Uma fórmula de recorrência para o cálculo dos coeficientes dos polinómios $He_n(x)$

por Rui João Baptista Soares

Um sistema de polinómios $P_n(x)$ de grau n diz-se *ortogonal* no intervalo $[a,b]$ relativamente à função peso $w(x)$ se

$$1) \quad \int_a^b w(x)\cdot P_m(x)\cdot P_n(x)\,dx=0$$

$$m\neq n\,;\ m,n=0,1,2,\cdots.$$

Estes polinómios cujo desenvolvimento explícito é

$$2) \qquad P_n(x)=a_n\sum_{m=0}^{N} b_m f_m(x)$$

verificam as seguintes relações importantes:

$$3) \quad f_2(x)\cdot P''_n(x)+f_1(x)\cdot P'_n(x)+c_n P_n(x)=0$$

$$4) \quad f_2(x)\cdot P'_n(x)=f_1(x)\cdot P_n(x)+f_0(x)\cdot P_{n-1}(x)$$

$$5) \quad P_n(x)=\frac{1}{a_n\cdot w(x)}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\{w(x)\cdot[f(x)]^n\}$$

(Fórmula de RODRIGUES)

$$6) \quad a_1 P_{n+1}(x)=(a_2+a_3 x)\cdot P_n(x)-$$

$$-a_4\cdot P_{n-1}(x)$$

em que $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são independentes de n; c_n é uma constante que depende ùnicamente de n.

Se na expressão 2) fizermos

$$a_n=n\,!$$

$$N=\left[\frac{n}{2}\right] \quad \text{(maior inteiro contido em } n\text{)}$$

$$b_m=\frac{(-1)^m}{m\,!\,2^m(n-2m)\,!}$$

$$f_m(x)=x^{n-2m}$$

obtemos um sistema de polinómios designado por polinómios de HERMITE, cuja expressão será

$$7) \quad He_n(x)=n\,!\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^m}{m\,!\,2^m\cdot(n-2m)!}\cdot x^{n-2m}.$$

Os primeiros dez polinómios de HERMITE são os seguintes

$$He_0(x)=1$$

$$He_1(x)=x$$

$$He_2(x)=x^2-1$$

$$He_3(x)=x^3-3x$$

$$He_4(x)=x^4-6x^2+3$$

$$8) \quad He_5(x)=x^5-10x^3+15x$$

$$He_6(x) = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15$$

$$He_7(x) = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x$$

$$He_8(x) = x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105$$

$$He_9(x) = x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + \\ + 945x$$

$$He_{10}(x) = x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - \\ - 3150x^4 + 4725x^2 - 945\,.$$

Os polinómios $He_n(x)$ verificam a equação diferencial 3) com $f_2(x) = 1$, $f_1(x) = -x$, $c_n = n$; pondo $y = He_n(x)$ vem

9) $$y'' - x\,y' + n\,y = 0\,.$$

Fazendo em 4) $f_2(x) = 1$, $f_1(x) = 0$, $f_0(x) = n$ resulta

10) $$H'e_n(x) = n\,He_{n-1}(x)\,.$$

Uma fórmula de recorrência para o cálculo do valor do polinómio $He_{n+1}(x)$ pode obter-se de 6) com $a_1 = a_3 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_4 = n$ donde

11) $$He_{n+1}(x) = x \cdot He_n(x) - n\,He_{n-1}(x)\,.$$

Os polinómios $He_n(x)$ são ortogonais em $]-\infty\,;+\infty[$ relativamente à função peso $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Introduzindo em 5) a função $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ e pondo $a_n = (-1)^n$, $f(x) = 1$ obtem-se

12) $$He_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

expressão algumas vezes utilizada para definição dos polinómios $He_n(x)$.

Seja

13) $$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a distribuição de GAUSS normalizada. Designando por $G^{(n)}(x)$ a derivada de ordem n da função $G(x)$ tem-se

14) $$He_n(x) = (-1)^n \frac{G^{(n)}(x)}{G(x)}$$

relação que pode ser aproveitada para tabelar $G^{(n)}(x)$ uma vez conhecidos os valores de $G(x)$ e $He_n(x)$.

Para valores de n suficientemente grandes torna-se impraticável o cálculo dos coeficientes que figuram em 7), pelo que se sugere a fórmula de recorrência

15) $$\begin{cases} c_{n,0} = 1 \quad n = 0,1,2,\cdots \\ c_{n+1,k+1} = c_{n,k+1} - (n-2k)\cdot c_{n,k} \\ \qquad\qquad k = 0,1,\cdots,\left[\dfrac{n}{2}\right] \\ c_{n,k} = 0 \quad k > \left[\dfrac{n}{2}\right]. \end{cases}$$

Com efeito, sendo $c_{n+1,k+1}$ o coeficiente de ordem $(k+1)$ do polinómio de grau $(n+1)$, temos sucessivamente

$$c_{n+1,k+1} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,2^{k+1}\cdot[n+1-2(k+1)]!} =$$

$$= (-1)^{k+1}[(n-2k-1) + 2(k+1)]\cdot$$

$$\cdot \frac{n!}{(k+1)!\,2^{k+1}\cdot(n-2k-1)!} =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k+1)!\,2^{k+1}[n-2(k+1)]!} -$$

$$- (-1)^k \frac{(n-2k)\,n!}{k!\,2^k\cdot(n-2k)!} =$$

$$= c_{n,k+1} - (n-2k)\cdot c_{n,k}\,.$$

OBS. 1. O valor $(n-2k)$ é o expoente do monómio cujo coeficiente é $c_{n,k}$.

OBS. 2. As fórmulas de recorrência indicadas em (15) são de fácil adaptação ao cálculo automático tendo sido feita a determinação dos coeficientes dos primeiros vinte polinómios com o auxílio do programa apresentado.

OBS. 3. Verificada a rapidez de crescimento dos coeficientes é aconselhável, para a obtenção dos valores exactos, que se trabalhe em dupla precisão quando o seu cálculo se fizer com o auxílio de um computador.

OBS. 4. A sub-rotina HERMRS apresentada tem a possibilidade de determinar os coeficientes por linhas $(LH=1)$ ou por colunas $(LH=2)$ sendo este método mais rápido.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGNEW, RALPH PALMER. *Differential equations* — 1960 — 2.ª edição — McGraw-Hill Book Company, Inc. New York.

[2] ANGOT, ANDRÉ. *Compléments de Mathématiques* — 1972 — 6.ª edição — Collection Thechnique et Scientifique du C. N. E. T. Paris.

```
      J2 = 1
      DO5I = 2, J1
      J2 = J2 + 2
      DO5J = J2, N
      I1 = J - J2 + 1
      IRS(J, I) = - I1 * IRS(J - 1, I - 1) + IRS(J
    5 CONTINUE
      RETURN
      END
```

1.					
1.					
1.	−1.				
1.	−3.				
1.	−6.	3.			
1.	−10.	15.			
1.	−15.	45.	−15.		
1.	−21.	105.	−105.		
1.	−28.	210.	−420.	105.	
1.	−36.	378.	−1260.	945.	
1.	−45.	630.	−3150.	4725.	−945.
1.	−55.	990.	−6930.	17325.	−10395.
1.	−66.	1485.	−13860.	51975.	−62370.
1.	−78.	2145.	−25740.	135135.	−270270.
1.	−91.	3003.	−45045.	315315.	−945945.
1.	−105.	4095.	−75075.	675675.	−2837835.
1.	−120.	5460.	−120120.	1351350.	−7567560.
1.	−136.	7140.	−185640.	2552550.	−18378360.
1.	−153.	9180.	−278460.	4594590.	−41351310.
1.	−171.	11628.	−406980.	7936110.	−87297210.
1.	−190.	14535.	−581400.	13226850.	−174594420.

$-1,\mathrm{I})$

10395.			
135135.			
945945.	−135135.		
4729725.	−2027025.		
18918900.	−16216200.	2027025.	
64324260.	−91891800.	34459425.	
192972780.	−413513100.	310134825.	−34459425.
523783260.	−1571349780.	1964187225.	−654729075.
1309458150.	−5237832600.	9820936125.	−6547290750.

```
C     CALCULO DOS COEFICIENTES DOS POLINOMIOS DE HERMITE
      DOUBLE PRECISION IRS (21,11)
      DIMENSION CPH(21,11)
      COMMON/CO1/IRS
      READ(1,100)N,LH
  100 FORMAT(I3,I2)
      CALL HERMRS(N,LH)
      DO2I = 1,N
      J1 = (I - 1)/2 + 1
      DO1J = 1,J1
      CPH(I,J) = IRS(I,J)
    1 CONTINUE
      WRITE(3,200)(CPH(I,J),J = 1,J1)
    2 CONTINUE
  200 FORMAT(1H ,F3.0,F8.0,F9.0,F11.0,F12.0,F14.0,2(F14.0,F15.0),F13.0)
      STOP
      END

      SUBROUTINE HERMRS(N,LH)
      DOUBLE PRECISION I1,IRS(21,21)
      COMMON/CO1/IRS
      J1 = (N - 1)/2 + 1
      DO1I = 1,N
      DO1J = 1,J1
      IRS(I,J) = 0.
    1 CONTINUE
      IF(LH.EQ.2)GOTO3
      IRS(1,1) = 1.
      DO2I = 2,N
      IRS(I,1) = IRS(I - 1,1)
      J1 = (I + 1)/2
      I1 = I
      DO2J = 2,J1
      I1 = I1 - 2.
      IRS(I,J) = - I1 * IRS(I - 1,J - 1) + IRS(I - 1,J)
    2 CONTINUE
      RETURN
    3 CONTINUE
      DO4I = 1,N
      IRS(I,1) = 1.
    4 CONTINUE
      J2 = 1
      DO5I = 2,J1
      J2 = J2 + 2
      DO5J = J2,N
      I1 = J - J2 + 1
      IRS(J,I) = - I1 * IRS(J - 1,I - 1) + IRS(J - 1,I)
    5 CONTINUE
      RETURN
      END
```