MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 1 — 30-6-1971.

5785 — 1) Investigue se é possível encontrar três subconjuntos A, B e C de U tais que satisfaçam simultâneamente às relações seguintes:

$$C \neq \emptyset, \ A \cap B \neq \emptyset, \ A \cap C = \emptyset, \ (A \cap B) - C = \emptyset .$$

R: *A relação* $(A \cap B) - C = \emptyset$ *implica que* $A \cap B \subseteq C$ *e, como* $A \cap B \neq \emptyset$, *é claro que a primeira condição é supérflua. É evidente que a condição* $A \cap B \subseteq C$ *implica* $A \cap C \neq \emptyset$ *e portanto a validade da segunda e quarta condições contradiz a terceira.*

2) Considere a relação binária definida no conjunto $E = \{a, b, c, d\}$ por $R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (d, d)\}$. Indique o número mínimo de pares ordenados que é necessário acrescentar a R para que esta relação seja (a) reflexiva, (b) simétrica, (c) relação de equivalência.

R.:

a) $(a, a), (b, b), (c, c)$.

b) $(b, a), (c, a), (d, b)$.

c) *Haverá que acrescentar os pares indicados nas alíneas* a) *e* b) *mais os seguintes:* $(a, d), (d, a), (b, c), (c, b)$.

3) Sendo $A(1, 1)$ a imagem do complexo z_1, ache o lugar geométrico da imagem B do cmplexo z tal que a imagem de $z_1 z$ está sobre $\overline{AB}$.

R.: *Sendo* $z = (x, y)$, *vem* $z_1 z = (x - y, x + y)$ *e a equação da recta* $\overline{AB}$ *é*

$$\frac{X - x}{1 - x} = \frac{Y - y}{1 - y} .$$

Como a imagem de $z_1 z$ *está sobre* $\overline{AB}$, *terá de ser*

$$\frac{-y}{1 - x} = \frac{x}{1 - y}$$

ou $x^2 + y^2 - x - y = 0$, *que é a circunferência de centro em* $(1/2, 1/2)$ *e raio* $\sqrt{2/2}$.

4) Supondo que $(G, \times)$ é grupo comutativo, considere a lei de composição interna $*$ tal que $\forall\, a, b \in G \quad a * b = a \times b \times k$ (k constante pertencente a G). Demonstre que $(G, *)$ também é grupo comutativo.

R.: *Associatividade:*

$$(a * b) * c = (a \times b \times k) * c = (a \times b \times k) \times c \times k$$

$$a * (b * c) = a \times (b * c) \times k = a \times (b \times c \times k) \times k .$$

Como a lei $\times$ *é associativa e comutativa, então*

$$(a * b) * c = a * (b * c) .$$

Comutatividade:

$$a * b = a \times b \times k$$

$$b * a = b \times a \times k .$$

A comutatividade da lei $\times$ *implica* $a * b = b * a$.

Existência de elemento neutro: se existe elemento neutro e, *terá de ser*

$$a * e = a \quad ou \quad a \times e \times k = a$$

e daqui resulta

$$a^{-1}(a \times e \times k) = a^{-1} a$$

donde vem $e = k^{-1}$.

Existência de elemento oposto: o elemento oposto a' *de* a *terá de satisfazer à condição* $a * a' = k^{-1}$ *ou* $a \times a' \times k = k^{-1}$. *Daqui vem* $a^{-1}(a \times a' \times k) = a^{-1} k^{-1}$ *e portanto* $a' = a^{-1}(k^{-1})^2$.

5) Seja $B(m \times n)$ $(m < n)$ uma matriz de característica $r \leq m$ e A matriz quadrada regular de ordem m. Mostre que $c(AB) = r$.

Ache a condição a que devem satisfazer y_1, y_2, y_3 e y_4 para que as equações

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & - & x_5 & = & y_2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & & & + & 4x_5 & = & y_3 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & = & y_4 \end{array}$$

sejam compatíveis.

R.: *Como* $c(A) = m$ *e* $c(B) = r \leq m$, *vem* $c(AB) \leq r$. *Se fosse* $c(AB) < r$ *então, como* $c(A^{-1}) = m$, *viria* $c[A^{-1}(AB)] = c(IB) = c(B) < r$, *o que é absurdo.*

Para que as equações sejam compatíveis é necessário e suficiente que

$$y_4 - y_3 + y_2 - y_1 = 0 .$$

6) Sem calcular os determinantes, prove que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_4 & b_4 & a_4 & d_4 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

R.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & a_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 & d_1 \\ c_4 & b_4 & a_4 & d_4 \\ c_3 & b_3 & a_3 & d_3 \\ c_2 & b_2 & a_2 & d_2 \end{vmatrix} .$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 2 — 30-6-1971.

5786 — 1) Prove que, se A, B e C são subconjuntos de U tais que $A \cap B \subseteq \tilde{C}$ e $A \cap C \subseteq B$, então $A \cap C = \emptyset$

R.: *Teremos de provar a proposição*

$$A \cap B \subseteq \tilde{C} \wedge A \cup C \subseteq B \Longrightarrow A \cap C = \emptyset .$$

Fazendo $x \in A = a$, $x \in B = b$, $x \in C = c$ *e* $x \in \emptyset = 0$, *bastará mostrar que* $[(a \wedge b \Longrightarrow \sim c) \wedge (a \vee c \Longrightarrow b)] \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (a \wedge c \Longleftrightarrow 0)$. *Construindo uma tabela de verdade vem:*

a	b	c	$[(a \vee b \Longrightarrow \sim c) \wedge (a \vee c \Longrightarrow b)] \Longrightarrow (a \wedge c \Longleftrightarrow 0)$										
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
										*			

*A coluna assinalada com um * justifica a veracidade da proposição.*

2) Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$. Mostre que

a) $g \circ f$ injectiva $\Longrightarrow f$ injectiva

b) $g \circ f$ sobrejectiva $\Longrightarrow g$ sobrejectiva.

R.: a) $x' \neq x'' \Longrightarrow (g \circ f)(x') \neq (g \circ f)(x'')$

ou

$$x' \neq x'' \Longrightarrow g(f(x')) \neq g(f(x'')) \Longrightarrow f(x') \neq f(x'') .$$

b) *Por hipótese*, $(g \circ f)(A) = C$ *e portanto* $g(f(A)) = C$ *o que mostra que* g *é sobrejectiva.*

3) Sendo $z = x + iy$, qual é a condição que devem cumprir x e y para que o complexo $\dfrac{z-1}{z+1}$ seja imaginário puro? Que curva descreve a imagem de z?

R.:

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1) + iy}{(x+1) + iy} =$$

$$\frac{[(x-1)+iy][(x+1)-iy]}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{(x^2 - 1 + y^2) + i(\cdots)}{(x+1)^2 + y^2}$$

e portanto terá de ser $x^2 + y^2 - 1 = 0$ *que é a circunferência de centro na origem e raio* 1.

4) Prove que, em relação a qualquer lei de composição interna associativa, todo o elemento que admite oposto é regular à direita e à esquerda.

No conjunto R dos números reais considere a lei $*$ definida por $a * b = a + b + ab$. Mostre que existe elemento neutro e que qualquer real distinto de -1 tem oposto.

R: *Sendo* $a * a' = a' * a = e$, *de* $a * b = a * c$ *vem* $a' * (a * b) = a' * (a * c)$ *ou* $(a' * a) * b = (a' * a) * c$

o que permite concluir que $e * b = e * c$, *isto é,* $b = c$. *Anàlogamente, de* $b * a = c * a$ resulta $b = c$.

Quanto à lei $a * b = a + b + ab$ *definida em* R, *como* $a * b = b * a$, *basta procurar o elemento* e *para o qual* $a * e = a$. *Vem então*

$$a * e = a + e + eb = a$$
$$a + e(1 + b) = a$$
$$e = 0.$$

A condição para a existência de oposto $a + a' + aa' = 0$ *dá* $a' = -\dfrac{a}{1+a}\ (a \neq -1)$.

5) Duas matrizes A e B do mesmo tipo $m \times n$ dizem-se *equivalentes* se existem duas matrizes regulares P e Q, respectivamente de ordens m e n, tais que $B = PAQ$. Mostre que esta relação binária é uma relação de equivalência entre as matrizes.

Estude o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (a^2 - 5)\, x_3 = a. \end{cases}$$

R: *reflexividade:* $A = I_m A I_n$
simetria: $B = PAQ \Rightarrow P^{-1} B Q^{-1} = A$
transitividade: $B = PAQ \wedge C = P_1 B Q_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow C = (P_1 P)\, A\, (Q Q_1)$.

O sistema é possível determinado com $a \neq -2, 2$; *é possível indeterminado de grau 1 com* $a = 2$; *é impossível com* $a = -2$.

6) Resolva a seguinte equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0.$$

R: *As raízes são* $x = 0, x = 1, \cdots, x = n-2$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 3 — 10-7-1971.

5787 — 1) Demonstre que

$$(A \cap B \cap C) \cup (\widetilde{A} \cap B \cap C) \cup \widetilde{B} \cup \widetilde{C} = U.$$

R: $(A \cap B \cap C) \cup (\widetilde{A} \cap B \cap C) \cup \widetilde{B} \cup \widetilde{C} =$

$= [(B \cap C) \cap (A \cup \widetilde{A})] \cup \widetilde{B} \cup \widetilde{C}$

$= [(B \cap C) \cap U] \cup \widetilde{B} \cup \widetilde{C}$

$= (B \cap C) \cup \sim (B \cap C)$

$= U$.

2) Na construção de um prédio estabelece-se um planeamento das operações a efectuar. Designando o conjunto das operações por $\{a, b, \cdots, i, j, \cdots, u\}$, considere a relação binária definida pela função proposicional «a operação i antecede a operação j». Trata-se de uma relação de ordem parcial? É uma ordem total? Justifique as respostas.

R.: *É ordem parcial mas não é ordem total.*

3) Prove que

$$\left(\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{i - \sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{84}\right).$$

R.:

$$\left(\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i) =$$
$$= \left(\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \times$$
$$\times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{84}\right).$$

4) Seja $(A, +, \times)$ um anel não comutativo e considere em A a lei de composição interna $*$ definida por $x * y = xy - yx$. Prove que

a) $x * y = -(y * x)$

b) A lei $*$ é distributiva à esquerda e à direita em relação à adição.

R.: *a)* $x * y = xy - yx$
$y * x = yx - xy = -(x * y)$

b) $x * (y + z) = x(y + z) - (y + z)x =$
$= xy + xz - yx - zx =$
$= (xy - yx) + (xz - zx) =$
$= (x * y) + (x * z)$.

$(y + z) * x = (y + z)x - x(y + z) =$
$= yx + zx - xy - xz =$
$= (yx - xy) + (zx - xz) =$
$= (y * x) + (z * x)$.

5) Seja A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$. Supondo que $n < m$, prove que AB não é invertível.

Ache a matriz inversa de $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Utilizando C^{-1}, ache a solução do sistema $Cx = d$ com a matriz coluna $d = \{3 \quad -1 \quad 2\}$.

R.: *Como* $c(AB) \leq min\{c(A), c(B)\}$, $c(A) < m$ *e* $c(B) < m$, *é claro que* $c(AB) < m$. *Logo,* AB, *matriz de ordem* m *com característica inferior a* m, *não é invertível.*

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/10 & -1/10 \\ -1/2 & 1/10 & 3/10 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

e a solução do sistema é $x = C^{-1} d = \{1 \quad -2 \quad 0\}$.

6) Calcule $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x \cdots x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x \end{vmatrix}$

R.: $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 \cdots x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x \cdots x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 \cdots x_{n-1} & x \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ 0 & x - x_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x - x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x - x_n \end{vmatrix} =$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n).$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 4 — 20-7-1971.

5788 — 1) Prove que, se A, B, C e D são conjuntos, então $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

R.: $(a, b) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \cap B \wedge b \in C \cap D \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \wedge a \in B \wedge b \in C \wedge b \in D$

$\Rightarrow (a, b) \in A \times C \wedge (a, b) \in B \times D \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) \in (A \times C) \cap (B \times D)$

$(a, b) \in (A \times C) \cap (B \times D) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) \in A \times C \wedge (a, b) \in B \times D \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \wedge b \in C \wedge a \in B \wedge b \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in A \cap B \wedge b \in C \cap D \Rightarrow$

$\Rightarrow (a, b) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$.

2) Se f, g, e h são aplicações de A em A, mostre que $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ sse f é injectiva e $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ sse f é sobrejectiva.

R.: *Mostremos em primeiro lugar que a condição* $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ *implica que* f *é injectiva. De facto, se* f *é uma aplicação tal que* $\forall g, h \; f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$, *tomemos duas aplicações particulares* g_a *e* h_b *de* A *em* A *que sejam definidas do modo seguinte:*

$$\forall x \in A \xrightarrow{g_a} g_a(x) = a \in A$$

$$\forall x \in A \xrightarrow{h_b} h_b(x) = b \in A.$$

A hipótese, aplicada a estas duas funções, dá então

$$f \circ g_a = f \circ h_b \Rightarrow g_a = h_b,$$

isto é,

$$f \circ g_a = f \circ h_b \Rightarrow a = b.$$

Como

$$\forall x \in A \begin{cases} (f \circ g_a)(x) = f(a) \\ (f \circ h_b)(x) = f(b), \end{cases}$$

vem então $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, *o que traduz a injectividade de* f.

Supondo agora que f *é injectiva, é claro que*

$$\forall x \in A \;\; f(g(x)) = f(h(x)) \Rightarrow g(x) = h(x).$$

Admitindo que

$$\forall g, h \qquad g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

então f *é sobrejectiva. Com efeito, se* f *não fosse sobrejectiva, designando por* y_0 *um elemento de* A *não pertencente a* f(A) *e tomando duas aplicações* g *e* h *tais que*

$$\forall y \in f(A) \quad g(y) = h(y) \quad e \quad g(y_0) \neq h(y_0),$$

ter-se-ia $g \circ f = h \circ f$ *sem ser* $g = h$, *o que é contrário à hipótese.*

Recìprocamente, supondo f *sobrejectiva* (f (A) = A) *a condição*

$$\forall x \in A \quad g(f(x)) = h(f(x))$$

arrasta

$$\forall y = f(x) \in A \quad g(y) = h(y)$$

em consequência de f *ser sobrejectiva.*

3) Se $|z + 4i| = |z + 2i|$ e $\arg(z + 2i) = -\pi/4$, ache z.

R.: *Fazendo* $z = x + iy$, *vem* $|x + (4+y)i| = |x + (2+y)i|$ *donde resulta* $\sqrt{x^2 + (4+y)^2} = \sqrt{x^2 + (2+y)^2}$, *equação que é satisfeita com qualquer* x *e* $y = -3$. *Como* $\dfrac{2+y}{x} = tg(-\pi/4) = -1$, *vem* $x = 1$ *e portanto* $z = 1 - 3i$.

4) Seja $(A, +, \times)$ um anel em que $\forall x \in A$ $x^2 = x$. Demonstre que

a) $\forall x \in A \;\; x = -x$, partindo de $(x+x)^2 = x+x$.

b) A é comutativo, calculando $(x+y)^2$.

c) $\forall x, y \in A \;\; xy(x+y) = 0$.

R.: a) *De* $(x+x)^2 = x + x$ *vem*

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + x^2 + x^2 &= x + x \\ x + x + x + x &= x + x \\ x + x &= 0 \\ x &= -x. \end{aligned}$$

b) $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$

$$\begin{aligned} x^2 + xy + yx + y^2 &= x + y \\ x + xy + yx + y &= x + y \\ xy + yx &= 0 \\ xy &= -yx \end{aligned}$$

e, atendendo à alínea a),

$$xy = yx.$$

c)
$$\begin{aligned} xy(x+y) &= xyx + xy^2 \\ &= yx^2 + xy^2 \\ &= yx + xy \\ &= 0. \end{aligned}$$

5) Se S e T são matrizes quadradas da mesma ordem e S é invertível, mostre que

$$(S + T)\,S^{-1}(S - T) = (S - T)\,S^{-1}(S + T).$$

R.: $(S + T)\,S^{-1}(S - T) = (I + T\,S^{-1})(S - T) = S - T\,S^{-1}\,T$

$$(S - T)\,S^{-1}(S + T) = (I - T\,S^{-1})(S + T) = S - T\,S^{-1}\,T$$

Prove que a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

é 2 e exprima a terceira e quarta colunas como composição linear das duas primeiras.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 2 & -3 & 10 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a característica da matriz é 2. *Pondo*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

vem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ -x_1 = -2, \end{cases}$$

sistema cuja solução é $x_1 = 2$, $x_2 = -3/2$. *Anàlogamente, de*

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

resulta o sistema

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 3 \\ 3y_1 + 4y_2 = -1 \\ -y_1 = 7 \end{cases}$$

cuja solução é $y_1 = -7$, $y_2 = 5$.

6) Calcule o determinante da matriz de ordem n

$$\begin{bmatrix} x & a & a \dots a \\ a & x & a \dots a \\ a & a & x \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a & a & a \dots x \end{bmatrix}.$$

Sugestão: comece por adicionar à primeira coluna a soma das restantes.

R.:

$$\begin{vmatrix} x & a & a \dots a \\ a & x & a \dots a \\ a & a & x \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a & a & a \dots x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a \dots a \\ x+(n-1)a & x & a \dots a \\ x+(n-1)a & a & x \dots a \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x+(n-1)a & a & a \dots x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \dots & a \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix} =$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1} .$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 5 — 1-10-1971.

5789 — 1) Estude a validade da seguinte proposição:

$$A \subseteq \sim (B \cup C) \wedge B \subseteq \sim (A \cup C) \Longrightarrow B = \emptyset .$$

R.: *Adoptando a convenção* $x \in A = a$, $x \in B = b$, $x \in C = c$ *e* $x \in \emptyset = 0$, *o problema consiste em estudar a validade da proposição:*

$$\{[a \Longrightarrow \sim (b \vee c)] \wedge [b \Longrightarrow \sim (a \vee c)]\} \Longrightarrow (b \Longleftrightarrow 0) .$$

A tabela de verdade

a	b	c	$\{[a \Longrightarrow \sim (b \vee c)] \wedge [b \Longrightarrow \sim (a \vee c)]\} \Longrightarrow b \Longleftrightarrow 0)$
1	1	1	1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0
1	1	0	1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0
1	0	1	1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0
1	0	0	1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0
0	1	1	0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0
0	1	0	0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0
0	0	1	0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0
0	0	1	0 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0

mostra que a proposição é falsa.

2) Considere no plano os pontos $M(x, y)$ e tome a relação binária R definida do modo seguinte:

$$M \, R \, M' \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqq x' \\ y \leqq y' \end{cases} .$$

a) R é uma relação de ordem parcial lata?

b) R é uma relação de ordem lata?

Justifique as respostas.

R.: a) R *é reflexiva, antisimétrica lata e transitiva e, portanto, é relação de ordem parcial lata.*

b) R *não é ordem lata porque não goza da propriedade dicotómica.*

3) Ache os inteiros n para os quais $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^n}$ é imaginário puro.

R.:

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^n} = \frac{2^3 \operatorname{cis} \pi}{2^n \operatorname{cis}\left(-\dfrac{n\pi}{6}\right)} = 2^{3-n} \operatorname{cis} \frac{(n+6)\pi}{6} .$$

Para que este complexo seja imaginário puro é preciso que $\cos \dfrac{(n+6)\pi}{6} = 0$ *ou* $\dfrac{(n+6)\pi}{6} = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$, *donde resulta* $n + 6 = 12k \pm 3$, *isto é*, $n = 12k - 3$ *e* $n = 12k - 9$.

4) Seja $A = \{0, 1\}$ e considere o sistema algébrico $(A, +, \times)$ com as leis definidas pelas seguintes tabelas:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	1
1	0	1

Investigue se $(A, +, \times)$ possui estrutura de corpo.

R.: *O sistema* $(A, +, \times)$ *não é um corpo porque não é anel comutativo unitário.*

5) Determine k por forma que a característica da matriz $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & k & 3 \end{bmatrix}$ seja igual a 3.

Se A é matriz $m \times n$ de característica n prove que o sistema $Ax = b$ tem quando muito uma solução.

R.:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & k & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k-8 & -6 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & k+9 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ k-2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k+6 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k-2 \\ 0 & 0 & k+6 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $k=-6$, *a última linha é nula e a caracteristica de matriz é* 3. *Se* $k \neq -6$, *prosseguindo a condensação, vem:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\dfrac{k+6}{2}\right)(k-2) \end{bmatrix}$$

Para que a caracteristica seja 3 é necessário que $\left(-\dfrac{k+6}{2}\right)(k-2)=0$ *ou* $k=2$.

Portanto os valores de k *que satisfazem ao problema são* $k=-6$ *e* $k=2$.

Como A *é matriz* $m \times n$ *de caracteristica* n, *é* $m \geqq n$. *Se* $m=n$, *o sistema é possivel determinado; se* $m>n$, *o sistema pode ser possivel ou impossivel mas, no primeiro caso, será sempre determinado.*

6) Mostre que

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & b & c & d+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a+bx & c & d+x \end{vmatrix}.$$

R.:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a & d & c & d+x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ b & c & d+x \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a & c & d+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ bx & c & d+x \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a & c & d+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a+bx & c & d+x \end{vmatrix}.$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS I — Ano lectivo 1970-71 — Ponto n.º 6 — 11-10-1971.

5790 — 1) Demonstre que

$$(A \cap B \cap C \cap \tilde{D}) \cup (\tilde{A} \cap C) \cup (\tilde{B} \cap C) \cup (C \cap D) = C.$$

R.: $(A \cap B \cap C \cap \tilde{D}) \cup (\tilde{A} \cap C) \cup (\tilde{B} \cap C) \cup (C \cap D) =$

$= C \cap [(A \cap B \cap \tilde{D}) \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup D] = C \cap [(A \cap B \cap \tilde{D}) \cup \sim$

$\sim (A \cap B \cap D)] = C \cap U = C.$

2) Considere as seguintes relações entre os conjuntos A e B:

a) $A = \{a, l, m\}$, $B = \{i, r, s\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B$: «$x\,y$» é uma palavra da língua portuguesa$\}$.

b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B : 5x + 2y$ é número primo$\}$.

Indique os gráficos das relações e investigue se alguma delas é uma função.

R.: a) $R = \{(a, i), (a, r), (a, s), (l, i), (m, i)\}$.

b) $R = \{(1, 3), (1, 4)\}$.

Nenhuma das relações é uma função.

3) Prove que $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta - i\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$.

Utilizando a fórmula anterior, mostre que $(1+\operatorname{sen}\pi/5 + i\cos\pi/5)^5 + i\,(1+\operatorname{sen}\pi/5 - i\cos\pi/5)^5 = 0$.

R.: *A fórmula justifica-se fácilmente, verificando que* $(1+\operatorname{sen}\theta - i\cos\theta) \times (\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)$ *dá o complexo* $1+\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$.

$\left(\dfrac{1+\operatorname{sen}\pi/5 + i\cos\pi/5}{1+\operatorname{sen}\pi/5 - i\cos\pi/5}\right)^5 = (\operatorname{sen}\pi/5 + i\cos\pi/5)^5 =$

$= (\cos 3\pi/10 + i\operatorname{sen} 3\pi/10)^5 = \cos 3\pi/2 + i\operatorname{sen} 3\pi/2 =$

$= -i$.

4) No conjunto N dos números naturais considere a lei de composição interna *menor múltiplo comum* (*m. m. c.*), isto é, $a * b = m.\,m.\,c.\,(a, b)$.

Em relação a esta lei, estude a associatividade, a comutatividade, a existência de elemento neutro e a existência de oposto. Constitui $(N, *)$ um grupo? Porquê?

R.: *A lei é associativa, comutativa e possui elemento neutro (1). Não possui elemento oposto e, por esta razão,* (N, *) *não é grupo.*

5) Sendo $I+A$ matriz regular, prove que $(I+A)^{-1}$ é permutável com $I-A$.

Estude o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k. \end{cases}$$

R.: *Como* $(I+A)(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}(I+A) = I$,

vem

$$(I+A)^{-1} + A(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1} + (I+A)^{-1}A$$

donde resulta

$$A(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}A.$$

Então

$$\begin{aligned}(I+A)^{-1}(I-A) &= (I+A)^{-1} - (I+A)^{-1}A \\ &= (I+A)^{-1} - A(I+A)^{-1} \\ &= (I-A)(I+A)^{-1}.\end{aligned}$$

O sistema é possível indeterminado de grau 2 com $k=5$; *é impossível com* $k \neq 5$.

6) Sendo $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$, exprima D_n como soma de dois determinantes, por forma a estabelecer a fórmula de recorrência

$$D_n = a_n D_{n-1} + a_1 a_2 \dots a_{n-1}.$$

R.: $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} +$

$+ \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a_n \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} + a_n D_{n-1} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} + a_n D_{n-1}.$

Enunciados e soluções dos n.[os] 5785 a 5790 de Fernando de Jesus

INTRODUÇÃO AOS COMPUTADORES E PROGRAMAÇÃO

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — **Exame Final — 1.ª Chamada — 8 de Julho de 1971.**

I

5791 — 1) Determine as constantes FORTRAN cujas representações binárias internas no computador 360/44 são as seguintes:

a) inteira: 00000000 00000000 00000000 00010100

b) real: 01000010 00100000 00000000 00000000

2) Qual o número de dígitos decimais significativos das constantes FORTRAN de dupla precisão no computador acima referido? Justifique a resposta, sabendo que $\log_{10} 2 = 0{,}30103$.

II

Considere o programa (completo):

```
C     PROGRAMA DE ESTUDO
      DIMENSION L (10), A (3,4)
      READ (5,10) (L (J), J = 1,10)
   10 FORMAT (5I8)
      DO 1 J = 1,3
      GO TO (2,3,4), J
    2 DO 5 K = 1,4
    5 A (J, K) = L (K)
      GO TO 1
    3 DO 6 K = 1, 4,1
    6 A (J, K) = L (K + 4)
      GO TO 1
    4 DO 7 K = 1,4
    7 A (J,K) = A (J - 1, K) + A (J - 2, K)
    1 CONTINUE
      M = 1
    9 WRITE (6,15) A (M,1), A (M,2), A (M,3), A (M,4)
   15 FORMAT (1H , F8. 2,6X, E13. 7,6X, 2F6. 4)
      M = M + 1
      IF (M - 3) 9,9,20
   20 STOP
      END
```

Sendo os valores das componentes do vector L, respectivamente 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, a introduzir como dados,

1. *a*) Quantas instruções constituem o programa apresentado?

b) Qual destas proposições é verdadeira?

A. A coluna 1 de um cartão de programa FORTRAN contém uma letra ou um (espaço em) branco.

B. A coluna 1 de um cartão de programa FORTRAN contém a letra C ou um (espaço em) branco.

C. A coluna 1 de um cartão de programa FORTRAN contém ou um C, ou um espaço em branco ou um dígito.

2. *a*) Quantas instruções executáveis constituem o programa anterior? Exemplifique, com uma instrução deste programa, cada um dos vários tipos de instruções executáveis nele apresentados.

b) Existem instruções de especificação no nosso programa. Quais são e que funções desempenham.

c) Existem instruções de controle no programa apresentado. Diga quais são, agrupando-as por categorias, e descreva a acção de *uma* delas.

d) Qual a acção da variável M no programa dado?

3. *a*) Quantos cartões de dados precisam de ser lidos para definir o vector L? Dê a configuração do primeiro cartão.

b) Apresente num quadro os valores dos vários elementos da matriz calculados durante a execução do programa.

c) Apresente os resultados sob a forma de linhas, simulando a impressora.

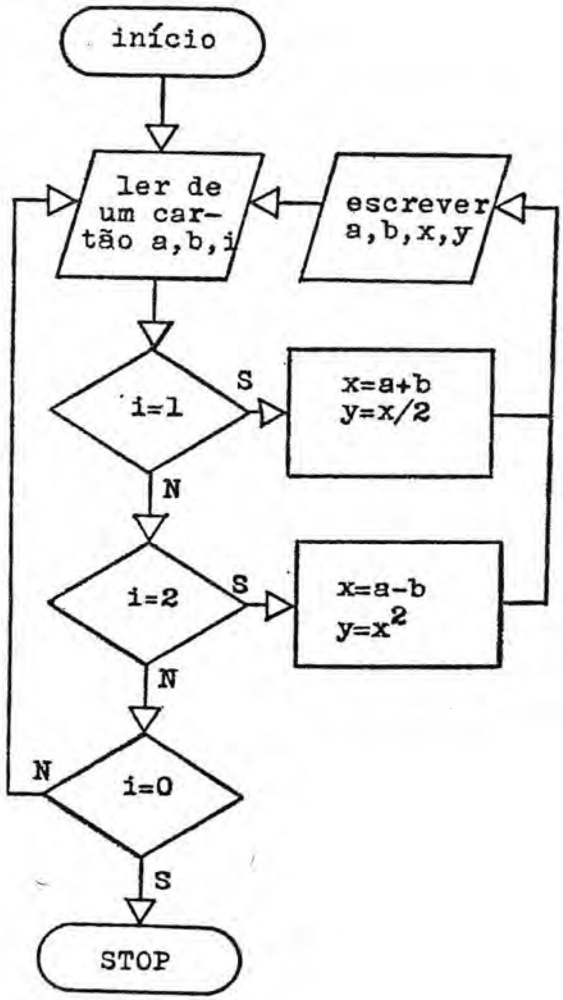
III

Esta parte tem duas opções, A e B; escolha *uma só* de entre elas.

Opção A

1. Elabore o diagrama do programa descrito.

2. Escreva um programa FORTRAN (completo) que resolva o problema esquematizado no diagrama seguinte



Opção B

Elabore um programa capaz de gerar e imprimir uma tabela da multiplicação de dupla entrada, dos dígitos de 1 a 9.

Prèviamente elabore o organigrama deste programa.

ASPECTO DA TABELA:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

I. S. T. — Introdução aos Computadores e Programação — Exame Final — 2.ª Chamada — 13 de Julho de 1971

I

5792 — 1) Considere as constantes FORTRAN -25 (inteira) e 240.125 (real).

Faça os esquemas dos seus registos na memória do computador instalado no Centro de Cálculo da Universidade Técnica de Lisboa.

2) Tendo em atenção a representação interna em vírgula flutuante (precisão simples) no computador 360/44, determine as duas constantes FORTRAN cujos expoentes são zero e cujas mantissas são, respectivamente, a máxima e a mínima admissíveis.

II

1) Considere o seguinte conjunto de instruções:

```
  DIMENSION X (20,20)
  READ (5,1) M,N
  DO 5 I = 1, M
  DO 5 J = 1, N
5 X (I, J) = I + J + I A B S (I — J)
  WRITE  (6,10) ((X(I, J), I = 1, M), J = 1, N)
  STOP
  END
```

a) É necessário acrescentar-lhe pelo menos duas instruções para que constitua um programa.

Diga quais são, escrevendo cada uma delas de forma completa.

b) Tendo em atenção a sua resposta à alínea *a*) faça um desenho do cartão (ou cartões) de dados para M = N = 3.

c) Para M = N = 3 indique os valores que durante a execução do programa anterior vão ser atribuídos aos elementos X (I, J).

d) De acordo ainda com a sua resposta à alínea *a*) indique o aspecto dos resultados na folha de papel da impressora.

III

Esta parte tem duas opções, A e B; escolha *uma só* de entre elas.

Opção A:

Cada uma das instruções do troço de programa seguinte contém algum erro de sintaxe. Indique quais são esses erros e integre as instruções corrigidas num programa de modo a constituir um todo lógico, eventualmente alterando a ordem de duas instruções. A partir do programa completo faça o respectivo diagrama de blocos e indique qual a natureza dos cálculos que se efectuariam com esse programa.

```
  N. = 20
  DIMENSION X (N)
  PRODUTO = 1
  DO 5 I 1, N
  X = I
5 PRODUT = PRODUT. X (I)
  WRITE (6,1), PRODUT
1 FORMAT (1H , F5.2)
  STOP ABC
```

Opção B:

Chama-se sucessão de Fibonnaci a uma sequência de números inteiros, tal que cada termo é obtido adicionando os dois que o precedem, i. e., se fôr 0 o primeiro termo e 1 o 2.º termo vem

0 1 1 2 3 5 8...

Escreva um programa (completo) em FORTRAN para gerar números de uma sucessão de Fibonnaci, imprimindo-os em 5 colunas.

Preveja a hipótese de parar o computador *antes* de se ultrapassar a capacidade máxima dos valores numéricos inteiros que é possível codificar num computador de palavras de 32 bits.

Enunciados dos n.ºs 5791 a 5792 de: J. M. Barbeito, Maria Odete Cadete e J. Marques Henriques

CÁLCULO AUTOMÁTICO

I. S. T. — Cálculo Automático — **Exame Final — Época de Julho — 1.ª Chamada — 9 de Julho de 1971**

I

5793 — *a*) Defina valor e vector próprio de uma matriz de ordem n e enuncie algumas propriedades dos valores e vectores próprios de matrizes reais e simétricas.

b) Exponha sucintamente as ideias básicas do método de Jacobi para a determinação dos valores e vectores próprios de matrizes reais e simétricas. Este método é directo ou iterativo e neste último caso é sempre convergente? Justifique.

II

Escreva um programa em FORTRAN que lhe permita calcular os coeficientes do polinómio quociente da divisão de um polinómio em x de grau n por $x-a$ sendo a uma constante real qualquer.

Qual o tipo de subprograma que escreveu? Como faria a sua chamada no programa principal?

III

Cada uma das instruções do programa seguinte contém um e só um erro propositado de sintaxe:

```
     N/2
     DIMENSION I (N)
     I (1) = 10000,0
     I = 2345
     JSOMA = I (1) + I (2) +
     WRITE (6,1) JSOMA,
     FORMAT (I8)
     GO TO STOP
STOP END
```

a) Corrija (do ponto de vista da sintaxe) o programa acima.

b) Indique qual o resultado da execução deste programa, depois de corrigido.

IV

Analise o segmento de programa seguinte e diga, justificando, qual das instruções 1,2 ou 3 é executada a seguir à instrução IF (pressupoaha que as instruções 1, 2 e 3 são instruções executáveis):

```
I = 2
Z = 2/I**2 - I/4.
IF (Z) 1,2,3
```

I. S. T. — Cálculo Automático — **Exame Final — Época de Julho — 2.ª Chamada — 23 de Julho de 1971**

I

5794 — *a*) Escreva um subprograma em FORTRAN para multiplicar duas matrizes quaisquer, a primeira de M linhas e N colunas e a segunda de N linhas e K colunas. Considere no seu subprograma que as matrizes são dadas por linhas e colunas.

b) O subprograma mencionado na alínea *a*) de que tipo é? Poderá ser de outro tipo? Justifique.

c) Quais as limitações de generalidade impostas pelo facto de se considerarem as matrizes por linhas e colunas em vez de as tomar como um vector de, respectivamente, $M*N$ e $N*K$ componentes?

II

Qual o método que utilizaria para resolver no computador o sistema de equações

$$\begin{aligned} 50x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 &= 35 \\ x_1 + 20x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 20 \\ 2x_1 - x_2 + 40x_3 - x_4 + x_5 &= 41 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 28x_4 - 6x_5 &= 22 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 35x_5 &= 35 \end{aligned}$$

O método que indicou é directo ou iterativo e neste último caso é sempre convergente?

III

Indique um possível formato dos cartões de entrada que utilizaria se o sistema acima tivesse de ser lido, entrando cada uma das linhas (com o respectivo termo independente) num só cartão.

IV

Escreva um programa para resolver o sistema dado, pelo método que enunciou em II e de acordo com o que expôs em III.

I. S. T. — Cálculo Automático — Exame Final — 2.ª Epoca — 16 de Outubro de 1971

I

5795 — *a*) Escreva um subprograma em FORTRAN para, dependendo de um parâmetro que será um valor inteiro, adicionar ou subtrair duas matrizes quaisquer, ambas de M linhas e N colunas. Considere no subprograma que as matrizes são dadas por linhas e colunas.

b) O subprograma que escreveu na alínea *a*) de que tipo é? Poderá ser de outro tipo? Justifique.

c) Quais as limitações de generalidade impostas pelo facto de se considerarem as matrizes por linhas e colunas, em vez de as tomar como vectores de $M*N$ componentes?

d) Indique quais as alterações que seriam necessário introduzir no seu subprograma para considerar as matrizes no caso da alínea *c*).

II

Uma estrutura vectorial possui, no máximo, 100 componentes. Cada uma das primeiras K componentes, excepto a primeira e a K-ésima, devem ser substituídas por

$$A_i = (A_{i-1} + A_i + A_{i+1}) \div 3$$

e posteriormente pretende calcular-se a norma do vector das K componentes transformadas, de acordo com a definição

$$N = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} A_i^2}$$

Escreva um programa em FORTRAN para, a partir dos valores originários das componentes de A em memória, imprimir o valor de N numa impressora de linhas.

III

a) Defina valores e vectores próprios de uma matriz quadrada.

b) Demonstre ou dê um contra exemplo para a afirmação seguinte: «para matriz real os valores próprios definem unìvocamente a matriz».

c) Demonstre qualquer facto que considere importante acerca dos valores ou vectores próprios de matrizes reais e simétricas.

Enunciados dos n.os 5793 a 5795 de J. Marques Henriques

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

OS COMPUTADORES E AS MATEMÁTICAS PURAS

188 — Leech, John (editor) — **Computational Problems in Abstract Algebra** — Proceedings of a Conference held at Oxford under the auspices of the Science Research Council — Pergamon Press, Oxford, 1970.

189 — Atkin, A. O. L. and Birch, B. J. (editors) — **Computers in Number Theory** — Proceedings of the Science Research Council Atlas Symposium No. 2 — Academic Press, London and New York, 1971.

Os dois livros aqui em crítica, embora versem tópicos bem distintos, o primeiro dedicado à Álgebra e o segundo à Teoria dos Números, têm contudo muito mais em comum para além de se tratarem de actas de dois Simpósios organizados pelo Atlas Computer Laboratory da Universidade de Oxford: ambos têm uma linha de rumo comum e visam tópicos de investigação fortemente condicionados ou impulsionados pelo uso de computadores. Por isso mesmo faremos a sua crítica conjuntamente e por se tratar de domínios quase desconhecidos entre nós alongar-nos-emos na exposição mais do que é normal numa simples crítica bibliográfica.

Já há longos anos que vários investigadores têm procurado utilizar computadores com maior ou menor sucesso no campo das Matemáticas Puras. Um dos mais lídimos precursores desta utilização foi, sem dúvida, J. von Neumann, mas devem aqui ser também