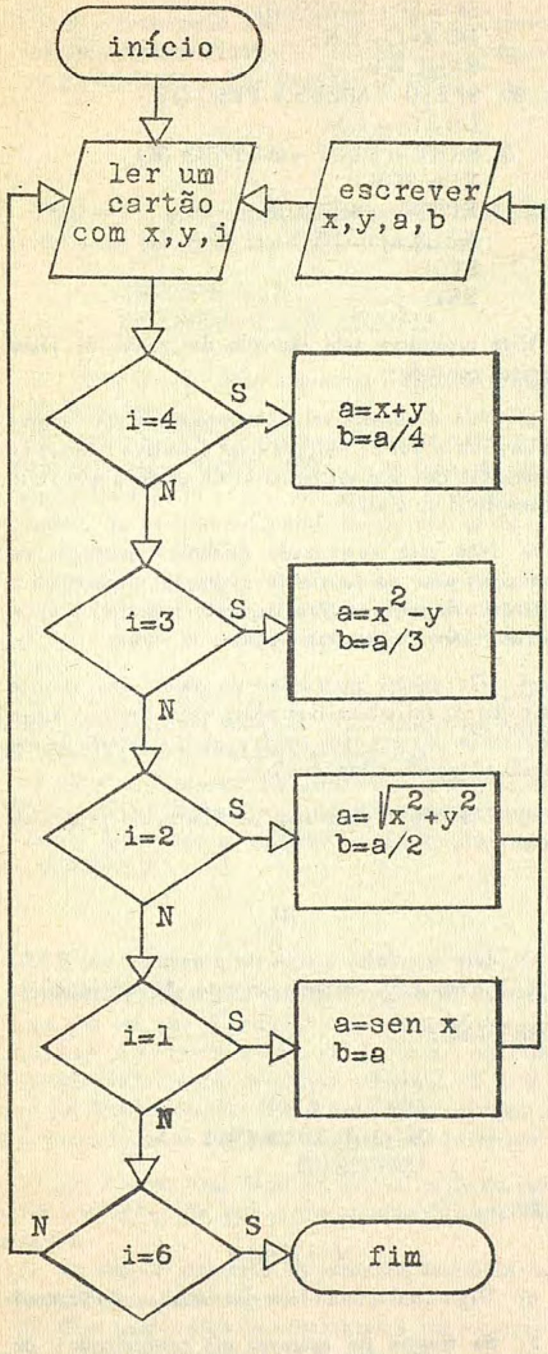
d) Escreva um programa em *APL* que forneça os mesmos resultados.

III

Esta parte tem duas opções, A e B. Escolha uma e *uma só* delas.

Opção A

Escreva um programa FORTRAN que resolva o problema esquematizado no diagrama de blocos seguinte:



Opção B

Escreva uma subrotina em FORTRAN com o nome SEPARA, tal que admita como dados os elementos de uma sucessão de dimensão definida no programa principal; esta deverá então fornecer ao programa principal duas sucessões, uma com os elementos positivos ou nulos e a outra com os elementos negativos, pela ordem porque já anteriormente se encontravam.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 2.º Semestre — 1ª. Epoca — 22 de Julho de 1972.

I

5798 — *a*) Diga como são codificados internamente por um computador com palavras de 32 bits as constantes FORTRAN: +129 (inteira) e −149.25 (real). Diga quais o maior e menor valores reais que é possível codificar com palavras desta extensão; justifique.

b) Indique quais as linguagens de programação que conhece e diga como se classificam do ponto de vista das suas aplicações.

c) Qual a utilidade do compilador FORTRAN do sistema de exploração do computador instalado no CCUTL?

II

Escreva um programa completo em linguagem FORTRAN, incluindo todas as entradas e saídas, que execute o processamento seguinte:

a) Ler um valor inteiro, não superior a 10000 e seguidamente uma sucessão de tantos valores reais quanto o valor inteiro lido;

b) Determine o máximo desses valores reais e a ordem dentro da sucessão da ocorrência, pela primeira vez, desse máximo;

c) Imprima os valores calculados em *b*);

d) Não se esqueça de introduzir instruções que permitam ao computador finalizar a execução do programa.

III

O seguinte programa está completo, mas contém alguns erros de sintaxe, um e um só em cada instrução, com excepção de uma instrução que se encontra escrita de maneira incorrecta:

```
      INTEGER*1 A (80)
   24 READ (5,2,END = 1972) (A(I) I = 1,80)
      DO Z1 I = 1,40
      K IGUAL A (81 — I)
      A (81 — I) = A (I
    1 A = K
      WRAITE (6,3) A
```

```
   3 FORMATO ('  ',80AI)
     FORMAT (80A1)
     GO TO = 24
     GO TO STOP
1972 END
```

a) Corrija este programa do ponto de vista da sintaxe;

b) Diga qual a sua finalidade;

c) Desenhe um diagrama de blocos que exprima a lógica do programa apresentado.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 1.º Semestre — 2.ª Época — 2 de Setembro de 1972.

I

5799 — *a*) Indique em hexadecimal os valores de maior e menor módulo (com exclusão do valor 0) que é possível codificar em virgula flutuante em precisão simples e precisão dupla, em computadores com palavras de 32 bits.

b) Qual a razão porque sendo os valores de menor módulo iguais em ambas as precisões, eles são diferentes no caso do maior módulo? Justifique.

c) Indique sumàriamente qual a finalidade das componentes que conhece do sistema de exploração do computador instalado no Centro de Cálculo da Universidade Técnica de Lisboa.

II

Suponha que se pretendia calcular as médias das idades, dos pesos e das alturas de 15000 alunos da Universidade Técnica de Lisboa e que esses dados se encontravam perfurados em cartões, um para cada aluno, de acordo com as especificações I5, F8.1 e F5.2. Um possível programa para efectuar esses cálculos seria o seguinte:

```
     DIMENSION IDADE (15000), PESO (15000),
   1 ALTURA (15000)
     N = 15000
     READ (5,2) (IDADE (I), PESO (I), ALTURA
   1 (I), I = 1, N)
   2 FORMAT (2X, I3, 3X, F5. 1, F5. 2)
     SI = 0.
     DO 1 I = 1, N
     SPESO = 0.
   1 SI = SI + IDADE (I)
     DO 20 J = 1, N
     SALT = 0.
  20 SPESO = SPESO + PESO (J)
     DO 3 K = 1, N
   3 SALT = SALT + ALTURA (K)
     XI = SI/N
     XPESO = SPESO/N
     XALT = SALT/N
     STOP
     END
```

Este programa está correcto do ponto de vista lógico; contudo:

a) Não é susceptível de ser passado em computador, sob o 44PS; indique qual o motivo e quais as alterações que lhe introduziria de modo a que fôsse susceptível de o ser;

b) Não está optimizado quanto à ocupação de memória nem ao tempo de execução; diga como o alteraria de modo a (tanto quanto possível) o optimizar de acordo com estes pontos de vista;

c) Não inclui instruções de saída dos valores calculados; introduza instruções que permitam a sua impressão, um em cada página, após a escrita de um título adequado à sua escolha;

d) Desenhe o diagrama de blocos do programa final.

III

Os dois seguintes troços de programa, em FORTRAN e em *APL*, respectivamente, são equivalentes:

FORTRAN:

```
     I = 1
     DO 1 J = 2, N
     IF (A (I). LT. A (J)) I = J
   1 CONTINUE
```

APL:

```
I ← A ⍳ ⌈/A
```

a) Diga qual a finalidade dos cálculos efectuados?

b) Se tivesse de escrever um subprograma em FORTRAN para efectuar o cálculo de I repetidas vezes, que tipo de subprograma escolheria? Acrescente ao troço de programa acima as instruções necessárias para que esse subprograma fique completo.

c) Qual o significado das duas funções *APL* ⍳ e ⌈? De que tipos são no exemplo apresentado?

I. S. T. — Introcução aos Computadorese e Programação — Exame Final — 2.° Semestre — 2.ª Época — 1.ª Chamada — 6 de Outubro de 1972.

I

5800 — Um programa em linguagem FORTRAN possui como primeiras instruções as seguintes:

```
COMMON A ,B
INTEGER*2 A (8) , B (10,10)
```

a) Diga de que tipos são estas instruções e qual a sua finalidade;

b) Sabendo que um supervisor de um sistema de exploração ocupa $16896 = 4200_{16}$ bytes (caso do computador do CCUTL), em que posição (palavra) da memória (em hexadecimal) virão localizadas as variáveis A (8) e B (5,7)?

c) Discuta as razões que levaram à escolha do excesso 64 para a representação do expoente da vírgula flutuante de computadores com palavras de 32 bits;

d) Para que serve o controlo da impressora? Quais os caracteres do FORTRAN admitidos como tal e como são codificados num programa?

e) Qual a diferença existente entre as instruções STOP e END. Enquadre a sua resposta nas várias fases da passagem no computador de um programa em FORTRAN.

II

Elabore um diagrama de blocos e escreva um subprograma tal que 1) admita como argumentos do programa principal uma sucessão de valores reais de dimensão definida no programa principal, 2) a dimensão dessa sucessão, 3) um valor real qualquer; e que forneça como resultado ao programa principal:

a) se o valor real dado em 3) fizer parte da sucessão, o índice do seu primeiro aparecimento na sucessão;

b) se não, a dimensão da sucessão, acrescida de uma unidade;

c) diga qual o tipo do subprograma que escreveu acima e indique porque não é de outro tipo.

III

Um texto qualquer está perfurado em vários cartões, num máximo de 10. Cada palavra deste texto é constituída por caracteres quaisquer que não são um ponto nem um branco. Cada frase do texto é terminada por um ponto imediatamente a seguir à última palavra dessa frase, tal como na escrita corrente. Cada palavra é separada da seguinte por um branco e o texto tem pelo menos uma frase.

Escreva um programa completo para ler o texto, e calcular e imprimir:

a) O número de frases do texto;

b) O número médio de palavra por frase;

c) O número médio de caracteres por palavra;

d) No que diz respeito à leitura, adopte qualquer convenção que achar conveniente para ser detectado o fim dos cartões logo após a leitura do último cartão do texto.

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 2.° Semestre — 2.ª Epoca — 2.ª Chamada — 30 de Outubro de 1972.

I

5801 — Um programa em linguagem FORTRAN possui como primeiras instruções as seguintes:

```
INTEGER*2 I (2)
EQUIVALENCE (X , I (1))
X = 1.03125
WRITE (6,1) I
```

a) Diga de que tipos são estas instruções e qual a sua finalidade;

b) Escreva uma instrução de FORMAT de rótulo 1 apropriada para permitir a saída dos valores do quadro I pela impressora do sistema e de acordo com ela indique como seriam impressos esses valores;

c) Supondo que um programa com as instruções iniciais acima indicadas é passado num computador com palavras de 32 bits, qual a codificação interna da variável X em hexadecimal e quais os valores numéricos decimais das variáveis I (1) e I (2) no momento da execução da instrução de saída? (Nota: $0{,}03125 = 2^{-5}$ e $2^{15} = 32768$);

d) Quais são as componentes da unidade central de um computador e como se processa o fluxo de informações entre elas e as unidades periféricas?

II

O subprograma seguinte está completo e correcto, servindo para, definidos no programa de chamada uma sucessão de valores reais X e um valor inteiro

N, seleccionar de entre as N primeiras componentes de X a maior (se $N \leqslant 1$, seleccionar X (1)), e a posição da primeira ocorrência desse valor na sucessão:

```
      SUBROUTINE MAXIMO (J , MAIOR)
      COMMON N , X
      REAL MAIOR
      DIMENSION X (1)
      MAIOR = X (1)
      J = 1
      IF (N.LE.1) RETURN
      DO 6 I = 2 , N
      IF (X (I) - MAIOR) 6 , 6 , 85
   85 J = I
    6 CONTINUE
      RETURN
      END
```

a) Diga qual o significado dos verbos RETURN e CONTINUE, incluídos neste subprograma;

b) Qual a razão porque o subprograma acima não é de outro tipo? Seria possível alterá-lo de modo a que o fosse, obtendo-se ainda os mesmos resultados? Justifique a resposta;

c) Escreva um programa principal completo que efectue o processamento seguinte:

1.º Leitura de, num máximo 10000 valores reais, tantos quanto o valor de uma variável inteira lida antes (eventualmente na mesma instrução);

2.º Ordenação desses valores reais por ordem *decrescente*, por chamada do subprograma indicado acima;

3.º Impressão da sucessão assim ordenada.

Não se esqueça de que se pretende um programa completo, envolvendo por isso todas as instruções executáveis e não-executáveis necessárias para as leituras, escritas, cálculos e chamadas ao subprograma.

III

Como é do conhecimento geral, o FORTRAN é uma linguagem em que as entradas e saídas se efectuam em formato fixo. É, no entanto, possível em certos casos efectuar, por programa, esses processamentos em formato livre.

Supondo que se encontram perfurados em cartões valores *inteiros* e *positivos* quaisquer, em campos arbitrários, separados um dos outros dentro de cada cartão por, pelo menos, um espaço em branco, desenhe um diagrama de blocos e escreva um subprograma que permita:

a) Efectuar essa leitura cartão a cartão, pesquisando se existem ou não perfurados no cartão quaisquer outros caracteres que não sejam numéricos;

b) Se for o caso imprimir uma mensagem de erro e abandonar a execução de todos os programas que constituem o «job»;

c) Se só existirem perfurados valores numéricos positivos de constantes inteiras, separados como se indicou por pelo menos um espaço em branco, atribuí-los a tantas variáveis inteiras indexadas quanto o número desses valores e transmiti-los assim ao programa de chamada.

Nota: atendendo a que os cartões são lidos individualmente e para cada um os possíveis valores de constantes inteiras aí perfurados estão separados por um ou mais espaços em branco, não poderá haver para cada cartão mais de 40 variáveis a serem lidas.

Enunciados dos n.os 5796 a 5801 de J. Marques Henriques

TEORIA DOS ANÉIS

Instituto de Matemática da UFPE — Mestrado — Teoria dos Anéis — Exame Final — 1.ª parte — 30-6-73.

Tempo para a prova: 4 horas

5802 — 1) Diga se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas, justificando suas respostas:

a) Se A é um DIP, todo ideal primo de A é maximal.

b) Se A é um DFU, todo ideal primo de A é maximal.

c) Se A e $A[X]$ são DIP, então A é um corpo.

d) Se A é um domínio Noetheriano tal que, para todos $a, b \in A$, $<a> + <b>$ é um ideal principal, então A é um DIP.

e) Se A é um DFU e a, b, c são elementos de A tais que c é um máximo divisor comum de a e b, então existem $x, y \in A$ tais que $c = ax + by$.

2) Suponha que o diagrama de homomorfismos de de A-módulos

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & S \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & T \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & R' \arrow[r, "f'"'] & S' \arrow[r, "g'"'] & T' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

é comutativo e que as linhas são sequências exactas. Mostre que

a) Se v é um epimorfismo, então w é um epimorfismo.

b) Se v é um monomorfismo, então u é um monomorfismo.

3) Considere o anel $A = K[x, y, z]$ onde K é um corpo e $xy = z^2$.

a) Mostre que A é Noetheriano.

b) Mostre que $<x> \cap <x, y, z>^2$ é uma decomposição primária irredundante do ideal $<x, z>^2$.

4) Seja D um domínio Noetheriauo e seja $a \in D$, um elemento não nulo e não inversível.

Mostre que:

a) Se $b \in D - \{0\}$, então o conjunto dos ideais da forma $<b> : <a^n>$, para $n \in Z^+$, é finito.

b) Se $b \in D - \{0\}$, então o conjunto

$$\{n \in Z^+ : b \in <a^n>\}$$

é finito.

c) Se I é um ideal não nulo de D, então $aI < I$.

d) Se J é um ideal contido no ideal principal $<c>$, então $J = c(J : <c>)$.

e) Se todo ideal maximal de D é principal então D é um DIP.

Intituto de Matemática da UFPE – Mestrado – Teoria dos Anéis – Exame final – 2.ª parte – 2-7-73.

Tempo para a prova: 5 horas

5803 — Considere o conjunto E dos polinómios em X com coeficientes num corpo K, munido das operações $+$ e Θ, assim definidas: a operação $+$ é a operação de soma de polinómios e a operação Θ é definida pela condição:

Se

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \quad g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i,$$

então

$$f \Theta g = \sum_{i=0}^{n+m} c_i X^i$$

com

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \alpha^j (b_{i-j}),$$

onde α ó um endomorphismo não nulo do corpo K (sendo, por convenção, $\alpha^0(x) = x$ para todo $x \in K$).

Mostre que:

a) $<E, +, \Theta>$ é um anel (prove sòmente a associatividade da operação Θ) sem divisores próprios de zero e não comutativo (a não ser que α seja o automorfismo idêntico).

b) Para todo $f \in E$ e $g \in E - \{0\}$, existem polinómios $q, r \in E$ tais que

$$f = q \Theta g + r, \text{ onde } r = 0 \text{ ou } gr(r) < gr(g).$$

*

Isto mostra que há anéis não comutativos, muito semelhantes aos anéis euclideanos. Surge assim naturalmente o problema de estender a certos anéis não comutativos algumas propriedades dos anéis euclideanos.

Seja então A um anel sem divisores próprios de zero para o qual existe alguma aplicação

$$v : A - \{0\} \to Z^+$$

que satisfaça as condições seguintes:

(*i*) $v(y) \leqslant v(xy)$ para todos $x, y \in A - \{0\}$.

(*ii*) Para todos $x, y \in A - \{0\}$, existem $q, r \in A$ tais que

$$x = qy + r, \text{ onde } r = 0 \text{ ou } v(r) < v(y);$$

[q diz-se *quociente esquerdo* de x por y; se $r = 0$, diz-se que y é *divisor direito* de x ou que x é *múltiplo esquerdo* de v].

Mostre que:

1) Se a é um elemento de A tal que $v(a)$ é mí-

nimo, então a é múltiplo esquerdo de a e o quociente esquerdo correspondente é elemento um de A (representado por 1).

2) É condição necessária e suficiente para que o elemento $x \in A$ seja inversível que se tenha $v(x) = v(1)$.

Tem-se $v(y) = v(xy)$, se e só se x é inversível.

3) Se I é um ideal esquerdo de A, então I é principal e qualquer cadeia estritamente ascendente de ideais esquerdos de A é necessàriamente finita.

4) Se o elemento $a \in A - \{0\}$ é não inversível, existe um divisor direito d de a tal que

$d = uv$ implica u inversível ou v inversível.

5) A é um anel com máximo divisor comum direito e com mínimo múltiplo comum esquerdo.

6) Os elementos q e r que intervêm na condição (*ii*) são únicos, se e só se v satisfaz à condição

$$(iii) \qquad v(x+y) \leqslant \sup \{v(x), v(y)\}$$

para todos $x, y \in A - \{0\}$ tais que $x + y \neq 0$.

7) Se a aplicação v satisfaz às condições (*i*), (*ii*) e (*iii*), então $U \cup \{0\}$, onde U é o conjunto dos inversíveis de A, é um anel de divisão.

Enunciados dos n.os 5802 a 5803 de José Morgado

EXERCICES D'ANALYSE

Université Libre de Bruxelles – Faculté des Sciences Appliquées – Exercices d'Analyse.

1ère candidature.

I

5804 — 1. Soit R^n l'espace de n-uples

$$\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$$

a) Montrer que $R, R^n, +$ est un espace vectoriel.

b) Quelle est la dimension de R^n.

c) Donner deux bases distinctes de R^n.

d) Un sous-ensemble S d'l vectoriel réel est 1 sous-vectoriel si et seulement si $\forall\, a, b \in R$

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in S : a\vec{x} + b\vec{y} \in S .$$

Montrer que R^k est un sous vectoriel de R^n si $k < n$.

Donner une base de R^2 dans R^n. Quelle est sa dimension?

e) Montrer que R^2 est isomorphe au plan réel.

2. Soit dans R^3 le changement de base suivant (où $\vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3$ est la base canonique de R^3)

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 . \end{cases}$$

a) Déterminer les composantes dans la nouvelle base des vecteurs

$$\vec{x} = (1, 1, 0)$$
$$\vec{y} = (2, 0, 1)$$
$$\vec{z} = (0, 0, 1) .$$

b) Montrer que les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ forment également une base.

II

5805 — 1. Utiliser les formules de Taylor et Mac Laurin pour calculer

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)^2}{\sin \frac{x}{2}} \qquad b) \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$$

$$c) \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} .$$

2. Trouver une fonction f six fois dérivable, admettant un maximum en 0 et dont toutes les dérivées en ce point sont nulles jusqu'à l'ordre 5.

3. Rechercher les extrémas des fonctions suivantes et déterminer s'il s'agit de minima ou de maxima

$$a) \quad y(x) = \frac{\operatorname{Log} x}{x} \qquad 0 < x < \infty$$

b) $y(x) = x^4 - 4x^3 + 16x + 1 \quad -\infty < x < +\infty$

c) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi .$

4. *a*) Considérons un canal rectiligne large de 1 km. Un étudiant se trouvant le long du canal veut atteindre un endroit situé sur la rive opposée à une distance de 2 km du point qui lui est opposé.

Sachant qu'il nage à une vitesse de 4 km/h et marche à une vitesse de 5 km/h et qu'il doit atteindre l'endroit en question en un minimum de temps, quel trajet va-t-il effectuer ?.

b) Même problème lorsque le point à atteindre est á 1 km et lui est opposé.

c) Même problème lorsqu'il nage à une vitesse de 5 km/h et marche à une vitesse de 4 km/h.

III

5806 – 1. Soit f la fonction définie sur le carré $0 \leqslant x \leqslant 1 \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si} \quad x \geqslant y \\ x(1-y) & \text{si} \quad x < y . \end{cases}$$

Démontrer que

a) $\forall\, a, b \in [0,1] \quad f(a,b) = f(b,a)$

b) f est continue.

c) Quel que soit $a \in [0,1]$ la fonction $g(y) = f(a,y)$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point $b \in [0,1]$.

2. Trouver les points de discontinuité de la fonction suivante :

$$\cos \frac{1}{xy} .$$

3. Déterminer le domaine de définition de la fonction $\operatorname{Arc\,sin} \dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

4. Trouver les points de discontinuité de la fonction $\dfrac{xy+1}{x^2-y}$.

5. Calculer les différentielles première et seconde de la fonction composée suivante

$$f_3(x,y,z) = xyz, \quad x = t^2 + 1,$$

$$y = \log t, \quad z = \operatorname{tg} t .$$

6. x e y étant deux fonctions d'une variable indépendante, calculer

$$d^2 \left[(x^2 + y^2) \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x} \right]$$

en utilisant la différentiation des fonctions d'une variable.

7. Calculer les dérivées partielles de la fonction suivante

$$f = \sqrt{x^2 - y^2} .$$

8. Trouver les dérivées partielles du $2d$ ordre de $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^4$.

9. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction

$$F(x,y) = \operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2) .$$

IV

5807 – 1. Résoudre et discuter le système

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Calculer par le déterminant de Sylvester le résultat des deux équations :

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ x^3 + px + q = 0 \end{cases} .$$

Comparer la réponse à celle donnée dans le Cours p. 98.

3. Soit $[x]$ la fonction «partie entière de» x

a) Démontrer que $\varphi(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$ est une fonction continue et non décroissante.

b) Calculer

$$\int_0^4 \varphi(x)\, dx .$$

4. Calculer

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

par dvp de Taylor

5. Ecrire la formule de Taylor appliquée au point $x=1$ à la fonction réelle $y(x)$ définie par la relation $y^3+x^3-xy+y=0$.

On se limitera aux trois premiers termes.

6. Calculer la matrice jacobienne de (u,v) par rapport à (x,y) lorsque u et v sont définis implicitement en fonction de x,y par les relations

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv u+v-x-y=0 \\ f_2 &\equiv xu+yv-1=0 \end{aligned}.$$

Calculer ensuite le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(u\,v)}{\partial(x,y)}.$$

7. Déterminer le minimum de la distance entre l'origine et les points de la courbe $y=1-x^2$.

V

Intégrales généralisées

5808 — 1. Etudier la convergence de

$$a)\ \int_1^\infty \frac{x\,dx}{3x^4+5x^2+1} \qquad b)\ \int_2^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}\,dx$$

$$c)\ \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}\,dx \qquad d)\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\,dx.$$

2. Etudier la convergence de

$$a)\ \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx \qquad b)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$c)\ \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \qquad d)\ \int_0^\pi \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx.$$

3. Montrer que les intégrales

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\sin x\,dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

convergent.

4. Calculer

$$a)\ I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

$$b)\ I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4}.$$

VI

5809 — 1. Soit U une fonction dérivable de la variable $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

En utilisant Ostrogradsky, montrer que si Ω est le domaine compris entre deux sphères concentriques (rayons a et b)

$$\iiint_\Omega \Delta U = 4\pi b^2 U'(b) - 4\pi a^2 U'(a).$$

2. Calculer le flux du vecteur $\overline{A}=(2x-z)\overline{1}_x + x^2y\overline{1}_y - xz^2\overline{1}_z$ au travers de la surface du cube délimitée par les plans $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$:

a) directement

b) en appliquant la formule d'Ostrogradsky.

3. Calculer en appliquant le théorème de Green dans le plan

$$I=\int_C (xy^2+e^x\cos y)\,dx-(x^2y+e^x\sin y)\,dy$$

où C est l'arc de lemniscate d'équation $r^2=\cos 2\alpha$ situé dans le premier quadrant (Autrement dit $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$) $A=(1,0)$.

4. Montrer que le champ de force

$$\overline{F}=(2xy+z^3)\overline{1}_x+x^2\overline{1}_y+3xz^2\overline{1}_z$$

est irrotationnel.

— Trouver le potentiel scalaire duquel dérive ce champ.

— Calculer le travail effectué en déplaçant un objet du point $(1,-2,1)$ au point $(3,1,4)$ dans ce champ de force.

5. On donne le champ vectoriel $\overline{F}$

$$\overline{F}=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\overline{1}_x+\frac{e^y}{1+x^2}\overline{1}_y.$$

Montrez que ce champ dérive d'un potentiel scalaire et recherchez la circulation du champ le long d'une courbe joignant l'origine au point $(1,4)$.

Enunciados dos n.os 5804 a 5809 de F. e J. Teixeira

AUTOR	TÍTULO	N.º	PREÇO	
			US $	CR $
AMBROSIO, U. D'.	On parametrization of trajectories in systems with memory	19	0.50	3,25
KAYANDE, A. A. and RAO, M. R. M.	Comparison principle and converse theorems for finite time stability	20	1.00	6,50
CARDOSO, F.	On the existence and differentiability of weak solutions of a boundary value problem for certain class of pseudo-differential operators	21	1.00	6,50
TSOKOS, C. P. and LEELA, S.	Control systems and finite time stability	22	0.75	4,87
MORGADO, J.	Extension of some results of HERSTEIN on semi-homomorphisms of groups	23	0.75	4,87
SCHAPIRA, P.	Théorie des hyperfonctions	24	1.25	8,12
MORGADO, J.	Two axiom systems for commutative rings with identity	25	0.50	3,25
VASCONCELOS, W. V.	A note on projective modules over polynomial rings	26	0.50	3,25
CARDOSO, F.	On a sheet problem for pseudo-differential operators	27	0.50	3,25
CARDOSO, F.	The identity of weak and strong extensions of pseudo-differential operators	28	0.50	3,25
NACHBIN, MACHADO and PROLLA	Weighted approximation, vector fibration and algebras of operators	29	1.25	8,12
MORGADO, J.	Some remarks on a definition of a group in terms of the inverse operations	30	0.75	4,87
OLIVEIRA, G. N.	Binary square roots of matrices	31	1.25	8,12
PACHPATTE, B. G.	On the stability problems of perturbed difference equations	32	0.50	3,25
BEIRES, R. S.	Sôbre uma caracterisação matricial das transformações canónicas	33	1.00	6,50
VASCONCELOS, W. V.	Finiteness in projective ideals	34	1.00	6,50
SETTE, A. M.	On the propositional calculus P^1	35	1.00	6,50
DEO, S. G.	Mixed stability and functional differential systems	36	0.75	4,87
SIMIS, A.	Projective moludi and maximal spectra of certain quotient rings	37	1.00	6,50
GOMES, R. L.	Uma propriedade do fecho holomórfico	38	0.50	3,25
BADELUCCI, A.	Stability of non linear equations with time lag	39	0.50	3,25
RAMALHO, R.	Existence and uniqueness theorems for a nonlinear integral equation	40	2.50	16,25
COSTA, N. C. A.	On the theory of inconsistent formal systems	41	1.25	8,12
LINHARES, O. L.	Sôbre um método geral de inversão de matrizes	42	1.00	6,50
MORGADO, J. C.	Note on quasi-orders, partial orders and orders	43	0.75	4,87
CARDOSO, J. M. and MIYAOKA, F. K.	Estrutura de reticulado em 3-aneis unitários	44	0.50	3,25
SARTORELLI, A.	Uma caracterização das álgebras de BOOLE	45	0.50	3,25
KASCIC, M. J.	Functional analytic equivalences for P and strong P-convexity	46	0.75	4,87
BERENSTEIN, C. A. and DOSTAL, M. A.	Some remarks on convolution equations	47	1.25	8,12