ANO XXXII – N.os 121-124 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO/DEZ. – 1971

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Introdução à Teoria das Categorias, I

por **A. V. Ferreira** (*)

Homenagem a Bento de Jesus Caraça
no XX aniversário da sua morte.

Esta série de artigos tem como finalidade chamar a atenção do leitor de «Gazeta de Matemática» para algumas noções e resultados básicos de um capítulo fundamental da Matemática, cuja existência provàvelmente desconhece (1).

A Teoria das Categorias nasceu há cerca de um quarto de século e teve origem em certos desenvolvimentos da Topologia Algébrica. Os conceitos de *categoria, funtor, transformação natural* e *dualidade* de que nos ocupamos no primeiro capítulo deste trabalho, foram introduzidos no início da década de 40 por Eilenberg e MacLane em [5, 6] textos históricos de notável clareza que o leitor encontrará reproduzidos ([ ] apenas parcialmente) neste e no número 109-112 de «Gazeta de Matemática», na secção Antologia.

Embora os conceitos que citámos tivessem a sua origem numa determinada teoria matemática e se tornasse logo evidente a sua aplicabilidade noutros domínios, os progressos da Teoria das Categorias na década 45-55 foram assás lentos. Pode afirmar-se que o desenvolvimento desta teoria se operou verdadeiramente a partir dos anos 55-57 que foram assinalados pelo aparecimento de trabalhos fundamentais: Buchsbaum [2], Cartan e Eilenberg [4], Grothendieck [9].

Presentemente, a Teoria das Categorias é um capítulo vasto e autónomo da Matemática, cuja linguagem e métodos invadiram, e se tornaram essenciais à Álgebra, Topologia, Lógica Matemática, Análise Funcional, Geome-

---

(*) Do *Laboratório de Física e Engenharia Nucleares*, Sacavém, Portugal.

(1) Temos em vista especialmente os alunos dos dois últimos anos das Faculdades de Ciências e recèm-licenciados. Ao que sabemos, nos nossos cursos universitários, salvo raríssimas excepções, estas noções não são introduzidas e os aspectos funtoriais das teorias matemáticas clássicas não são convenientemente SALIENTADOS, daí resultando, em parte, aquela sensação de *pêle-mêle, imbroglio*, ou simples oportunismo expositivo, que tantas vezes nos assalta ao folhear textos universitários de conteúdo (eventualmente...) aceitável do ponto de vista cientifico. É doloroso constatar que num espaço muito breve será impossível a um licenciado pelas nossas Faculdades, e mesmo à maioria dos docentes, entender a mera linguagem em que os textos matemáticos estão escritos! Como falar, porém, da «crise» do nosso Ensino Superior, abstraindo do quadro mais amplo de estruturas, condicionamentos, interesses, ···, a atmosfera sediça acalentadora de todo um heterotrofismo arcaico e intelectualmente apoucado, na qual o *grex* que temos consentido ser vem vegetando?

tria Diferencial, Geometria Algébrica, ..., as quais, por sua vez, contribuem para o seu enriquecimento.

Històricamente, as noções de categoria, funtor, transformação natural, etc., determinaram uma viragem na evolução das teorias matemáticas comparável à que originou a introdução dos conceitos fundamentais da Álgebra, grupo, anel, corpo, etc.

A nossa exposição constará dos quatro capítulos: I – **CATEGORIAS E FUNTORES; GENERALIDADES**, II – **CATEGORIAS ABELIANAS. ÁLGEBRA HOMOLÓGICA**, III – **ESTRUTURAS E CATEGORIAS**, IV – **COHOMOLOGIA**

A amplitude dos temas a desenvolver e as dimensões de G. M. impõe-nos naturalmente uma certa sobriedade que o leitor compreenderá e compensará com uma série de iniciativas pessoais a que deixamos porta aberta *presque partout* no texto. Considerando a maturidade que o leitor, a quem este trabalho pode interessar, certamente possui, é possível que o tipo de exposição adoptado se revele particularmente eficiente.

O cap. I e as duas primeiras secções do segundo, de carácter propedeutico, contêm aquela acumulação primitiva de noções e resultados (alguns dos quais deveremos generalizar posteriormente) que toda a teoria deste género necessàriamente comporta. O conteúdo destas partes do texto será constantemente usado no seguimento, em geral, sem menção especial e, atendendo ao carácter elementar dos resultados, a justificação de uma grande parte destes é deixada ao cuidado do leitor, destinando-se as poucas demonstrações incluidas a evitar dificuldades de ordem psicológica. A leitura das restantes secções do cap. II não é estritamente necessária à compreensão do cap. III, pressupondo, contudo, o cap. IV o conhecimento da generalidade dos resultados anteriores. Os exercícios que propomos, quando não se destinem meramente a sensibilizar o leitor em relação à matéria exposta, contêm complementos importantes, por vezes indispensáveis a uma correcta compreensão do texto e são, nesta hipótese, de resolução simples.

As obras [3, 8, 10] da bibliografia abaixo indicada são introduções à Teoria das Categorias que recomendamos vivamente ao leitor. Ehresmann [7], cuja pág. V se encontra reproduzida na secção Antologia do N.º 109-112 da «Gazeta de Matemática», desenvolve a Teoria das Categorias com vista mormente a aplicações nos domínios da Análise e da Geometria.

Nestas obras o leitor encontrará mencionada a bibliografia mais relevante.

Optámos por uma posição heterodoxa em relação à bibliografia e mesmo, por vezes, ao nosso ponto de vista pessoal com o intuito de fornecer ao leitor um texto «imparcial» de maneira a facilitar-lhe a compreensão de trabalhos concebidos de pontos de vista e para finalidades diferentes. Procurámos todavia evitar uma exposição invertebrada certos de que bem pior do que adoptar uma atitude dogmática (e, portanto, intelectualmente fechada) seria apresentar um texto amorfo (e, portanto, irracional).

Procuraremos elucidar o leitor sobre os problemas fundacionais da teoria das categorias num Apêndice; no corpo do trabalho limitamo-nos a usar os circunlóquios habituais que, esperê-mo-lo, despertem no leitor uma ideia intuitiva do assunto.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Andreotti, *Généralités sur les catégories abéliennes*. Séminaire A. Grothendieck, 1957.

[2] Buchsbaum, *Exact categories and duality*. Tans-Amer. Math. Soc. **80** (1955), 1-34.

[3] I. Bucur e A. Deleanu, *Introduction to the theory of Categories and Functors*. John Wiley & Sons. London, 1968.

[4] H. Cartan e S. Eilenberg, *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.

[5] S. Eilenberg e S. MacLane, *Natural isomorphisms in group theory*. Proc. Nat. Ac. Sc. **28** (1942), 537-543.

[6] ———, *General theory of natural equivalences*. Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 231-294.

[7] Ch. Ehresmann, *Catégories et Structures*. Dunod éd. Paris, 1965.

[8] P. Freyd, *Abelian Categories*. Harper and Row, London, 1966.

[9] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'Algèbre Homologique*. Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[10] B. Mitchell, *Theory of Categories*. Academic Press, 1965.

La Jolla Conference [J], 1965 e *Midwest Category Seminar* [M], Springer Verlag, editor.

I — CATEGORIAS E FUNTORES; GENERALIDADES

1. Classes simplesmente algebrizadas. Seja $\mathcal{C}$ uma classe (não necessàriamente um conjunto) (²). Uma *lei de composição (interna) definida em* $\mathcal{C}$ é uma aplicação $\top$ de uma subclasse de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$. Se o domínio de $\top$ é $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$, diz-se que $\top$ é uma *lei de composição definida sobre* $\mathcal{C}$ ou uma *operação (binária) entre elementos de* $\mathcal{C}$. Uma *classe simplesmente algebrizada* é um par $(\mathcal{C},\top)$, que designaremos abreviadamente por $\mathcal{C}^{\top}$, cuja primeira coordenada é uma classe $\mathcal{C}$ e cuja segunda coordenada é uma lei de composição definida em $\mathcal{C}$. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. A subclasse $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ diz-se *classe dos pares componíveis* de (ou em) $\mathcal{C}^{\top}$; se $(x,y)\in\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$, i.e. se x é *componível* com y, $\top(x,y)$, que representaremos usualmente por $x\top y$, chama-se *composto de* x *e* y ou *composto de* x *com* y. $\mathcal{C}$ diz-se classe *subjacente* a $\mathcal{C}^{\top}$ e empregaremos frequentemente o abuso de linguagem que consiste em escrever $x\in\mathcal{C}^{\top}$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}^{\top}$ em vez de «$\mathcal{C}^{\top}$ é uma classe simplesmente algebrizada e $x\in\mathcal{C}$, $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}$». Se $\mathcal{A},\mathcal{B}\subset\mathcal{C}^{\top}$, $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$ designará a subclasse de $\mathcal{C}$, $\top(\mathcal{A}\times\mathcal{B})=\top(\mathcal{A}\times\mathcal{B}\cap\overset{-1}{\top}(\mathcal{C}))$; $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$ é constituída pelos $x\top y$ tais que $x\in\mathcal{A}$, $y\in\mathcal{B}$ e x é componível com y. Para evitar um excessivo purismo de notação, escreveremos $a\top\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{A}\top b$) se $\mathcal{A}=\{a\}$ (resp. $\mathcal{B}=\{b\}$) sempre que não exista risco de confusão (³).

Suponhamos $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}^{\top}$. Se

$$\mathcal{A}\top\mathcal{A}\subset\mathcal{A}\ \ (\text{resp. } \mathcal{C}\top\mathcal{A}\subset\mathcal{A},\ \mathcal{A}\top\mathcal{C}\subset\mathcal{A}),$$

$\mathcal{A}$ diz-se uma *parte* ou *subclasse estável* (resp. *ideal esquerdo, ideal direito*) de $\mathcal{C}^{\top}$; se $\mathcal{A}$ é simultâneamente um ideal esquerdo e um ideal direito, $\mathcal{A}$ diz-se um *ideal* de $\mathcal{C}^{\top}$. A intersecção de uma família de partes estáveis (resp. ideais esquerdos, ideais direitos, ideais) de $\mathcal{C}^{\top}$ é uma parte estável (resp. ideal esquerdo, ideal direito, ideal) de $\mathcal{C}^{\top}$. Em particular, a intersecção das partes estáveis (resp. ideais esquerdos, ideais direitos, ideais) de $\mathcal{C}^{\top}$ que contêm uma subclasse $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ diz-se *subclasse estável* (resp. *ideal esquerdo, ideal direito, ideal*) *gerada por* $\mathcal{A}$ *em* $\mathcal{C}^{\top}$ e designa-se por $\overleftarrow{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}^{\top}}$ (resp. $[\mathcal{A}_{\mathcal{C}^{\top}},\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}},[\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$) ou mais simplesmente, se não houver risco de confusão, por $\overleftarrow{\mathcal{A}}$ (resp. $[\mathcal{A},\mathcal{A}],[\mathcal{A}]$).

Exercícios: 1. Considere exemplos concretos de classes simplesmente algebrizadas $\mathcal{C}^{\top}$ e de classes $\mathcal{A},\mathcal{B}\subset\mathcal{C}^{\top}$; calcule $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$. Mostre que pode ter-se $(\mathcal{A}\top\mathcal{A})\top\mathcal{A}\neq\mathcal{A}\top(\mathcal{A}\top\mathcal{A})$.

2. Considere exemplos concretos de classes simplesmente algebrizadas $\mathcal{C}^{\top}$ e classes

(²) Ver Apêndice no fim do trabalho

(³) Naturalmente, a própria notação $\mathcal{A}\top\mathcal{B}$ pode dar lugar a confusões. O leitor fàcilmente se aperceberá deste facto se considerar a lei de composição $\cup$ no conjunto das partes de $\mathcal{P}(E)$ onde $\mathcal{P}(E)$ designa o conjunto das partes de um conjunto E; a notação $A\cup B$, $A,B\subset\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ é ambígua.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^{\top}$; determine $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}^{\top}}, [\mathcal{A}_{\mathcal{C}^{\top}}, \mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}, [\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$. Dada uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$ e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^{\top}$ com um único elemento, determine $\overline{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}^{\top}}, [\mathcal{A}_{\mathcal{C}^{\top}}, \mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$ e $[\mathcal{A}]_{\mathcal{C}^{\top}}$; generalize.

Damos seguidamente cinco definições de enorme importância que o leitor (familiarizado com as estruturas algébricas clássicas de grupo, anel, espaço vectorial, etc. cf. J. S. Guerreiro, *Curso de Matemáticas Gerais*, Lisboa 1968; R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Paris 1963; ou, a nível mais avançado, Bourbaki, *Algèbre*, ch. I, II) certamente achará naturais e exemplificará adequadamente.

1.1. Definição. *Dada uma classe simplesmente algebrizada* $\mathcal{C}^{\top}$ *e uma parte* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{C}$, *chama-se* subclasse simplesmente algebrizada de $\mathcal{C}^{\top}$ definida por $\mathcal{A}$, *a classe simplesmente algebrizada* $(\mathcal{A}, \top_{\mathcal{A}})$ *onde* $\top_{\mathcal{A}}$ *designa a lei de composição definida em* $\mathcal{A}$ *tal que, quaisquer que sejam* $x, y \in \mathcal{A}$, (i) x *é componível com* y *sse*(1) $(x, y) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{A})$ *e* (ii) $x \top_{\mathcal{A}} y = x \top y$. $\top_{\mathcal{A}}$ *diz-se lei de composição induzida por* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{A}$. *Utilizaremos frequentemente o abuso de notação que consiste em designar* $(\mathcal{A}, \top_{\mathcal{A}})$ *por* $\mathcal{A}^{\top}$. *Tem-se* $\overset{-1}{\top}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \overset{-1}{\top}(\mathcal{A}) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{A})$. *Se* $\mathcal{A}$ *é estável em* $\mathcal{C}^{\top}$, *a condição* (i) *pode substituir-se por* «x *é componível com* y *sse* $(x, y) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$» *e* $\mathcal{A}^{\top}$ *diz-se então uma* subclasse simplesmente algebrizada estável *de* $\mathcal{C}^{\top}$; *se* $\mathcal{A}$ *é um ideal* (resp. *ideal esquerdo, ideal direito*) *de* $\mathcal{C}^{\top}$, $\mathcal{A}^{\top}$ *diz-se um* subideal *ou* subclasse simplesmente algebrizada sobressaturada (*resp.* subideal esquerdo, subideal direito) *de* $\mathcal{C}^{\top}$.

1.2. Definição. *Dada uma classe simplesmente algebrizada* $\mathcal{C}^{\top}$, *chama-se* classe simplesmente algebrizada oposta *a* $\mathcal{C}^{\top}$ *e designa-se por* $\mathcal{C}^{\top_{op}}$ *ou* $\mathcal{C}^{\top}_{op}$ *a classe simplesmente algebrizada* $(\mathcal{C}, \top_{op})$ *onde* $\top_{op}$ *designa a lei de composição definida em* $\mathcal{C}$ *tal que, quaisquer que sejam* $x, y \in \mathcal{C}$, (i) x *é componível com* y *sse* $(y, x) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ *e* (ii) $x \top_{op} y = y \top x$. $\top_{op}$ *diz-se* lei de composição oposta *a* $\top$.

Naturalmente, $\mathcal{C}^{\top_{op\,op}} = \mathcal{C}^{\top}$. É também claro que se $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, $\overset{-1}{\top}_{op}(\mathcal{A})$ é a imagem de $\overset{-1}{\top}(\mathcal{A})$ pela simetria canónica de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (que associa a cada par (x, y) o par (y, x)).

Nestas condições, é fácil de verificar que $(\mathcal{A}, \top_{\mathcal{A}^{op}}) = (\mathcal{A}, \top_{op_{\mathcal{A}}})$ e o símbolo $\mathcal{A}^{\top_{op}}$ tem um sentido claro. Vê-se também fàcilmente que $\mathcal{A}$ é estável em $\mathcal{C}^{\top}$ sse $\mathcal{A}$ é estável em $\mathcal{C}^{\top_{op}}$, $\mathcal{A}$ é um ideal esquerdo de $\mathcal{C}^{\top}$ sse $\mathcal{A}$ é um ideal direito de $\mathcal{C}^{\top_{op}}$, $\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{C}^{\top}$ sse $\mathcal{A}$ é um ideal de $\mathcal{C}^{\top_{op}}$.

A relação que associa a cada classe simplesmente algebrizada a sua oposta é uma *dualidade* na teoria das classes simplesmente algebrizadas (cf. Apêndice no fim do artigo): toda a noção ou enunciado a respeito de uma classe simplesmente algebrizada se dualiza numa *co-noção* ou *co-enunciado;* se um enunciado é válido para todas as classes simplesmente algebrizadas, o enunciado dual ou co-enunciado é válido para todas as classes simplesmente algebrizadas.

De acordo com o que precede, a noção ideal direito é a noção dual ou co-noção de ideal esquerdo e as noções parte estável e ideal são *autoduais*.

O uso de princípios de dualidade permitir-nos-à frequentemente abreviar a exposição.

1.3. Definição. *Sejam* $\mathcal{C}^{\top}$ *e* $\mathcal{D}^{\perp}$ *classes simplesmente algebrizadas e* f *uma aplicação*

(1) Abreviatura de «se e só se».

de $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{D}$. f *diz-se* compatível com o par de leis de composição $\top, \perp$ *(definidas em* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$, *respectivamente) sse, quaisquer que sejam* $x, y \in \mathcal{C}$, *a relação* x *é componível com* y *em* $\mathcal{C}^{\top}$ *implica* $f(x)$ *é componível com* $f(y)$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ *e* $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$. *Se* f *é compatível com* $\top, \perp$, *o triplo* $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ *chama-se* homomorfismo de $\mathcal{C}^{\top}$ em $\mathcal{D}^{\perp}$ definido por f. *Se* f *é uma injecção (resp. sobrejecção),* F *diz-se um* monohomomorfismo (*resp.* epihomomorfismo); F *diz-se um* dihomomorfismo *se for simultâneamente um* monohomomorfismo *e um* epihomomorfismo. *Se* f *é uma bijecção e* $\overset{-1}{f}$ *é também compatível com* $\perp, \top$, F *diz-se um* isomorfismo *de* $\mathcal{C}^{\top}$ *sobre* $\mathcal{D}^{\perp}$, $(\mathcal{D}^{\perp}, \overset{-1}{f}, \mathcal{C}^{\top})$ *chama-se* isomorfismo inverso *de* F *e representa-se por* $\overset{-1}{F}$.

F *diz-se um* antihomomorfismo *de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ *sse* $(\mathcal{C}^{\top\mathrm{op}}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ — *ou* $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp\mathrm{op}})$ — *é um homomorfismo; em particular,* $(\mathrm{Id}_{\mathrm{op}})_{\mathcal{C}^{\top}} \equiv (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\top\mathrm{op}})$ *é um anti-isomorfismo, dito canónico.*

Se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ e $G = (\mathcal{D}^{\perp}, g, \mathcal{E}^{\odot})$ são homomorfismos, $(\mathcal{C}^{\top}, g \circ f, \mathcal{E}^{\odot})$ é um homomorfismo que se designa por *homomorfismo composto* de G e F e se representa por $G \circ F$; a composição de homomorfismos é associativa num sentido que o leitor explicitará fàcilmente. Se $\mathcal{C}^{\top}$ é uma classe simplesmente algebrizada, $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\top}} \equiv (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\top})$, onde $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ designa a aplicação idêntica de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$, é um isomorfismo chamado isomorfismo idêntico de $\mathcal{C}^{\top}$; tem-se $F \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\top}} = F$ e $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}^{\top}} \circ G = G$ quaisquer que sejam os homomorfismos $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ e $G = (\mathcal{D}^{\perp}, g, \mathcal{C}^{\top})$. A composição de antihomomorfismos, de homomorfismos e antihomomorfismos, e de antihomomorfismos com homomorfismos define-se de maneira análoga sendo imediato que o composto de dois antihomomorfismos é um homomorfismo e o composto de um homorfismo com um antihomomorfismo ou de um antihomomorfismo com um homomorfismo é um antihomomorfismo. Todo o antihomomorfismo se pode exprimir unicamente como composto de um anti-isomorfismo canónico com um homomorfismo (resp. de um homomorfismo com um anti-isomorfismo canónico). Para todo o homomorfismo (resp. antihomomorfismo) de $\mathcal{C}^{\top}$ para $\mathcal{D}^{\perp}$, $F \equiv ((\mathrm{Id\,op})_{\mathcal{C}^{\top}_{\mathrm{op}}}) \circ F \circ ((\mathrm{Id\,op})_{\mathcal{D}^{\top}})$ é um homomorfismo (resp. antihomomorfismo) de $\mathcal{C}^{\top}_{\mathrm{op}}$ para $\mathcal{D}^{\perp}_{\mathrm{op}}$. Se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo ou antihomomorfismo e $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^{\top}$ (resp. $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^{\perp}$), a subclasse de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{C}$), $f(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{-1}{f}(\mathcal{A})$) designa-se por $F(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{-1}{F}(\mathcal{A})$); se $\mathcal{A} = \{a\}$ escreve-se $F(a)$ (resp. $\overset{-1}{F}(a)$) em vez de $F(\mathcal{A})$ (resp. $\overset{-1}{F}(\mathcal{A})$) sempre que não exista risco de confusão com o elemento $F(a) \equiv f(a) \in \mathcal{D}$ (resp. $\overset{-1}{F}(a) \equiv \overset{-1}{f}(a) \in \mathcal{C}$, no caso de f ser bijectiva).

Definições: Com as notações de **1**. 3, em vez de dizer que f é compatível com $\top, \perp$, é frequente dizer-se que f *define um homomorfismo de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$. A expressão f *define um antihomomorfismo de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ tem também um sentido claro.

Exercícios: 1. Mostre que, se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, a imagem recíproca $\overset{-1}{F}(\mathcal{A})$ de uma parte estável (resp. ideal esquerdo, ideal direito, ideal) $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}^{\top}$ é uma parte estável (resp. ideal esquerdo, ideal direito, ideal) de $\mathcal{C}^{\top}$. Mostre com um exemplo que a imagem (directa) $F(\mathcal{A})$ de uma parte estável de $\mathcal{C}^{\top}$ não é necessàriamente uma parte estável de $\mathcal{D}^{\perp}$; indique condições suficientes para que: *a*) a imagem por F de uma parte estável de $\mathcal{C}^{\top}$ seja uma parte estável de $\mathcal{D}^{\perp}$; *b*) a imagem por F de um ideal de $\mathcal{C}^{\top}$ seja um ideal de $\mathcal{D}^{\perp}$.

2. Para toda a subclasse $\mathcal{A}$ de uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$, $\mathrm{Incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}^{\top}} \equiv (\mathcal{A}^{\top}, \mathrm{incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}, \mathcal{C}^{\top})$, onde $\mathrm{incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}$ designa a inclusão canónica de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$ um monohomorfismo, dito *inclusão* de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}^{\top}$.

1.4. Definição. *Seja* $\mathcal{C}^{\top}$ *uma classe simplesmente algebrizada e* R *uma relação de equivalência em* $\mathcal{C}$. *Diz-se que* R *é* compatível *com* $\top$ *sse, quaisquer que sejam* $\mathrm{x}, \mathrm{x}', \mathrm{y}, \mathrm{y}' \in \mathcal{C}$, *se tem* $\mathrm{x} \top \mathrm{y} \equiv \mathrm{x}' \top \mathrm{y}'$ (mod. R) *sempre que* $\mathrm{x} \equiv \mathrm{x}'$ (mod. R), $\mathrm{y} \equiv \mathrm{y}'$ (mod. R), x *é componível com* y *e* x' *é componível com* y'. *Se* R *é compatível com* $\top$, *a correspondência que, a cada par constituído pelas classes de equivalência de elementos* x *e* y *de* $\mathcal{C}$ *tais que* x *é componível com* y, *associa a classe de equivalência de* $\mathrm{x} \top \mathrm{y}$, *é uma lei de composição definida na classe quociente* $\mathcal{C}/\mathrm{R}$ *que se chama* quociente de $\top$ por R *e se designa por* $\top/\mathrm{R}$; *a classe simplesmente algebrizada* $(\mathcal{C}/\mathrm{R}, \top/\mathrm{R})$ *diz-se então* (classe simplesmente algebrizada) quociente *de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* R *e representa-se usualmente por* $\mathcal{C}^{\top}/\mathrm{R}$.

Exercícios: 1. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada e R uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$. R diz-se *compatível à direita* (resp. *à esquerda*) com $\top$ sse, quaisquer que sejam $x, x', y \in \mathcal{C}$ tais que x, x' são componíveis com y (resp. y é componível com x, x'), a relação $x \equiv x'$ (mod. R) implica $x \top y \equiv x' \top y$ (mod. R) (resp. $y \top x \equiv$ $\equiv y \top x'$ (mod. R)). Mostre que se $\top$ está definida *sobre* $\mathcal{C}$, R é compatível com $\top$ sse R é compatível com $\top$ à direita e à esquerda.

2. Com as notações de 1.4, mostre que $\overset{-1}{\top/\mathrm{R}}(\mathcal{C}/\mathrm{R})$ é a imagem de $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ pela aplicação $(x, y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \mapsto (\varphi(x), \varphi(y)) \in \mathcal{C}/\mathrm{R} \times$ $\times \mathcal{C}/\mathrm{R}$, onde φ designa a aplicação canónica de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{C}/\mathrm{R}$.

3. Com as notações de 1.4, mostre que R é compatível com $\top$ sse R é compatível com $\top_{\mathrm{op}}$ e se tem $\top_{\mathrm{op}}/\mathrm{R} = (\top/\mathrm{R})_{\mathrm{op}}$.

1.5. Exercícios: 1. Dada uma classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$ e uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$ compatível com $\top$, mostre que $\Phi = (\mathcal{C}^{\top}, \varphi, \mathcal{C}^{\top}/R)$, onde φ designa a aplicação canónica de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}/R$, é um epihomomorfismo dito *epihomomorfismo canónico* de $\mathcal{C}^{\top}$ sobre $\mathcal{C}^{\top}/R$. Verifique ainda que a passagem ao quociente goza da seguinte propriedade de factorização universal: *Se* $\mathrm{F} = (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{f}, \mathcal{D}^{\perp})$ *é um homomorfismo e* $\mathrm{x} \equiv \mathrm{y}$ (mod. R) *implica* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{y})$, *então existe um e um só homomorfismo* $\overline{\mathrm{F}} = (\mathcal{C}^{\top}/\mathrm{R}, \overline{\mathrm{f}}, \mathcal{D}^{\perp})$ *tal que* $\mathrm{F} = \overline{\mathrm{F}} \circ \Phi$. A relação «$x \equiv y$ (mod. R) implica $f(x) = f(y)$» costuma abreviar-se escrevendo «f (ou F) *é compatível com* R».

2. Mostre que, se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, a relação de equivalência R_f associada a f (que diremos também associada a F e designaremos igualmente por R_F)(5) é compatível com $\top$. Existe então um e um só homomorfismo $\overline{F} = (\mathcal{C}^{\top}/R_F, \overline{f}, \mathcal{D}^{\perp})$ tal que $F = \overline{F} \circ \Phi$, onde Φ designa o epihomomorfismo canónico de $\mathcal{C}^{\top}$ sobre $\mathcal{C}^{\top}/R_F$; $\overline{F}$ é um monohomomorfismo.

3. Mostre que se $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, para toda a classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ e $\mathcal{A} \supset F(\mathcal{C})$), $F|_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^{\top}, f|_{\mathcal{A}}, \mathcal{D}^{\perp})$ (resp. ${}_{\mathcal{A}}|F = (\mathcal{C}^{\top}, {}_{\mathcal{A}}|f, \mathcal{A}^{\perp})$) é um homomorfismo que se chama *restrição* (resp. *correstrição*) de F a $\mathcal{A}$. (Obs.: $f|_{\mathcal{A}}$ designa a aplicação $\mathcal{A} \to \mathcal{D}$ tal que $f|_{\mathcal{A}}(x) = f(x)$ para

(5) Dada uma aplicação f de uma classe X numa classe Y, chama-se *relação de equivalência associada a* f e designa-se por R_f a relação de equivalência em X tal que, quaisquer que sejam $x, y \in X$, $x \equiv y$ (mod. R_f) sse $f(x) = f(y)$.

todo o $x \in \mathcal{A}$, ${}_{\mathcal{A}|}f$ designa a aplicação $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$ tal que ${}_{\mathcal{A}|}f(x) = f(x)$ para todo o $x \in \mathcal{C}$).

4. Seja $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ um homomorfismo. Com as notações de 2 e 3, se $\mathrm{incl}_{f(\mathcal{C}), \mathcal{D}}$ designa a inclusão canónica de $f(\mathcal{C})$, em $\mathcal{D}$, tem-se

$$(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp}) = (f(\mathcal{C})^{\perp}, \mathrm{incl}_{f(\mathcal{C}), \mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\perp}) \circ$$

$$\circ (\mathcal{C}^{\top}/R_f, {}_{f(\mathcal{C})|}\bar{f}, f(\mathcal{C})^{\perp}) \circ \Phi(\mathcal{C}^{\top}, \varphi, \mathcal{C}^{\top}/R_f);$$

os factores do segundo membro, que se diz *decomposição canónica* de $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$, são, respectivamente, um monohomomorfismo, um dihomomorfismo e um epihomomorfismo. Em geral o dihomomorfismo intermédio da decomposição canónica não é um isomorfismo.

1.6. DEFINIÇÕES: 1. Se $\mathcal{C}^{\top}$ é uma classe simplesmente algebrizada e f é uma injecção de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, a correspondência que, a cada par $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ tal que se tenha $x = f(x')$, $y = f(y')$ para algum par (x', y') de elementos componíveis em $\mathcal{C}^{\top}$, associa o elemento de $\mathcal{D}, f(x' \top y')$, é uma lei de composição em $\mathcal{D}$ que se chama *imagem (directa) de* $\top$ *por* f e se designa por $f(\top)$; $\mathcal{D}^{f(\top)}$ diz-se então *(classe simplesmente algebrizada) imagem (directa) de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f. O triplo $F = (\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{f(\top)})$ é um monohomomorfismo e, se f é bijectiva, F é um isomorfismo. A lei de composição $f(\top)$ pode caracterizar-se do seguinte modo: *Se* $\perp$ *é uma lei de composição em* $\mathcal{D}$, $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ *é um homomorfismo sse* $(\mathcal{D}^{f(\top)}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\perp})$ *é um homomorfismo*. Mais geralmente, se f é uma aplicação de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, existe quando muito uma lei de composição $\odot$ em $\mathcal{D}$ tal que, para qualquer lei de composição $\perp$ em $\mathcal{D}$, $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo sse $(\mathcal{D}^{\odot}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo. Se existe $\odot$ satisfazendo esta condição, $\top$ diz-se *(directamente) transportável por* f, $\odot$ designa-se por $f(\top)$ e recebe ainda o nome de *imagem (directa) de* $\top$ *por* f; $\mathcal{D}^{f(\top)}$ chama-se também *(classe simplesmente algebrizada) imagem (directa) de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f.

1'. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada, $\mathcal{D}$ uma classe e f uma injecção de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$. A correpondência que, a cada par $(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ satisfazendo a condição $f(x)$ é componível com $f(y)$ em $\mathcal{C}^{\top}$ e $f(x) \top f(y) \in f(\mathcal{D})$, associa o elemento z de $\mathcal{D}$ tal que $f(z) = f(x) \top f(y)$, é uma lei de composição em $\mathcal{D}$ que se chama *imagem recíproca* ou *inversa de* $\top$ *por* f e se designa por $\overset{-1}{f}(\top)$; $\mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)}$ diz-se *(classe simplesmente algebrizada) imagem recíproca* ou *inversa de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f. O triplo $F = (\mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)}, f, \mathcal{C}^{\top})$ é um monohomomorfismo e, se f é bijectiva, F é um isomorfismo. A lei de composição $\overset{-1}{f}(\top)$ pode caracterizar-se do seguinte modo: *se* $\perp$ *é uma lei de composição em* $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ *é um homomorfismo sse* $(\mathcal{D}^{\perp}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)})$ *é um homomorfismo*. Mais geralmente, se f é uma aplicação de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$, existe quando muito uma lei de composição $\odot$ em $\mathcal{D}$ tal que, para qualquer lei de composição $\perp$ em $\mathcal{D}$, $(\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ é um homomorfismo sse $(\mathcal{D}^{\perp}, \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D}^{\odot})$ é um homomorfismo. Se existe $\odot$ satisfazendo esta condição, $\top$ diz-se *recìprocamente* ou *inversamente transportável por* f, $\odot$ designa-se por $\overset{-1}{f}(\top)$ e recebe ainda o nome de imagem recíproca ou inversa de $\top$ por f; $\mathcal{D}^{\overset{-1}{f}(\top)}$ chama-se também *(classe simplesmente algebrizada) imagem recíproca* ou *inversa de* $\mathcal{C}^{\top}$ *por* f.

1.7. EXERCÍCIOS: 1. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. Se R é uma relação de equivalência em $\mathcal{C}$, mostre que $\top$ é transportável pela aplicação canónica $\varphi: \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathrm{R}$ sse R é compatível com $\top$ e que, nesta hipótese, se tem $\varphi(\top) = \top/\mathrm{R}$. Se f é uma aplicação de $\mathcal{C}$ numa classe $\mathcal{D}$, $\top$ é directamente transportável por f sse

R_f é compatível com $\top$; nesta hipótese, se φ designa a aplicação canónica de $\mathcal{C}$ sobre $\mathcal{C}/R_f$ e $\bar{f}$ é a aplicação $\mathcal{C}/R_f \to \mathcal{D}$ tal que $f=\bar{f}\circ\varphi$, tem-se $f(\top)=\bar{f}(\top/R_f)$ e pode afirmar-se que $(\mathcal{C}^{\top}/R_f, \bar{f}, f(\mathcal{C})^{f(\top)})$ é um isomorfismo.

1'. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. Se $\mathcal{A}$ é uma parte de $\mathcal{C}$, $\top$ é inversamente transportável pela inclusão canónica de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$, $\mathrm{incl}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}$, tendo-se $\overset{-1}{\mathrm{incl}}_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(\top) = \top$. Se f é uma aplicação de uma classe $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$, e $\top$ é inversamente transportável por f, tem-se $\overset{-1}{f}(\top) = {}_{f(\mathcal{D})|}\overset{-1}{f}(\top_{f(\mathcal{D})})$ e, para cada $\mathcal{E}\subset\mathcal{D}$ tal que $f(\mathcal{E})=f(\mathcal{D})$ e $f_{|\mathcal{E}}$ seja injectiva, f define um isomorfismo de $\mathcal{E}^{\overset{-1}{f}(\top)}$ sobre $f(\mathcal{D})^{\top}$. Indique uma condição necessária e suficiente para que $\top$ seja inversamente transportável por f.

2. Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada e f uma aplicação de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}$ em $\mathcal{C}$) tal que $\top$ é directamente (resp. inversamente) transportável por f. Mostre que, se $f\times f$ designa a extensão de f a $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$), i. e. a aplicação $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}\times\mathcal{D}\to\mathcal{C}\times\mathcal{C}$) que associa a (x,y), $(f(x),f(y))$, então

$$\overset{-1}{f(\top)}(\mathcal{D}) = f\times f(\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})) \quad (\text{resp. } \overset{-1}{\overset{-1}{f}(\top)}(\mathcal{D}) = \overset{-1}{f\times f}(\overset{-1}{\top}(f(\mathcal{D}))))\,.$$

$\top_{op}$ é directamente (resp. inversamente) transportável por f e $f(\top_{op})=f(\top)_{op}$ (resp. $\overset{-1}{f}(\top_{op})=\overset{-1}{f}(\top)_{op}$).

3. Com as hipóteses e notações de 2, se g é uma aplicação de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}$ em $\mathcal{D}$) e $f(\top)$ (resp. $\overset{-1}{f}(\top)$) é directamente transportável por g (resp. $\overset{-1}{f}(\top)$ inversamente transportável por g), $\top$ é directamente transportável por $g\circ f$ (resp. inversamente transportável por $f\circ g$) e $(g\circ f)(\top)=g(f(\top))$ (resp. $(\overset{-1}{f\circ g})(\top)=\overset{-1}{g}(\overset{-1}{f}(\top))$. Como aplicação demonstre o *princípio da transitividade* das subclasses e classes quocientes (simplesmente algebrizadas) [6].

Observação: Se $(\mathcal{C}^{\top}, f, \mathcal{D}^{\perp})$ é um homomorfismo, $\top$ é directamente transportável por f mas $\perp$ não é, em geral, inversamente transportável por f; não existe uma dualidade perfeita entre as propriedades das noções directamente transportável e inversamente transportável.

1.8. Definição. *Seja $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i\in I}$ uma família de classes simplesmente algebrizadas e $\mathcal{C}$ o produto $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$. A correspondência que, a cada par $((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I})$ de elementos de $\mathcal{C}$ tal que, para todo o $i\in I$, x_i é componível com y_i em $\mathcal{C}_i^{\top_i}$, associa o elemento de $\mathcal{C}$, $(x_i\top_i y_i)_{i\in I}$, é uma lei de composição $\top$ definida em $\mathcal{C}$ que se chama* produto *da família $(\top_i)_{i\in I}$ e se designa por $\prod_{i\in I}\top_i$; $\mathcal{C}^{\top}$ diz-se então* (classe simplesmente algebrizada) produto *da família $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i\in I}$ e representa-se por $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i^{\top_i}$.*

Exercícios 1. Com as notações de 1.4, mostrar que $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ é a imagem de $\prod_{i\in I}\overset{-1}{\top_i}(\mathcal{C}_i)$ pela bijecção canónica

$$((x_i,y_i))_{i\in I}\mapsto((x_i)_{i\in I},(y_i)_{i\in I})$$

de $\prod_{i\in I}(\mathcal{C}_i\times\mathcal{C}_i)$ sobre $(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i)\times(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i)$.

---

(6) Se $\mathcal{A}^{\top}$ é subclasse (resp. quociente) de $\mathcal{B}^{\perp}$ e $\mathcal{B}^{\perp}$ é subclasse (resp. quociente) de $\mathcal{C}^{\odot}$, $\mathcal{A}^{\top}$ é subclasse (resp. quociente de $\mathcal{C}^{\odot}$).

2. Com as notações de 1.4, tem-se $\mathcal{C}^{\top\text{op}} = \prod_{i \in I} (\mathcal{C}_i^{\top_i \text{op}})$.

1.9. Exercício: Seja $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i \in I}$ uma família de classes simplesmente algebrizadas e $\mathcal{C}^{\top}$ o seu produto. Designando, para cada $J \subset I$, pr_J a J-projecção canónica de $\mathcal{C} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ (7), demonstre as afirmações que seguem:

1. Para cada $J \subset I$, $\mathrm{Pr}_J \equiv (\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{pr}_J, \prod_{j \in J} \mathcal{C}_j^{\top_j})$ é um homomorfismo que se diz *J-projecção canónica* de $\mathcal{C}^{\top}$; se $J = \{j\}$ escrevemos Pr_j em vez de Pr_J e j-projecção canónica em vez de J-projecção canónica, identificando $\prod_{j \in J} \mathcal{C}_j^{\top_j}$ com $\mathcal{C}_j^{\top_j}$ como é usual (sempre que não haja risco de confusão). $\mathcal{C}^{\top}$ goza da seguinte propriedade de factorização universal: *Se $\mathcal{D}^{\perp}$ é uma classe simplesmente algebrizada e, para cada $i \in I$, $F_i = (\mathcal{D}^{\perp}, f_i, \mathcal{C}_i^{\top_i})$ é um homomorfismo, então existe um e um só homomorfismo $F = (\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ tal que, para cada $i \in I$, $F_i = \mathrm{Pr}_i \circ F$*; F designa-se por $\times_{i \in I} F_i$, podendo verificar-se que f é a aplicação $\times_{i \in I} f_i$ tal que $x \longmapsto (f_i(x))_{i \in I}$. Se $\mathcal{D}^{\perp} = \prod_{i \in I} \mathcal{D}_i^{\perp_i}$ e, para cada $i \in I$, $F_i = (\mathcal{D}^{\perp_i}, f_i, \mathcal{C}^{\top_i})$ é um homomorfismo, existe um e um só homomorfismo $F = (\mathcal{D}^{\perp}, f, \mathcal{C}^{\top})$ tal que, para todo $i \in I$, $\mathrm{Pr}_i \circ F = F_i \circ \mathrm{Pr}'_i$ (Pr'_i é a i-projecção de $\mathcal{D}^{\perp}$); F designa-se então por $\prod_{i \in I} F_i$, podendo verificar-se que f é a aplicação $\prod_{i \in I} f_i$ tal que $(x_i)_{i \in I} \longmapsto (f_i(x_i))_{i \in I}$. Sob hipóteses óbvias, podem demonstrar-se relações do tipo: $(\times_{i \in I} F_i) \circ G = \times_{i \in I} F_i \circ G$, $(\prod_{i \in I} F_i) \circ (\prod_{i \in I} G_i) = \prod_{i \in I} F_i \circ G_i$.

2. Se $J \subset I$, $\top$ é transportável por pr_J, tendo-se, em geral, $\prod_{j \in J} \top_j \neq \mathrm{pr}_J(\top)$.

Se, para todo o $i \in I$, $\mathcal{C}_i^{\top_i} = \mathcal{A}^{\perp}$ e $\Delta_{\mathcal{A}}^{I}$ designa a aplicação diagonal de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$ (8), $\perp$ é transportável por $\Delta_{\mathcal{A}}^{I}$ e tem-se $\Delta(\perp) = \top_{\Delta(\mathcal{A})}$; o monohomomorfismo $\mathrm{Incl}_{\mathcal{A}}^{I} = (\mathcal{A}^{\top}, \Delta_{\mathcal{A}}^{I}, \mathcal{C}^{\top})$ chama-se *inclusão canónica* de $\mathcal{A}^{\perp}$ em $\mathcal{C}^{\top} = (\mathcal{A}^{\perp})^{I}$.

3. O produto de classes simplesmente algebrizadas goza da seguinte propriedade de transitividade dita *propriedade associativa*: se $\mathcal{S} = (J_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma partição de I (9) e σ designa a bijecção canónica, induzida por $\mathcal{S}$, de

$$\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i \quad \text{sobre} \quad \prod_{\lambda \in \Lambda} \Big(\prod_{i \in J_\lambda} \mathcal{C}_i\Big) \text{ (10)},$$

$$\Big(\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}, \sigma, \prod_{\lambda \in \Lambda} \Big(\prod_{i \in J_\lambda} \mathcal{C}_i^{\top_i}\Big)\Big)$$

é um isomorfismo que se diz *isomorfismo canónico (induzido por $\mathcal{S}$)*.

Tem também lugar a seguinte *propriedade comutativa*: se $\varkappa$ é uma bijecção $J \to I$ e χ designa a bijecção canónica induzida por $\varkappa$ de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sobre $\prod_{j \in J} \mathcal{C}_{\varkappa(j)}$ (11),

$$\Big(\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}, \chi, \prod_{j \in J} \mathcal{C}_{\varkappa(j)}^{\top_{\varkappa(j)}}\Big)$$

é um isomorfismo que se diz *isomorfismo canónico induzido por $\varkappa$*.

---

(7) Aplicação que associa a cada $(x_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{C}$ $(x_i)_{i \in J}$ em $\prod_{i \in J} \mathcal{C}_j$.

(8) Aplicação que associa a cada x de $\mathcal{A}$ a família de $\mathcal{C}$, $(x)_I \equiv (x_i)_{i \in I}$ tal que $x_i = x$ para todo o $i \in I$.

(9) i. e. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda = I$ e, quaisquer que sejam $\lambda, \mu \in \Lambda$, $J_\lambda \cap J_\mu \neq \emptyset$ sse $\lambda = \mu$.

(10) Tal que $\sigma((x_i)_{i \in I}) = ((x_i)_{i \in J_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$.

(11) Tal que $\chi((x_i)_{i \in I}) = (x_{\varkappa(j)})_{j \in J}$.

4. Se, para cada $i \in I$, R_i é uma relação de equivalência compatível com $\top_i$, designando por R a relação de equivalência $\prod_{i\in I} R_i$ (i. e. a relação de equivalência em $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ tal que $(x_i)_{i\in I}\equiv(y_i)_{i\in I}$ (mod. R) sse $x_i\equiv y_i$ (mod. R_i) para todo o $i\in I$), R é compatível com $\top=\prod_{i\in I}\top_i$ e $(\Pi(\mathcal{C}_i^{\top_i}/R_i),\tau,\mathcal{C}^{\top}/R)$, onde τ representa a bijecção canónica de $\prod_{i\in I}(\mathcal{C}_i/R_i)$ sobre $\mathcal{C}/R$ [12], é um isomorfismo que se diz canónico.

Observação. O leitor familiarizado com a teoria das estruturas de Bourbaki (cf. Bourbaki, Théorie des ensembles, ch. 4) notou, por exemplo, que os produtos e subclasses simplesmente algebrizados são do tipo *estrutura inicial* enquanto o quociente é do tipo *estrutura final*. Numa secção posterior daremos uma noção de estrutura e espécie de estrutura. Do ponto de vista em que nos colocamos, a teoria das estruturas é *posterior* à teoria das classes simplesmente algebrizadas, dependendo lògicamente desta.

A noção de *coproduto (directo)* pode introduzir-se do seguinte modo: se $((\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i\in I}$ é uma família de classes simplesmente algebrizadas e $\mathcal{C}$ designa a reunião disjunta da família $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$, $\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i=\bigcup_{i\in I}\mathcal{C}_i\times\{i\}$, a correspondência $\top$ que, a cada $((x,i),(y,j))\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ tal que $i=j$ e x é componível com y em $\mathcal{C}_i^{\top_i}$, associa $((x\top_i y),i)\in\mathcal{C}$, é uma lei de composição em $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}^{\top}$ é o coproduto da família $((\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i\in I}$ e $\top$ representa-se por $\prod_{i\in I}\top_i$. Tem-se $\overset{-1}{\top}(\mathcal{C})=$ $=\bigcup_{i\in I}\mathrm{incl}_i\times\mathrm{incl}_i(\overset{-1}{\top_i})(\mathcal{C}_i)$ onde, para cada $i\in I$, incl_i designa a injecção canónica $\mathcal{C}_i\to\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ (tal que $x\mapsto(x,i)$).

Deixamos ao cuidado do leitor enunciar e estabelecer as propriedades desta noção que correspondem (por certa dualidade) às propriedades do produto.

2. Neocategorias e Neofuntores. Grafos e Diagramas.

Seja $\mathcal{C}^{\top}$ uma classe simplesmente algebrizada. Um elemento u de $\mathcal{C}$ diz-se *idempotente* (em $\mathcal{C}^{\top}$) sse u é componível com u e $u\top u=u$. $u\in\mathcal{C}$ diz-se uma *identidade* (em $\mathcal{C}^{\top}$ ou de $\mathcal{C}^{\top}$) sse é idempotente e, para todo o $x\in\mathcal{C}$, a relação x é componível com u (resp. u é componível com x) em $\mathcal{C}^{\top}$ implica $x\top u=x$ (resp. $u\top x=x$). Se u e u' são identidades em $\mathcal{C}^{\top}$ e u é componível com u', tem-se naturalmente $u=u\top u'=u'$. Em particular, se $\top$ está definida sobre $\mathcal{C}$, duas identidades quaisquer em $\mathcal{C}^{\top}$ são iguais; uma identidade em $\mathcal{C}^{\top}$ diz-se então um *elemento neutro* em $\mathcal{C}^{\top}$. A subclasse de $\mathcal{C}$ constituida pelas identidades de $\mathcal{C}^{\top}$ designa-se por $\mathcal{C}_0^{\top}$ e considerar-se-á ou não munida da operação induzida por $\mathcal{C}^{\top}$ consoante o contexto (o risco de confusão é naturalmente insignificante para o leitor atento!). Se não houver prejuízo da clareza da exposição, $\mathcal{C}_0^{\top}$ abreviar-se-á para $\mathcal{C}_0$. Tem lugar a seguinte propriedade de associatividade:

2.1. Proposição. *Se* $\mathrm{u},\mathrm{u}'\in\mathcal{C}_0^{\top}$ *e* $\mathrm{x}\in\mathcal{C}^{\top}$, *os seguintes enunciados são equivalentes:* (*i*) $(\mathrm{u}\top\mathrm{x})\top\mathrm{u}'$ *tem sentido,* (*ii*) $\mathrm{u}\top(\mathrm{x}\top\mathrm{u}')$ *tem sentido,* (*iii*) $\mathrm{u}\top\mathrm{x}$ *tem sentido e* $\mathrm{x}\top\mathrm{u}'$ *tem sentido; em qualquer destas situações tem-se* $(\mathrm{u}\top\mathrm{x})\top\mathrm{u}'=\mathrm{x}=\mathrm{u}\top(\mathrm{x}\top\mathrm{u}')$. *Tem-se ainda* $(\mathrm{u}\top\mathcal{C})\top\mathrm{u}'=\mathrm{u}\top(\mathcal{C}\top\mathrm{u}')\equiv\mathrm{u}\top\mathcal{C}\top\mathrm{u}'$.

---

[12] Se $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}(\mathcal{C}_i/R_i)$, $\tau((\mathfrak{A}_i)_{i\in I})$ é a classe de equivalência mod · R de qualquer $(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i$ tal que $x_i\in\mathfrak{A}_i$ para todo o $i\in I$.

DEM. $(i) \Rightarrow (ii)$. Suponhamos que $(u \top x) \top u'$ tem sentido; isto significa, naturalmente, que u é componível com x e $u \top x = x$ é componível com u'. Como $x \top u' = x$ e u é componível com x, $u \top (x \top u')$ tem sentido como pretendíamos.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ e $(iii) \Rightarrow (i)$ ficam ao cuidado do leitor. A relação $(u \top x) \top u' = x = u \top (x \top u')$ é evidente. Resta-nos pois verificar $(u \top \mathcal{C}) \top u' = u \top (\mathcal{C} \top u')$ o que não é difícil se observarmos que a relação «u é componível com y e y é componível com u'» é equivalente a $y \in (u \top \mathcal{C}) \top u'$ e a $y \in u \top (\mathcal{C} \top u')$. ∎

OBSERVAÇÃO. As noções elemento idempotente e identidade numa classe simplesmente algebrizada são autoduais.

$x \in \mathcal{C}$ diz-se *regular à esquerda* (em $\mathcal{C}^{\top}$) sse, quaisquer que sejam $y, z \in \mathcal{C}$, a relação x é componível com y, x é componível com z e $x \top y = x \top z$ implica $y = z$. Dualmente, x dir-se-á *regular à direita* (em $\mathcal{C}^{\top}$) sse, quaisquer que sejam $y, z \in \mathcal{C}$, a relação y é componível com x, z é componível com x e $y \top x = z \top x$ implica $y = z$. Se x é simultâneamente regular à esquerda e regular à direita, x diz-se *regular* (em $\mathcal{C}^{\top}$).

Usaremos também a convenção que consiste em escrever *x é um recíproco de y à esquerda em $\mathcal{C}^{\top}$* ou *y é um recíproco de x à direita em $\mathcal{C}^{\top}$* em vez de $(x, y) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ e $x \top y \in \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$; dado $x \in \mathcal{C}$, se existe $y \in \mathcal{C}$ tal que y é um recíproco de x à esquerda (resp. direita) em $\mathcal{C}^{\top}$, x diz-se uma *unidade esquerda* (resp. *direita*) em $\mathcal{C}^{\top}$. Escreveremos ainda *$\{x, y\}$ é uma reciprocidade em $\mathcal{C}^{\top}$* em vez de (x, y), $(y, x) \in \overset{-1}{\top}(\mathcal{C})$ e $x \top y$, $y \top x \in \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$; dado $x \in \mathcal{C}$, se existe $y \in \mathcal{C}$ tal que $\{x, y\}$ é uma reciprocidade em $\mathcal{C}^{\top}$, x diz-se uma *unidade* em $\mathcal{C}^{\top}$ e y um *recíproco* de x em $\mathcal{C}^{\top}$. A subclasse das unidades em $\mathcal{C}^{\top}$ designa-se por $\mathcal{C}^{\top}_{u}$ e considerar-se-á munida ou não da lei de composição induzida por $\mathcal{C}^{\top}$ consoante o contexto, eventualmente abreviar-se-á para $\mathcal{C}_{u}$. Uma subclasse $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ diz-se *saturada* sse $\mathcal{A} \top \mathcal{C}^{\top}_{u} \subset \mathcal{A}$ e $\mathcal{C}^{\top}_{u} \top \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

Naturalmente, as noções unidade direita e recíproco à esquerda são duais de unidade esquerda e recíproco à direita, respectivamente; unidade e recíproco são noções autoduais. Uma identidade em $\mathcal{C}^{\top}$ é simultâneamente unidade e regular.

Nas classes simplesmente algebrizadas em que a lei de composição satisfaz certas propriedades de associatividade, existem relações estreitas entre alguns dos conceitos que acabamos de introduzir. Estas relações, que o leitor certamente suspeita e serão consideradas na secção **3. Categorias e Funtores**, não são válidas em geral.

EXERCÍCIO. Dada uma classe $\mathcal{C}$ com quatro elementos, mostre que existe uma e uma só classe simplesmente algebrizada $\mathcal{C}^{\top}$, a menos de um isomorfismo, satisfazendo as seguintes condições: (i) $\top$ está definida sobre $\mathcal{C}$, (ii) $\mathcal{C}^{\top} \neq \mathcal{C}^{\top}_{u} \neq \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$ (iii) toda a unidade de $\mathcal{C}^{\top}$ possui mais do que um recíproco, (iv) se $x \in \mathcal{C}$, $x \notin \mathcal{C}^{\top}_{\circ}$, x é regular sse x não é uma unidade. Mostre ainda que existem classes simplesmente algebrizadas $\mathcal{C}^{\top}$ satisfazendo as condições (i) a (iv) e a seguinte condição suplementar: (v) $\mathcal{C}^{\top}$ é comutativa.

Na secção 1 descrevemos vários processos pelos quais se pode deduzir duma classe simplesmente algebrizada ou de uma família de classes simplesmente algebrizadas, outras classes simplesmente algebrizadas; damos seguidamente alguns resultados que indicam como as noções que acabámos de definir se comportam relativamente a esses processos. Omitimos as demonstrações por serem imediatas e não conterem aspectos que valha a pena salientar. O contraste existente entre as várias afirmações contidas em **2**. 2 e **2**. 3 merece porém uma certa reflexão da parte do leitor (e contra-exemplos adequados!).

2. 2. Proposição. *Se* F *é um homomorfismo de* $\mathcal{C}^{\top}$ *em* $\mathcal{D}^{\perp}$ *e* $x \in \mathcal{C}$ *é idempotente em* $\mathcal{C}^{\top}$, $F(x)$ *é idempotente em* $\mathcal{D}^{\perp}$. *Se* F respeita as identidades (i. e. *se a imagem de uma identidade de* $\mathcal{C}^{\top}$ *é uma identidade em* $\mathcal{D}^{\perp}$) *e* x *é uma unidade esquerda* (resp. *direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$, $F(x)$ *é uma unidade esquerda* (resp. *direita, unidade*) *em* $\mathcal{D}^{\top}$.

Exercícios. 1. A condição «*F* respeita as identidades» é suficiente mas, em geral, não é necessária para que a imagem de uma unidade esquerda seja uma unidade esquerda.

2. Demonstre o enunciado que resulta de substituir em **2**. 2 os termos «homomorfismo» por «anti-homomorfismo», «direita» por «esquerda» e «esquerda» por «direita».

2. 3. Proposição. *Sejam* $\mathcal{C}^{\top}$ *uma classe simplesmente algebrizada,* $\mathcal{D}$ *uma classe,* f *uma aplicação de* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{D}$, g *uma aplicação de* $\mathcal{D}$ *em* $\mathcal{C}$ *e, finalmente,* $(\mathcal{C}_i^{\top_i})_{i \in I}$ *uma família de classes simplesmente algebrizadas. Têm lugar as seguintes afirmações:* (i) *se* $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ *e* $x \in \mathcal{D}$ *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$, x *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{D}^{\top}$; (ii) *se* f *é injectiva e* $x \in \mathcal{C}$, x *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$ *sse* $f(x)$ *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{D}^{f(\top)}$; (iii) *se* g *é injectiva,* $x \in \mathcal{D}$ *e* $g(x)$ *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{C}^{\top}$, x *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular*) *em* $\mathcal{D}^{\overset{-1}{g}(\top)}$; (iv) $(x_i)_{i \in I}$ *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}$ *sse, para todo o* $i \in I$, x_i *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}_i^{\top_i}$; (v) $x \in \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i^{\top_i}$ é *idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *sse existe* $i \in I$ *e* $y \in \mathcal{C}_i$ *tal que* x *é imagem de* y *pela inclusão canónica* $\mathcal{C}_i \to \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ *e* y *é idempotente* (resp. *identidade, regular à esquerda, regular à direita, regular, unidade esquerda, unidade direita, unidade*) *em* $\mathcal{C}_i^{\top_i}$.

A razão pela qual não fizemos referência em **2**. 3 à lei quociente de $\top$ por uma relação de equivalência R compatível com $\top$ e $f(\top), g^{-1}(\top)$, no caso de f, g não serem injectivas, é naturalmente a seguinte: para além do facto de a classe de equivalência de um idempotente de $\mathcal{C}^{\top}$ ser um idempotente de $\mathcal{C}^{\top}/R$, da imagem por f de um idempotente ser um idempotente e de x ser idempotente (resp. identidade) todas as vezes que $g(x)$ é idempotente (resp. identidade), nada mais se pode afirmar em geral.

Este facto motiva a seguinte

2. 4. Definição. *Seja* $\mathcal{C}^{\top}$ *uma classe simplesmente algebrizada e* R *uma relação de equivalência em* $\mathcal{C}$. R *diz-se* bicompatível *com* $\top$ *sse* (*i*) R *é compatível com* $\top$ *e* (*ii*) *o epihomomorfismo canónico de* $\mathcal{C}^{\top}$ *sobre* $\mathcal{C}^{\top}/R$ *respeita as identidades.* R *diz-se* especial *para* $\top$ *sse, quaisquer que sejam* $x, x', y, y' \in \mathcal{C}$, *a relação* $x \equiv x' (\mathrm{mod.}\, R), y \equiv y' (\mathrm{mod.}\, R)$ *e* x *é componível com* y *implica* x' *é componível com* y' *e* $x \top y \equiv x' \top y' (\mathrm{mod.}\, R)$. R *é bicompatível* (resp. *especial*) *para* $\top$ *sse é bicompatível* (resp. *especial*) *para* $\top_{op}$.

2.5. PROPOSIÇÃO. *Com as notações de* **2.4**, *se* R *é bicompatível com* $\top$, *a classe de equivalência de um idempotente (resp. unidade esquerda, unidade direita, unidade) em* $\mathcal{C}^{\top}$ *é um idempotente (resp. unidade esquerda, unidade direita, unidade) em* $\mathcal{C}^{\top}/R$. *Se* R *é especial para* $\top$, R *é bicompatível com* $\top$ *e, além disso, se duas identidades de* $\mathcal{C}^{\top}$, u, v *são equivalentes* mod. R, *tem-se* u = v.

DEM. A primeira parte da proposição é consequência imediata de **2.2**. Suponhamos, pois, que R é especial para $\top$ e Φ é o epihomomorfismo canónico de $\mathcal{C}^{\top}$ sobre $\mathcal{C}^{\top}/R$. Se $u \in \mathcal{C}^{\top}_0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^{\top}/R$ e $\Phi(u)$ é componível com $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}^{\top}/R$, existem $x, y \in \mathcal{C}$ tais que $x \equiv u (\mathrm{mod.}\, R)$, $\Phi(y) = \mathcal{A}$ e x é componível com y em $\mathcal{C}^{\top}$. Nestas condições, u é componível com y, tendo-se $\Phi(u) \top/R\, \Phi(y) = \Phi(y) = \Phi(u) \top/R\, \mathcal{A} = \mathcal{A}$ como pretendíamos. Um raciocínio análogo (ou então por dualidade) permitiria estabelecer $\mathcal{A} \top/R\, \Phi(u) = \mathcal{A}$, se $\mathcal{A}$ e $\Phi(u)$ são componíveis. Portanto, $\Phi(u)$ é uma identidade em $\mathcal{C}^{\top}/R$. Em consequência podemos afirmar que Φ respeita as identidades e R é bicompatível com $\top$.

Suponhamos agora que $u, v \in \mathcal{C}^{\top}_0$ e $u \equiv v$ (mod. R); da relação $u \equiv u$ (mod. R) e u componível com u em $\mathcal{C}^{\top}$, resulta logo u componível com v em $\mathcal{C}^{\top}$ e, portanto, $u = v$ como se pretendia. ∎

OBSERVAÇÕES: 1. Deixamos ao cuidado do leitor estabelecer propriedades da operação imagem de $\top$ por uma aplicação f não necessàriamente injectiva, tendo em atenção **2.5** e **1.7**.

2. Evidentemente, se F é um isomorfismo de $\mathcal{C}^{\top}$ sobre $\mathcal{D}^{\perp}$, a imagem por F de um idempotente, identidade, regular à esquerda, etc. ... de $\mathcal{C}^{\top}$ é um idempotente, identidade, regular à esquerda, etc... de $\mathcal{D}^{\perp}$.

O restante desta secção é inteiramente dedicado a alguns tipos de classes simplesmente algebrizadas de enorme importância.

2.6.1. DEFINIÇÃO. *Uma classe simplesmente algebrizada* $\mathcal{C}^{\top}$ *diz-se uma* neocategoria *sse satisfaz os dois axiomas autoduais:*

(N C 1) $\quad \mathcal{C} = \bigcup\limits_{u, v \in \mathcal{C}^{\top}_0} u \top \mathcal{C} \top v$,

(N C 2) Se um dos elementos de $\mathcal{C}$, x, y, z é uma identidade em $\mathcal{C}^{\top}$, $(x \top y) \top z$ tem sentido sse $x \top (y \top z)$ tem sentido.

2.6.2. DEFINIÇÃO. *Se uma classe simplesmente algebrizada* $\mathcal{C}^{\top}$ *satisfaz* (N C 1) *e*

(E D) Se $x, y \in \mathcal{C}^{\top}$ e x é componível com y, então x ou y é uma identidade em $\mathcal{C}^{\top}$,

$\mathcal{C}^{\top}$ *é uma neocategoria (por satisfazer trivialmente* (N C 2)*) e recebe o nome especial de* esquema de diagramas.

Seja $\mathcal{C}^{\top}$ *uma neocategoria e* $\top_{esq}$ *a lei de composição definida em* $\mathcal{C}$ *tal que* x *é componível com* y *em* $\mathcal{C}^{\top_{esq}}$ *sse* (x, y) *satisfaz as condições:*

(i) x é componível com y em $\mathcal{C}^{\top}$,

(ii) $x \in \mathcal{C}^{\top}_0$ ou $y \in \mathcal{C}^{\top}_0$,

(iii) $x \top_{esq} y = x \top y$.

$\mathcal{C}^{\top_{esq}}$ *é um esquema de diagramas dito* esquema de diagramas subjacente a $\mathcal{C}^{\top}$ *e designa-se por* $\mathcal{C}^{\top}_{esq}$, *tendo-se* $(\mathcal{C}^{\top}_{esq})_0 = \mathcal{C}^{\top}_0$.

2.6.3. Definição. *Um homomorfismo de uma neocategoria $\mathcal{C}_\top$ para uma neocategoria $\mathcal{D}^\top$ diz-se um* neofuntor *sse respeita as identidades. Se um monohomomorfismo (resp. epihomomorfismo, dihomomorfismo)* F *é um neofuntor,* F *diz-se um* mononeofuntor (*resp.* epineofuntor, dineofuntor). *A classe simplesmente algebrizada dual de uma neocategoria é uma neocategoria e um antihomomorfismo* F *de uma neocategoria $\mathcal{C}^\top$ para uma neocategoria $\mathcal{D}^\perp$ diz-se um* antineofuntor *ou* neofuntor contravariante *sse* F *respeita as identidades. Um neofuntor de um esquema de diagramas para uma neocategoria diz-se um* diagrama.

Observações. **1.** A expressão *neofuntor covariante* que por vezes se encontra na literatura é sinónima de neofuntor.

2. A terminologia antimononeofuntor, anti-epineofuntor, antidineofuntor, cujo significado é óbvio, é pouco usada sendo preferível dizer mononeofuntor contravariante, epineofuntor contravariante e dineofuntor contravariante, respectivamente.

3. Todo o isomorfismo (resp. anti-isomorfismo) F de classes simplesmente algebrizadas respeita as identidades. Se estas classes são neocategorias, F e F^{-1} são automàticamente neofuntores (resp. antineofuntores), não sendo costume usar as designações isoneofuntor (resp. anti-isoneofuntor).

2.7. Exercícios: 1. Se $\mathcal{C}^\top$ é uma neocategoria, $I_{esq} = (\mathcal{C}^\top_{esq}, \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}^\top)$ é um dineofuntor que se chama *inclusão canónica* de $\mathcal{C}^\top_{esq}$ em $\mathcal{C}^\top$.

2. Se $\mathcal{C}^\top$ é uma neocategoria, $\mathrm{Incl}_{\mathcal{C}^\top_\circ, \mathcal{C}^\top}$ e $\mathrm{Incl}_{\mathcal{C}^\top_\circ, \mathcal{C}^\top_{esq}}$ são mononeofuntores.

Se $\mathcal{C}^\top$ é uma neocategoria, tem lugar a seguinte propriedade de associatividade cuja demonstração, banalíssima, fica ao cuidado do leitor:

2.8. Proposição: *Se* x *ou* z *é identidade numa neocategoria $\mathcal{C}^\top$ e $y \in \mathcal{C}$, os três enunciados são equivalentes:* (i) $(x \top y) \top z$ *tem sentido,* (ii) $x \top (y \top z)$ *tem sentido,* (iii) x *é componível com* y *e* y *é componível com* z. *Se* y, *é uma identidade,* (i), (ii) *são equivalentes, implicam* (iii).

2.9. Exercício: Seja $\mathcal{C}^\top$ uma neocategoria; mostre que as condições (C) e (A) que passamos a enunciar são equivalentes. Condição (C). *Se um dos elementos* x, y, z *de* $\mathcal{C}$ *é uma identidade, os três enunciados seguintes são equivalentes:* (*i*) $(x \top y) \top z$ *tem sentido,* (*ii*) $x \top (y \top z)$ *tem sentido,* (*iii*) x *é componível com* y *e* y *é componível com* z [em qualquer das situações (*i*), (*ii*) ou (*iii*) tem-se necessàriamente $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$]. Condição (A), *se* $x, y, z \in G$, *os três enunciados seguintes são equivalentes:* (*i*) $(x \top y) \top z$ *tem sentido,* (*ii*) $x \top (y \top z)$ *tem sentido,* (*iii*) x *é componível com* y *e* y *é componível com* z. (Nota: uma neocategoria tal que satisfaz (A) ou (C) e, em qualquer das situações (*i*), (*ii*) ou (*iii*), de (A), se tem $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$, é uma categoria, cf. secção **3**).

O teorema **2.10.1.** é um resultado fundamental e mostra que uma neocategoria é uma classe simplesmente algebrizada com um sistema completo e coerente de identidades (ver Fig. 1 que segue o Teorema).

2.10.1. Teorema: *Seja $\mathcal{C}^\top$ uma neocategoria. Se* u, v, u', v' *são identidades e* $(u, v) \neq (u', v')$, $u \top \mathcal{C} \top v \cap u' \top \mathcal{C} \top v' = \emptyset$. *Para cada* $x \in \mathcal{C}$, *existe então um e um só par* (u, v) *de identidades tal que* $x \in u \top \mathcal{C} \top v$; u *designa-se por* $\alpha_{\mathcal{C}^\top}(x)$ *e chama-se* origem *de* x, v *designa-se por* $\omega_{\mathcal{C}^\top}(x)$ *e chama-se* alvo *de* x. *As aplicações* $x \mapsto \alpha_{\mathcal{C}^\top}(x)$, $x \mapsto \omega_{\mathcal{C}^\top}(x)$ *de* $\mathcal{C}$ *em* $\mathcal{C}^\top_\circ$, *que designamos por*

$\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}, \omega_{\mathcal{C}^{\top}}$ *respectivamente, são duas retracções de* $\mathcal{C}$ *sobre* $\mathcal{C}^{\top}_{0}$ *chamadas* retracções [12] canónicas *associadas a* $\mathcal{C}^{\top}$, *verificam naturalmente a relação:*

$$\alpha_{\mathcal{C}^{\top}} \circ \omega_{\mathcal{C}^{\top}} = \omega_{\mathcal{C}^{\top}}, \quad \omega_{\mathcal{C}^{\top}} \circ \alpha_{\mathcal{C}^{\top}} = \alpha_{\mathcal{C}^{\top}}$$

e gozam da propriedade.

(R C 1) *Se* x *é componível com* y *em* $\mathcal{C}^{\top}$, *então* $\omega_{\mathcal{C}^{\top}}(\mathrm{x}) = \alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(\mathrm{y})$ *e*

$$\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(\mathrm{x} \top \mathrm{y}) = \alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(\mathrm{x}),$$
$$\omega_{\mathcal{C}^{\top}}(\mathrm{x} \top \mathrm{y}) = \omega_{\mathcal{C}^{\top}}(\mathrm{y}).$$

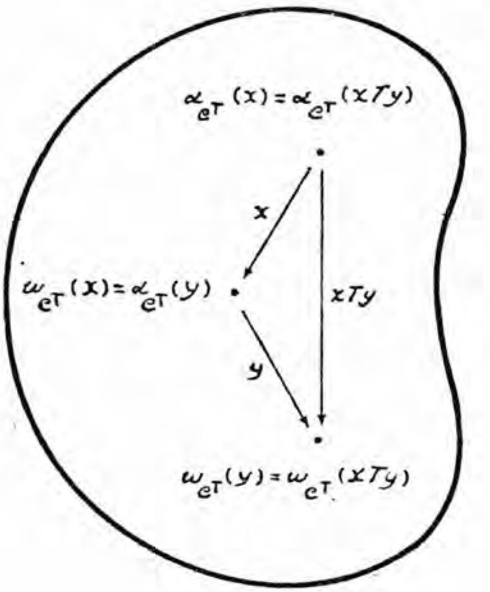

Fig. 1

Se $(\mathcal{C}^{\top}, \mathrm{f}, \mathcal{D}^{\perp})$ *é um neofuntor, tem-se*

(R C 2) $\alpha_{\mathcal{D}^{\perp}} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f} \circ \alpha_{\mathcal{C}^{\top}}$ *e* $\omega_{\mathcal{D}^{\perp}} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f} \circ \omega_{\mathcal{C}^{\top}}$.

Dem. Sejam u, v, u', v' como no enunciado. Se $u \top \mathcal{C} \top v \cap u' \top \mathcal{C} \top v' \neq \emptyset$, existe $x \in \mathcal{C}$ tal que u, u' são componíveis com x e x é componível com v, v'. Nestas condições, como $u \top (u' \top x)$ e $(x \top v) \top v'$ têm sentido, $u \top u'$ e $v \top v'$ têm sentido, tendo-se $u = u'$ e $v = v'$. Isto demonstra a primeira parte do teorema. Deixamos (R C 1) ao cuidado do leitor e vamos estabelecer (R C 2). Com as notações do enunciado, suponhamos $x \in \mathcal{C}$. $\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x) \in \mathcal{C}^{\top}_{0}$ e, portanto, como f respeita a as identidades, $f(\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x)) \in \mathcal{D}^{\perp}_{0}$, tendo-se também $f(x) = f(\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x) \top x) = f(\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x)) \top f(x)$. Segue-se que $\alpha_{\mathcal{D}^{\perp}}(f(x)) \top (f(\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x)) \top f(x))$ tem sentido; logo $\alpha_{\mathcal{D}^{\perp}}(f(x)) = f(\alpha_{\mathcal{C}^{\top}}(x))$ e $\alpha_{\mathcal{D}^{\perp}} \circ f = f \circ \alpha_{\mathcal{C}^{\top}}$. A relação $\omega_{\mathcal{D}^{\perp}} \circ f = f \circ \omega_{\mathcal{C}^{\top}}$ resulta imediatamente, por dualidade, da que acabámos de demonstrar. ▮

(Continua)

[12] Uma retracção duma classe $\mathcal{X}$ sobre uma subclasse $\mathcal{Y}$ é uma aplicação f de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$ tal que $f|_{\mathcal{Y}} = \mathrm{id}_{\mathcal{Y}}$.