Uma introdução à Teoria das Distribuições

por Fernando Sequeira
Lisboa

1. Introdução

O progresso dos diferentes ramos da ciência tem exigido a criação constante de novas entidades matemáticas que, por sua vez, vão originar ulteriores desenvolvimentos da ciência. As distribuições são um exemplo desta dialéctica: a física e a electrotecnia definiram certas propriedades que as distribuições deviam verificar, que serviram depois, de base à respectiva axiomática. Uma vez criada, ela origina novas investigações, novas análises naqueles e outros ramos da Ciência.

As entidades matemáticas satisfazem pois a certas propriedades definidas à priori pelos fenómenos a estudar, e o seu valor mede-se pela capacidade que confere para analisar ou representar mais exactamente a realidade.

À criação destas entidades, corresponde em geral uma abstracção crescente, o que não significa de modo algum uma descripção menos objectiva dos fenómenos. Em geral sucede até que a descripção é muito mais realista, e as distribuições são um exemplo flagrante desse realismo.

Com elas torna-se possível representar alguns conceitos de física e de electricidade, como por exemplo, o de partícula material, carga pontual, distribuição de carga em superfície e em dupla-camada, o impulso unitário dos electrotécnicos, etc. E foi possível ainda justificar e definir as condições em que são válidas muitas das operações e cálculos efectuados até agora de uma forma heurística. O cálculo simbólico usado pelos electrotécnicos fica justificado e adquire uma simplicidade que não tinha com as funções.

A noção de distribuição é na realidade uma generalização do conceito de função, e foi a insuficiência deste para descrever alguns fenómenos que originou o aparecimento das distribuições. Os conceitos de matemática são muitas vezes generalizações de conceitos anteriores, generalizações essas que visam objectivos definidos. Assim sucedeu com a passagem dos números inteiros aos racionais, e destes aos reais: resolveu-se o problema da medida. E asim sucede agora com as distribuições.

As entidades que se generalizam, são em geral elementos de um conjunto, munido de certas estructuras, de certas propriedades: e é exactamente este conjunto com a sua estructura que se amplia; cria-se um sobreconjunto do primeiro, conservando as suas principais propriedades, mas por forma a obter-se o objectivo desejado.

Partindo-se pois do conjunto das funções complexas, definidas e contínuas sobre um conjunto aberto do $\mathbf{R}^n$, passa-se ao das distribuições definidas sobre o mesmo conjunto, conservando-se a estructura de um espaço vectorial complexo. E esta ampliação é feita de modo a tornar sempre possível a derivação.

É desta ampliação que trataremos no parágrafo seguinte. No entanto, limitar-nos-emos a tratar o caso das distribuições de ordem finita definidas sobre a recta. Mais concretamente, no presente artigo tentaremos dar uma pequena contribuição à divulgação a nível elementar de teoria das distribuições. Faremos uso da axiomática introduzida por J. Sebastião e Silva, que julgamos ser a mais intuitiva e talvez a de mais fácil aplicação.

2. Distribuições de ordem finita

Seja $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ o espaço vectorial complexo formado pelo conjunto das funções complexas, definidas e contínuas sobre $\mathbf{R}$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalares, e $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ o seu sub-espaço constituído pelas funções continuamente deriváveis.

Partindo de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ e conservando a sua estructura vectorial, é possível criar um seu sobre-espaço mínimo, onde a derivação é sempre possível, um operador linear e um prolongamento da derivada definida em $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$. Por outras palavras, *as distribuições são elementos de um espaço vectorial complexo E que verifica a seguinte propriedade:*

I. *Existem duas aplicações lineares*

$$\Phi : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to E \quad e \quad D : E \to E$$

tais que:

i) Φ *é injectiva* (assegura que E é um sobre-espaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$);

ii) *Se* $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, *então* $\Phi(f') = D\,\Phi(f)$ (garante que a derivada D em E é um prolongamento da derivada em $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$);

iii) *Todo o* $\varphi \in E$ *pode exprimir-se na forma* $\varphi = D^n\,\Phi(f)$ *onde* n *é um inteiro não negativo e* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ (E será então o menor sobre-espaço de $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ onde a derivação é sempre possível);

iv) *Se* $D\varphi = 0$, *então* $\varphi = \Phi$ (constante) (esta condição é decisiva para a construção da teoria).

Antes de procedermos à demonstração da existência e da unicidade (a menos de um isomorfismo) de um espaço E verificando I, vamos demonstrar algumas propriedades relativas à derivação em E, supondo que E existe.

Seja $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ e $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ uma sua primitiva. Em virtude de $g'(x) = f(x)$ para todo o real x, e de *ii)* vem

$$D\,\Phi(g) = \Phi(f)$$

e portanto, designando por J o operador primitivação considerado,

$$D^p\,\Phi(J^p f) = \Phi(f)$$

quaisquer que sejam o natural p e a função contínua f, o que assegura o seguinte resultado:

II. *Dado* $\varphi = D^n\,\Phi(f)$, *com* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *e* n *inteiro não negativo, tem-se*

$$D^{n+m}\,\Phi(J^m f) = D^n\,\Phi(f)$$

qualquer que seja o inteiro natural m.

Dadas duas distribuições $D^n\,\Phi(f)$ e $D^m\,\Phi(g)$ é pois sempre possível reduzi-las a derivadas da mesma ordem de imagens dadas por Φ de funções contínuas: $D^n\,\Phi(f) = D^{n+m}\,\Phi(J^m f)$ e $D^m\,\Phi(g) = D^{n+m}\,\Phi(J^n g)$.

Tomando em consideração a propriedade *iv)* e a linearidade de D e de Φ, por indução pode demonstrar-se ainda que:

III. *A derivada de ordem* n (inteiro natural) *de uma distribuição é nula se e só se ela é a imagem dada por* Φ *de um polinómio de grau inferior a* n.

Por sua vez, tendo presente a propriedade II, dadas duas distribuições $\varphi = D^n\,\Phi(f)$ e $\psi = D^m\,\psi(g)$ com $f, g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, vem que

$$(1) \qquad \varphi + \psi = D^{n+m}\,\Phi(J^m f + J^n g)$$

e

$$(2) \qquad \lambda \cdot \varphi = D^n\,\Phi(\lambda f)$$

qualquer que seja $\lambda \in \mathbf{C}$.

Finalmente, da relação 1) e de III infere-se que:

IV. $D^n \Phi(f) = D^m \Phi(g)$ *se e só se* $J^m f - J^n g$ *é um polinómio de grau inferior a* $n+m$.

As propriedades II, III e IV, bem como as relações 1) e 2), são pois consequências de I. Tendo presentes estes resultados demonstra-se então que:

Se E_1 *e* E_2 *são dois espaços vectoriais complexos que, associados às aplicações lineares respectivamente* D_1, Φ_1, *e* D_2, Φ_2, *verificam* I, *então a aplicação* $\theta : E_1 \to E_2$, *que a cada elemento* $D_1^n \Phi_1(f)$ *de* E_1 *faz corresponder o elemento* $D_2^n \Phi_2(f)$ *de* E_2, *é um isomorfismo que verifica a igualdade* $\theta(D_1 \varphi) = D_2(\theta \varphi)$ *qualquer que seja* $\varphi \in E_1$.

Isto é, se existe um espaço E que verifica I, a menos de um isomorfismo ele é único. Para demonstrar a sua existência, consideremos agora o conjunto $\mathcal{C}^*(\mathbf{R})$ dos elementos da forma $D^n f$ com n inteiro não negativo e $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$. Sobre este conjunto consideremos ainda a relação de equivalência definida do seguinte modo: *dados dois elementos* $D^n f$ *e* $D^m g$, *eles dizem-se equivalentes se e só se* $J^m f - J^n g$ *é um polinómio de grau inferior a* $n+m$.

Sobre o conjunto das classes de equivalência assim obtidas, o qual passaremos a designar por $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, é possível definir uma estructura de espaço vectorial complexo introduzindo as operações de adição e de multiplicação por escalares seguintes:

a) Dados dois elementos $[D^n f]$ e $[D^m g]$ de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, denomina-se soma $[D^n f] + [D^m g]$ o elemento dado por

(3) $$[D^n f] + [D^m g] = [D^{n+m}(J^m f + J^n g)]$$

b) Denomina-se produto $\lambda \cdot [D^n f]$ do complexo λ por $[D^n f]$ o elemento dado por

(4) $$\lambda \cdot [D^n f] = [D^n(\lambda f)]$$

Nestas expressões usou-se a notação $[\cdot]$ para designar a classe dos elementos equivalentes ao de $\mathcal{C}^*(\mathbf{R})$ que figura dentro do parêntesis. Esta notação será utilizada no decurso do trabalho, bem como a de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ para designar o espaço vectorial destas classes.

Em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ consideremos então as aplicações $D : \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ e $\Phi : \mathcal{C}(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ definidas pelas relações

(5) $$D[D^n f] = [D^{n+1} f]$$

e

(6) $$\Phi(f) = [D^0 f].$$

Elas são lineares, e Φ é injectiva; além disso, se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ tem-se

$$\Phi(f') = [D^0 f'] = [Df] = D\,\Phi(f)$$

ou ainda

$$\Phi(f^{(n)}) = D^n \Phi(f)$$

se f admite derivada $f^{(n)} \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ de ordem n.

Por sua vez, quaisquer que sejam o inteiro natural n e a função contínua f, tem-se que

$$[D^n f] = D^n \Phi(f)$$

(que se demonstra por indução), e se

$$D[D^n f] = [0] \quad \text{vem} \quad [D^{n+1} f] = [0],$$

sendo portanto f um polinómio de grau inferior a $n+1$, o que significa

$$[D^n f] = D^n \Phi(f) = \Phi(f^{(n)}) = \Phi \quad \text{(constante)}$$

Fica assim provado que $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ associado às aplicações lineares definidas em 5) e 6) verifica a propriedade I, e portanto a existência de um espaço que verifica I.

Se identificarmos $\Phi(f)$ com f para todo o $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, o que é legítimo devido à injectividade de Φ, adquire pois sentido dizer-se que uma distribuição é realmente uma derivada de ordem finita de uma função contínua.

A título de exemplo, consideremos a função $g(x)$ definida por

$$g(x)=\begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x<0 . \end{cases}$$

Ela admite derivada (no sentido usual) em todos os pontos $x \neq 0$; a sua derivada é a função de Heaviside $h(x)$, nula à esquerda da origem e igual a 1 à direita. Esta derivada é uma verdadeira função, não estando no entanto definida na origem.

Reconhece-se também que $h(x)$ admite derivada em todos os pontos $x \neq 0$. A sua função derivada seria portanto nula e definida no complementar da origem. No entanto é costume dizer-se que a derivada de $h(x)$ é a função $\delta(x)$ nula no complementar de origem e infinita para $x=0$, de tal sorte que $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx=1$ qualquer que seja o real $\varepsilon>0$.

Embora se prove que esta função $\delta(x)$, que alguns chamam «função impulso unitária» e outros «função δ de Dirac», não pode existir, a admissão da sua existência tem sido de grande utilidade. A derivada de $h(x)$ era suposta existir num sentido que não estava definido.

Com a teoria das distribuições estas derivadas de $g(x)$ adquirem um sentido claro, podendo-se escrever

$$h(x)=D\,g(x)$$

e

$$\delta(x)=D^2\,g(x)$$

A função de Heaviside e a de Dirac são pois distribuições definidas sobre a recta, e como veremos mais adiante, $\delta(x)$ verifica efectivamente a igualdade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx=1$$

Anàlogamente se pode definir a função $g(x-\alpha)$

$$g(x-\alpha)=\begin{cases} x-\alpha & \text{se } x \geq \alpha \\ 0 & \text{se } x<\alpha \end{cases}$$

com α real, e as suas derivadas

$$h(x-\alpha)=D\,g(x-\alpha)$$

e

$$\delta(x-\alpha)=D^2\,g(x-\alpha)$$

que se dizem translatadas de respectivamente $g(x), h(x)$ e $\delta(x)$.

Exercícios propostos

1. Demonstre por indução a propriedade III.

2. Sendo θ e φ dois elementos de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, verifique que $D\theta=D\varphi$ implica $\theta=\varphi+$ + constante.

3. Determine as soluções $\theta \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ da equação

$$D^n\,\theta=0 \quad (n:\ \text{natural}).$$

4. Determine uma primitiva de

$$\left[D^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right].$$

5. Designando por $\tau_\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$, o operador translacção que a todo o $f(\hat{x}) \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ faz corresponder a sua translatada $f(\hat{x}-\alpha)$, verifique que $\tilde{\tau}_\alpha$ definido por

$$\tilde{\tau}_\alpha[D^n f]=[D^n(\tau_\alpha f)] \quad \forall f \in G(\mathbf{R}) \text{ e } n \in \mathbf{N}$$

é um automorfismo de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

Prove ainda que

$$\tilde{\tau}(D\,\varphi)=D(\tilde{\tau}\,\varphi)$$

qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$.

6. Construa uma teoria axiomática do espaço vectorial complexo $\mathcal{C}_\omega(I)$, das distribuições escalares de ordem finita, definidas sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}$. Prove que estas distribuições se podem apresentar como derivadas generalizadas de funções contínuas sobre I.

7. Designando por $\mathcal{C}_\omega(I)$ o espaço das distribuições de ordem finita definidas sobre um intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}_\omega$, (vidé problema 6) considere as aplicações ρ_I que a cada $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ faz corresponder a sua restricção a I, e $\tilde{\rho}_I : \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R}) \to \mathcal{C}_\omega(I)$ definida pela relação $\tilde{\rho}_I[D^n f] = [D^n(\rho_I f)]$, para todo o $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ e todo o $n \in \mathbf{N}$ ($\mathbf{N}$: conjunto dos números naturais).

Posto isto, prove que:

a) $\tilde{\rho}_I$ é um prolongamento a $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ de ρ_I; (ρ_I por esse motivo tem também a designação de *restrição a* I).

b) A restrição a I da distribuição $[D^2 x \log|x|]$ é a função $\frac{1}{x}$ se I não contiver a origem;

c) O mesmo em relação à distribuição $D^2[x \log|x| + \alpha\, g(x)]$ onde

$$\alpha \in \mathbf{R} \text{ e } g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

d) Se I não contiver a origem

$$\tilde{\rho}_I \delta = 0 .$$

8) Uma distribuição $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ diz-se nula num intervalo aberto $I \subset \mathbf{R}$, sempre que $\tilde{\rho}_I \varphi = 0$ (vidé problema anterior). O complementar de reunião de todos os intervalos abertos $I \subset \mathbf{R}$ tais que $\tilde{\rho}_I \varphi = 0$, diz-se o suporte da distribuição φ.

Posto isto, prove que:

a) O suporte de $\delta(x)$ é a origem;

b) O suporte de função de Heaviside é o semi-eixo real não negativo.

3. As funções localmente somáveis e as medidas interpretadas como distribuições

No parágrafo anterior definimos distribuições como derivadas de funções contínuas. Interessa-nos agora relacionar as distribuições assim obtidas com algumas classes de funções úteis pelas suas aplicações.

Consideremos pois o conjunto das funções complexas, localmente somáveis sobre a recta, identificando duas destas funções sempre que elas diferem quando muito sobre um conjunto de medida à Lebesgue nula. O conjunto destas classes de funções, munido das operações usuais de adição e de multiplicação por complexos, constitui um espaço vectorial complexo, que passaremos a designar por $\mathcal{L}_c^1(\mathbf{R})$.

Ora prova-se que toda a primitiva

$$(1) \qquad f(x) = \int_\alpha^x g(t)\, d\, c$$

de uma função localmente somável $g(x)$, é absolutamene contínua, e que existe a derivada $f'(x) = g(x)$ quási por toda a parte. Recìprocamente, toda a função absolutamente contínua é primitiva de uma função de $\mathcal{L}_c^1(\mathbf{R})$. A aplicação linear de $\mathcal{L}_c^1(\mathbf{R})$ em $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ que a cada elemento $g \in \mathcal{L}_c^1(\mathbf{R})$ faz corresponder

a distribuição $[Df]$ com $f(x) = \int_0^x g(t)\, dt$,

é injectiva, o que permite pois identificar $\mathcal{L}_c^1(\mathbf{R})$ com um sub-espaço de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, e portanto interpretar toda a função localmente somável como uma distribuição.

Com esta identificação, torna-se então possível definir derivada de qualquer ordem de uma função localmente somável.

Anàlogamente, dada uma medida $\mu(x)$ sobre a recta, o integral

$$g(x) = \int_\alpha^x \mu(t)\, dt$$

define uma função, que é usual designar por primitiva da medida, e que é de variação limitada sobre cada intervalo compacto da recta. Recìprocamente, dada uma função $g(x)$ de variação limitada sobre cada intervalo compacto, pondo para todo o intervalo $[\alpha, \beta]$,

$$\mu([\alpha, \beta]) = g(\beta) - g(\alpha^-)$$

onde $g(\alpha^-) = \lim_{x \to \alpha^-} g(x)$, fica determinada uma medida $\mu(x)$ sobre a recta que se designa por derivada de $g : \mu = Dg$.

Além disso, prova-se que toda a função de variação limitada sobre cada intervalo compacto é localmente somável, e que duas primitivas de uma mesma medida diferem entre si em uma constante. A aplicação linear que a cada medida $\mu(x)$ faz corresponder a distribuição Dg, sendo g uma primitiva de μ, é pois injectiva, o que permite identificar toda a medida com uma distribuição, e portanto, definir também derivada de qualquer ordem de uma medida.

Em resumo, *as funções localmente somáveis, e as medidas são distribuições;* no entanto esta interpretação, no que se refere às primeiras, implica a identificação de duas quaisquer funções localmente somáveis, sempre que elas tomam os mesmos valores quási por toda a parte.

A distribuição de Dirac constitui um exemplo de uma medida, que a cada intervalo faz corresponder a medida 1 ou 0, consoante esse intervalo contém ou não a origem. A função de Hiaviside é por sua vez uma primitiva de $\delta(x)$ e uma função localmente somável; está definida no complementar da origem, e nesta pode-se-lhe atribuir qualquer valor.

Exercícios propostos

1. Determine as distribuições que se identificam com as seguintes funções

a) $u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ irracional} \end{cases}$

b) $v(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \text{ racional} \\ 1 & \text{se } x > 0 \text{ e } x \text{ irracional} \end{cases}$

c) $r(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \text{ irracional} \\ 1 & \text{se } x > 0 \text{ e } x \text{ racional.} \end{cases}$

4. Valor de uma distribuição num ponto

Sabemos como ao conceito de função está ligado o de valor num ponto; e como este é importante para que as funções possam representar dependências entre grandezas. No entanto, quando em $\mathcal{L}^1_c(\mathbf{R})$ se identificam duas funções que tomam o mesmo valor quási por toda a parte, este conceito parece perder significado Ora com a teoria das distribuições pode voltar a falar-se de valor, neste caso de uma distribuição, num ponto; e este valor é definido por forma que quando a distribuição é uma função contínua numa vizinhança desse ponto, o valor da distribuição coincide com o valor desta função.

Este objectivo consegue-se com a seguinte definição:

I. *Diz-se que uma distribuição* $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ *tem valor num ponto* $\alpha \in \mathbf{R}$, *se e só se ela admite uma representante* $D^n f, f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, *tal que existe o limite*

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{n!\,f(x)}{(x-\alpha)^n}$$

e esse limite que se representa por $\varphi(\alpha)$ *denomina-se valor de* φ *no ponto* α.

Esta definição tem sentido uma vez que:

i) Dadas duas representantes $D^n f$ e $D^m g$ da mesma distribuição φ, se existem os limites

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{n!\,f(x)}{(x-\alpha)^n} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \alpha} \frac{m!\,g(x)}{(x-\alpha)^m}$$

eles são iguais;

ii) Se existe e é contínua a derivada $f^{(n)}$

de ordem n de f em todo o ponto x de uma vizinhança de α, então $f^{(n)}(\alpha) = \varphi(\alpha)$ (resulta de simples aplicação da regra de L'HOSPITAL);

iii) Se φ e ψ são duas distribuições com valor no ponto $\alpha, \theta = \varphi + \psi$ e $\omega = \lambda \cdot \varphi$, com $\lambda \in \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$: plano complexo), então

$$\theta(\alpha) = \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)$$

e

$$\omega(\alpha) = \lambda \cdot \varphi(\alpha).$$

A aplicação de I às distribuições de HEAVISIDE $h(x)$ e de DIRAC $\delta(x)$ conduz aos seguintes resultados: $h(\alpha) = 1$ e $\delta(\alpha) = 0$ se $\alpha > 0$; $h(\alpha) = \delta(\alpha) = 0$ se $\alpha < 0$. Nenhuma destas distribuições tem valor na origem.

Um outro conceito importante é o de limite lateral:

II. *Dada uma distribuição φ diz-se que ela tem limite lateral à direita [à esquerda] do ponto $\alpha \in \mathbf{R}$, se e só se ela admite uma representante $D^n f, f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, tal que existe o limite*

$$\lim_{x \to \alpha^+} \frac{n!f(x)}{(x-\alpha)^n} \qquad \left[\text{resp. } \lim_{x \to \alpha^-} \frac{n!f(x)}{(x-\alpha)^n}\right].$$

Este limite denomina-se limite lateral de φ à direita [resp. à esquerda] do ponto α, e representa-se por $\varphi(\alpha^+)$ [resp. $\varphi(\alpha^-)$].

Demonstra-se também que estes valores, quando existem para uma dada distribuição, são independentes do representante escolhido para os determinar, e verificam propriedades semelhantes às enunciadas em *iii*.

No caso da função de HEAVISIDE $h(x)$ e de $\delta(x)$, tem-se: $h(0^+) = 1; h(0^-) = 0$; $\delta(0^+) = \delta(0^-) = 0$. Efectivamente, de

$$h(x) = D\, g(x)$$

$$\delta(x) = D^2 g(x) = D^2(g(x) - x)$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

vem

$$h(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$h(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x)}{x} = 0$$

$$\delta(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2!(g(x) - x)}{x^2} = 0$$

$$\delta(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2!\,g(x)}{x^2} = 0.$$

Interessa também relacionar estes limites laterais, com conceitos análogos ligados à teoria das funções. E tem particular interesse o caso das primitivas de medidas, que são funções localmente somáveis. Dada uma destas primitivas $f(x)$, prova-se que existem os limites laterais, $\lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ e $\lim_{x \to \alpha^-} f(x)$ no sentido das funções, em todo o ponto $\alpha \in \mathbf{R}$, e que eles coincidem com os mesmos limites calculados no sentido das distribuições.

É o que se passa, por exemplo com a função de HEAVISIDE $h(x)$ na origem: em ambos os casos tem-se $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$ e $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0$.

O conceito de limite de uma função $f(x)$ quando x tende para $+\infty\,[-\infty]$, também pode ser generalizado e aplicado às distribuições:

III. *Diz-se que o limite qnando $x \to +\infty$ $[x \to -\infty]$ de uma distribuição φ é β, e escreve-se $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \beta$ ou $\varphi(+\infty) = \beta$* [resp. $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \beta$ *ou* $\varphi(-\infty) = \beta$] *quando existe uma representante $D^n f$ de φ tal que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{n!f(x)}{x^n} = \beta$$

$$\left[\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} \frac{n!f(x)}{x^n} = \beta\right].$$

Este limite é independente do representante de φ escolhido para o determinar, e se a derivada $f^{(n)}(x)$ existe numa vizinhança de $+\infty$ $[-\infty]$, bem como o $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ [resp. $\lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x)$], então tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = \varphi(+\infty)$$

$$[\text{resp.} \lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x) = \varphi(-\infty)].$$

Além disso, demonstram-se ainda propriedades respeitantes à sua linearidade, isto é, propriedades análogas às enunciadas em *iii*) para os valores das distribuições.

Como exemplo, consideremos uma vez mais as distribuições $h(x)$ e $\delta(x)$. Sendo $h(x) = D\,g(x)$ e $\delta(x) = D^2 g(x)$ onde

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

vem

$$h(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

$$h(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

$$\delta(+\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{2!\,g(x)}{x^2} = 0$$

$$\delta(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2!\,g(x)}{x^2} = 0.$$

Um outro caso com interesse é o das junções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, que no sentido das distribuições têm limite quando x tende para $+\infty$ ou para $-\infty$. Uma vez que $\operatorname{sen} x = -D\cos x$ e que $\cos x = D\operatorname{sen} x$, vem òbviamente

$$\operatorname{sen}(\pm\infty) = \cos(\pm\infty) = 0$$

resultados que de resto já foram utilizados de uma forma heurística.

Exercícios propostos

1. Determine o valor de distribuição $D^2(x-1)^2$ no ponto $x=1$.

2. Calcule os limites

a) $\lim_{x\to+\infty} e^{i\alpha x}$ $(\alpha \neq 0)$

b) $\lim_{x\to+\infty} D^2(x-1)^2$.

3. Sendo $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, prove que se $\tilde{\rho}_I\,\varphi = 0$ (vidé problema 7, § 2) então $\varphi(\alpha) = 0$ para todo o $\alpha \in I$.

5. Integral definido de uma distribuição

Sendo α e β dois pontos de recta, sabe-se que o integral $\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx$ no sentido de LEBESGUE existe para toda a função localmente somável $\mu(x)$; e sabe-se também que, sendo $f(x)$ uma primitiva de $\mu(x)$, $f(x)$ é absolutamente contínua, e tem-se

$$(1) \qquad \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha).$$

Por sua vez, sendo $\mu(x)$ uma medida sobre $\mathbf{R}$, o integral de STIELTJES $\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx$ existe também e verifica a igualdade

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = f(\beta) - f(\alpha^-)$$

onde $f(x)$ é uma primitiva de $\mu(x)$ e $f(\alpha^-) = \lim_{x\to\alpha^-} f(x)$.

Tendo pois em atenção estes resultados, para as distribuições definem-se os seguintes integrais:

I. *Dado uma distribuição* $\mu(x)$, *se existe uma sua primitiva* $\varphi(x)$ *com valores nos pontos* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\mu(x)$ *diz-se integrável sobre o* *intervalo definido por aqueles pontos, e o valor de*

$$\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

diz-se integral entre α *e* β *de* $\mu(x)$.

II. *Dada uma distribuição* $\mu(x)$, *se existem uma sua primitiva* $\varphi(x)$ *e os valores* $\varphi(\alpha^-)$ *e* $\varphi(\beta^+)$, $\mu(x)$ *diz-se integrável entre* α^- *e* β^+, *e o valor de*

$$\int_{\alpha^-}^{\beta^+} \mu(x)\,dx = \varphi(\beta^+) - \varphi(\alpha^-)$$

denomina-se integral entre α^- *e* β^+ *de* $\mu(x)$.

E de forma análoga definem-se ainda

$$\int_{\alpha^-}^{\beta^-} \mu(x)\,dx = \varphi(\beta^-) - \varphi(\alpha^-),$$

$$\int_{\alpha^+}^{\beta^-} \mu(x)\,dx = \varphi(\beta^-) - \varphi(\alpha^+),$$

$$\int_{\alpha^+}^{\beta^+} \mu(x)\,dx = \varphi(\beta^+) - \varphi(\alpha^+).$$

Os integrais I e II são òbviamente prolongamentos dos definidos respectivamente para as funções localmente somáveis, e para as medidas, e a existência do primeiro é suficiente para garantir a existência dos restantes que tomam o mesmo valor que aquele.

Eles verificam além disso as propriedades usuais

i) $\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha \mu(x)\,dx$;

ii) $\int_\alpha^\beta \lambda\cdot\mu(x)\,dx = \lambda\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx, \forall\,\lambda\in \mathbf{C}$;

iii) $\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma \mu(x)\,dx + \int_\gamma^\beta \mu(x)\,dx$;

iv) $\int_\alpha^\beta [\mu(x)+\xi(x)]\,dx = \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \xi(x)\,dx$

e igualdades análogas que se podem obter destas substituindo os extremos de integração α, β ou γ por respectivamente $\pm\alpha$, $\pm\beta$ e $\pm\gamma$. Estas propriedades demonstram-se por simples aplicação das definições dadas.

Tem particular interesse a aplicação destes resultados à distribuição de DIRAC. Sendo a função de HEAVISIDE $h(x)$ uma primitiva de $\partial(x)$, e verificando-se que $h(\alpha)=1$ para todo o $\alpha>0$, $h(\alpha)=0$ para todo o $\alpha<0$, $h(0^-)=0$ e $h(0^+)=1$, vem que:

$$\int_\alpha^\beta \partial(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se o intervalo de integração não contém a origem} \\ 1 & \text{se contém a origem e } \beta>\alpha \\ -1 & \text{se contém a origem e } \beta<\alpha \end{cases}$$

e ainda

$$\int_{0^-}^{0^+} \partial(x)\,dx = 1$$

igualdades estas que constituem propriedades da distribuição de DIRAC muito utilizadas.

O recurso ao conceito de limite de uma distribuição em $-\infty$ e $+\infty$ permite também definir o integral entre $-\infty$ e $+\infty$:

III. *Dada uma distribuição* $\mu(x)$, *se existe uma sua primitiva* $\varphi(x)$ *com valores em* $-\infty$ *e* $+\infty$, $\mu(x)$ *diz-se integrável sobre* $\mathbf{R}$, *e o valor de*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x)\,dx = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)$$

denomina-se integral de $\mu(x)$ *entre* $-\infty$ *e* $+\infty$.

Este integral é òbviamente uma generalização do integral impróprio de 2.ª espécie relativa a funções.

A sua aplicação à distribuição de Dirac conduz ao conhecido resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = h(+\infty) - h(-\infty) = 1\,.$$

Por sua vez, sendo $\operatorname{sen} x = -D \cos x$, $\cos x = D \operatorname{sen} x$, e $\operatorname{sen}(\pm\infty) = \cos(\pm\infty) = 0$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x = d\,x = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x\,d\,x = 0$$

isto é $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, que não eram integráveis entre $-\infty$ e $+\infty$ como funções, já o são como distribuições.

Exercícios propostos

1. Determine os integrais,

$a)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\,d\,x \qquad (\alpha \neq 0)$

$b)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x)\,d\,x$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,d\,x$

(compare o resultado com o

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,d\,x)\,.$$

6. Multiplicação de uma função indefinidamente diferenciável por uma distribuição. Uma generalização possível.

Esta operação é definida por forma a manterem-se válidas algumas propriedades relativas à multiplicação entre funções; e uma dessas propriedades, que diz respeito à derivada do produto, é suficiente para que esta operação fique univocamente determinada.

O conjunto das funções complexas indefinidamente diferenciáveis sobre $\mathbf{R}$, munido das operações usuais de adição e de multiplicação, constitui um anel, que designaremos por $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$; e entre elementos de $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e de $\mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$ define-se a referida multiplicação do seguinte modo:

I. *Dados dois elementos* $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ *e* $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$, *denomina-se produto de* f *por* φ, *e representa-se por* $f \cdot \varphi$, *uma distribuição tal que:*

i) *Se* φ *é uma função contínua,* $f \cdot \varphi$ *é o produto usual;*

ii) *É válida a regra de derivação*

$$D(f \cdot \varphi) = f \cdot D\varphi + f' \cdot \varphi$$

onde f' *designa a derivada de* f.

De *ii*) deduz-se fàcilmente, fazendo indução sobre n, que

$$(1) \quad f \cdot D^n \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} (f^{(k)} \cdot \varphi)$$

para todo o $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e todo o $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$, o que permite escrever no caso de $\varphi = [g]$, com $g \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$

$$f \cdot [D^n g] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} (f^{(k)} \cdot [g])$$

e atendendo a *i*),

$$(2) \quad f \cdot [D^n g] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} [f^{(k)} \cdot g]\,.$$

Esta fórmula é pois uma consequência de *i*) e *ii*), e poderá eventualmente definir o produto $f \cdot \varphi$ se o resultado dado por ela for independente do representante de φ utilizado. Vamos provar que assim sucede.

Para o fazer, é conveniente recorrer à noção de ordem de uma distribuição: *diz-se que uma distribuição* φ *é de ordem* n, *quando é derivada de ordem* n *de uma função contínua, e não é derivada de ordem inferior de qualquer outra função de* $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

Uma função contínua é pois uma distribuição de ordem 0.

Fazendo indução sobre a ordem das distribuições, demonstra-se então que o produto dado por 2) é independente do representante utilizado.

Para as distribuições de ordem $=0$, aplicando a fórmula 2) demonstra-se fàcilmente que

$$f \cdot [D^m g] = [f \cdot g^{(m)}]$$

quaisquer que sejam o representante escolhido $D^m g$ de uma distribuição de ordem 0, e $f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R})$; e como consequência, que é válida a propriedade distributiva

$$(3) \qquad f \cdot (\theta + \varphi) = f \cdot \theta + f \cdot \varphi$$

quaisquer que sejam as distribuições θ e φ de ordem ≤ 0.

Por sua vez, da hipótese de que o resultado dado por (2) da multiplicação de f por uma distribuição de ordem $\leq n$, é independente do seu representante utilizado, e que a propriedade distributiva (3) é válida quaisquer que sejam as distribuições θ e φ de ordem $\leq n$, infere-se que o mesmo se verifica para as distribuições de ordem $\leq n+1$.

Com efeito, sendo φ uma distribuição de ordem $\leq n+1$, e $D^m g$ uma sua representante, de acordo com (2) vem

$$\begin{aligned} f \cdot [D^m g] &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} D^{m-k} [f^{(k)} \cdot g] = \\ &= D \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} D^{m-1-k} [f^{(k)} \cdot g] - \\ &- \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m-1}{k} D^{m-1-k} [f^{(k+1)} \cdot g] = \\ &= D(f \cdot [D^{m-1} g]) - f' [D^{m-1} g] \end{aligned}$$

e sendo os produtos $f \cdot [D^{m-1} g]$ e $f' \cdot [D^{m-1} g]$ dados por 2) independentes do representante da distribuição $\theta = [D^{m-1} g]$, que é de orden $\leq n$, podemos pois, escrever

$$f \cdot [D^m g] = D[f \cdot \theta] - f' \cdot \theta .$$

Se tivéssemos utilizado outro representante $D^p h$ de φ, teríamos obtido

$$f \cdot [D^p h] = D(f \cdot \omega) - f' \cdot \omega$$

onde ω seria também uma primitiva de φ.

Mas sendo $\omega = \theta + \text{constante}$, substituindo na expressão anterior, vem

$$\begin{aligned} f \cdot [D^p h] &= D(f \cdot (\omega + \text{const.})) - \\ &- f' \cdot (\omega + \text{const.}) = D(f \cdot \omega) + \\ &+ D(f \cdot \text{const.}) - (f' \cdot \omega) - f' \cdot \text{const.} = \\ &= D(f \cdot \omega) - (f' \cdot \omega) = f \cdot [D^m g] \end{aligned}$$

isto é, o produto $f \cdot \varphi$ dado por 2) é independente do representante de φ, como se pretendia.

Para demonstrar a distributividade no caso de θ e φ serem distribuições de ordem $\leq n+1$, podem-se utilizar derivadas da mesma ordem de funções contínuas para as representar, com o que a demonstração se torna imediata.

A fórmula 2), que é uma consequência de *i*) e *ii*) define pois uma multiplicação entre elementos de $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R})$ e de $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$, a qual, como se pode provar fàcilmente, satisfaz por sua vez as propriedades *i*) e *ii*). Isto é, esta multiplicação é a única que verifica *i*) e *ii*).

Além disso, ela verifica ainda as seguintes propriedades:

1) $(f+g) \cdot \varphi = f \cdot \varphi + g \cdot \varphi$
2) $f(\varphi + \psi) = f \cdot \varphi + f \cdot \psi$ (já demonstrada)
3) $f \cdot (g \cdot \varphi) = (f \cdot g) \cdot \varphi$
4) $1 \cdot \varphi = \varphi$

quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R})$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ isto é, $\mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ constitui um módulo sobre o anel $\mathcal{C}^\omega(\mathbf{R})$.

Se $\varphi \in \mathcal{C}_\omega(\mathbf{R})$ toma valor num ponto $\alpha \in \mathbf{R}$, para todo o $f \in \mathcal{C}^\omega(\mathbf{R})$, o seu produto $f \cdot \varphi = \theta$ também tem valor naquele ponto, e tem-se

$$f(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) = \theta(\alpha) .$$

Relativamente aos limites laterais, também se podem enunciar resultados análogos.

A fórmula 1) permite ainda uma generalização desta multiplicação, que se baseia no facto do produto de uma função contínua por uma medida ser uma medida. Sendo g uma função contínua e μ uma medida, diz-se produto de g por μ, a derivada da função $\varphi(x)$ definida por

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^{x} g(t)\,d\,t$$

onde $\alpha \in \mathbf{R}$ e o integral é entendido no sentido de RIEMANN-STIELTJES.

Posto isto, dadas uma função f que admite derivadas contínuas até à ordem n, e uma medida μ, é legítimo definir o produto $f \cdot D^n \mu$ através da relação

$$(5) \qquad f \cdot D^n \mu = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (f^{(k)} \cdot \mu)$$

A multiplicação que resulta desta fórmula, entre funções que admitem derivadas até uma determinada ordem n, e derivadas dessa mesma ordem de medidas, verifica aliás as propriedades referidas atrás, relativas à multiplicação entre funções de $\mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e distribuições.

Vejamos alguns exemplos. Sendo $\delta(x)$ uma medida, para toda a função contínua $f(x)$, e quaisquer que sejam os reais α e β diferentes de zéro, existe o integral de RIEMANN-STILTJES

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,d\,\delta = f(0)\,(h(\beta) - h(\alpha)).$$

A função $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,d\,\delta = f(0)\,(h(x) - h(\alpha))$ é de variação limitada sobre todo o intervalo compacto, e a sua derivada é por definição o produto de f por $\delta(x)$. Vem pois, derivando o integral anterior

$$f \cdot \delta = f(0) \cdot \delta$$

igualdade esta que constitui uma das propriedades mais importantes da distribuição de DIRAC.

Por sua vez, se f admite derivadas contínuas até à ordem n, o seu produto pela derivada de ordem n de $\delta(x)$, vem de acordo com 5 e 6

$$f \cdot \delta^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} (f^{(k)}(0)\,\delta) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f^{(k)}(0)\,\delta^{(n-k)}$$

Exercícios propostos

1. Efectue os seguintes produtos

a) $x\,\delta(x)$

b) $e^{\alpha x}\,\delta(x)$

c) $x\,\delta(x-\beta)$ (β real)

d) $e^{\alpha x}\,\delta(x-\beta)$ (β real)

e) $e^{\alpha x}\,h(x)$ ($h(x)$: função de HEAVISIDE)

f) $e^{\alpha x}\,\delta'(x-\beta)$

g) $e^{\alpha x}\,\delta^{(n)}(x-\beta)$.

2. Determine

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}\,\delta(x)\,d\,x$;

b) $\int_{\alpha}^{\beta} e^{\gamma x}\,\delta(x)\,d\,x$ com $\beta > \alpha > 0$;

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x}\,\delta^{(n)}(x)\,d\,x$.

3. Prove que $\widetilde{\rho}_I(f \cdot \varphi) = 0$ para todo o $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e todo o $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$ tal que $\widetilde{\rho}_I\,\varphi = 0$. ($\widetilde{\rho}_I$: restricção a I, intervalo aberto de $\mathbf{R}$, vidé problema 7, § 2).

4. Prove que $\widetilde{\tau}_{\alpha}(f \cdot \varphi) = (\tau_{\alpha} f) \cdot (\widetilde{\tau}\,\varphi)$ quaisquer que sejam $f \in \mathcal{C}^{\omega}(\mathbf{R})$ e $\varphi \in \mathcal{C}_{\omega}(\mathbf{R})$, isto é, que a translatada $\widetilde{\tau}_{\alpha}$ do produto $f \cdot \varphi$ é igual ao produto das translatadas de f e φ (vidé problema 5, § 2).

(Continua)