Matrices partitionnées en blocs commutatifs

par José Vitória (1)
Lourenço Marques (Moçambique)

Résumé

En travaillant sur des matrices partionnées en blocs commutatifs, on obtient des résultats formellement semblables à la règle de Cramer et au théorème de Rouché; et on donne, à partir de là, la solution de l'équation $\mathbf{A}X=\lambda X$, où λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ et où X est soit un vecteur soit une matrice.

Sumário

Trabalhando com matrizes fraccionadas em blocos comutativos, obtemos resultados formalmente semelhantes à regra de Cramer e ao teorema de Rouché; e damos, a partir daí, a solução da equação $\mathbf{A}X=\lambda X$, em que λ é um valor próprio de $\mathbf{A}$ e em que X é quer um vector quer uma matriz.

I. Introduction, définitions, notations

Dans la pratique, quand on a à résoudre des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles par la méthode des différences finies, la matrice du système est partitionnée en blocs commutatifs et symétriques [5].

Dans cette étude, nous nous intéressons à certains systèmes d'équations linéaires (matricielles), où la matrice du système est partitionnée en blocs commutatifs, qui surgissent, par exemple, quand on a affaire à la résolution simultanée de systèmes d'équations linéaires (algébriques) qui diffèrent seulement par les colonnes des termes indépendants. On n'aura pas besoin de calculer le déterminant de la matrice donnée, mais simplement de savoir si une certaine matrice de l'ordre de ses sous-matrices est non-singulière.

$\mathbf{K}$ désigne le corps des nombres réels ou complexes ($\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$);

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbf{K})$$

désigne la matrice de type (n, n) d'éléments a_{ij} appartenant à $\mathbf{K}$;

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = (x_j) = X \in \mathbf{K}^n \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix} = (b_i) = B \in \mathbf{K}^m$$

vecteurs d'éléments de $\mathbf{K}$;

$$D := \det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1R} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{R1} & \cdots & a_{RR} \end{vmatrix},$$

déterminant principal; $R \leqq n$, rang de la matrice $\mathbf{A}$;

$$D_i := \det \left|\begin{array}{ccc:c:ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{R1} & \cdots & a_{R,i-1} & b_R & a_{R,i+1} & \cdots & a_{RR} \end{array}\right|.$$

$(i=1, \cdots, R)$;

(1) Boursier de la Fondation Calouste Gulbenkian, Lisboa, Portugal.

$$C_j := \det \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1R} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{R1} & \cdots & a_{RR} & b_R \\ a_{j1} & \cdots & a_{jR} & b_j \end{vmatrix}, \ (j = R+1, \cdots, n),$$

déterminant caractéristique; (si $R = n$, C n'est pas défini);

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{vmatrix} = (A_{pq}),$$

$(p=1, \cdots, m;\ q=1, \cdots, n)$, où $A_{pq} \in \mathbf{M}_{s,s}(\mathbf{K})$ et $A_{pq} \cdot A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \cdot A_{pq}$, c'est-à dire, on considère les sous-matrices A_{ij} appartenant à un anneau commutatif (relativement à la multiplication et à l'addition) avec élément unité;

$$\Delta := \operatorname{dev} \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix}$$

désigne la matrice d'ordre s que l'on obtient en développant le déterminant de (A_{ij}), $(i, j = 1, \cdots, r;\ r \leqq \min\ (m, n))$ et en considérant les A_{ij} comme éléments (scalaires);

$$\Delta_i := \widetilde{\operatorname{dev}} \begin{vmatrix} A_{11} \cdots A_{1,i-1} & B_1 & A_{1,i+1} \cdots A_{1r} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ A_{r1} \cdots A_{r,i-1} & B_r & A_{r,i+1} \cdots A_{rr} \end{vmatrix}$$

$(i = 1, \cdots, r)$, désigne la matrice de type (r, s) que l'on obtient en développant le déterminant suivant la «colonne» i (colone de blocs) et en considérant les A_{pq}, $(p=1, \cdots, r;$ $q = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, r)$, et les matrices B_j, $(j = 1, \cdots, r)$ de type (s, t) comme éléments, mais où les facteurs B_j sont toujours à droite; (pour que l'on puisse éffectuer les multiplications$\cdots$);

$$\xi_j := \operatorname{Dev} \begin{vmatrix} A_{11} \cdots A_{1r} & B_1 \\ \cdots & \vdots \\ A_{r1} \cdots A_{rr} & B_r \\ A_{j1} \cdots A_{jr} & B_j \end{vmatrix}, \ (j = r+1, \cdots, n),$$

désigne la matrice obtenue en développant le déterminant suivant la dérnière «colonne», les A_{pq}, $(p = 1, \cdots, r, j;\ q = 1, \cdots, r)$, et les B_i, $(i = 1, \cdots, r, j)$ (ceux-ci apparaîtront à droite) considérés comme éléments.

On définit le «co-facteur» de «l'élément» en position (i, j) comme étant le déterminant de la matrice que l'on obtient en rayant la «ligne» i et la «colonne» j de la matrice en considération, multiplié par $(-1)^{i+j}$.

Désignons par Δ_{ij}, $(i, j = 1, \cdots, n)$, les matrices obtenues en développant les «co-facteurs» des matrices A_{ij}.

EXEMPLE

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}; \ A_{ij} \in \mathbf{M}_{s,s}(\mathbf{K})$$

et commutatives; B_i matrices de type (s, t), $(i = 1, 2, 3)$; Supposons $r = 2$.

$$\Delta := \operatorname{dev} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12} \in \mathbf{M}_{s,s}(\mathbf{K});$$

$$\Delta_1 := \widetilde{\operatorname{dev}} \begin{vmatrix} B_1 & A_{12} \\ B_2 & A_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= A_{22} B_1 - A_{12} B_2 \in \mathbf{M}_{s,t}(\mathbf{K});$$

$$\Delta_2 := \widetilde{\operatorname{dev}} \begin{vmatrix} A_{11} & B_1 \\ A_{21} & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$= A_{11} B_2 - A_{21} B_1 \in \mathbf{M}_{s,t}(\mathbf{K});$$

$$\xi_3 := \operatorname{Dev} \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & 3 & \\ & A_{11} & A_{12} & B_1 & 1 \\ & A_{21} & A_{22} & B_2 & 2 \\ & A_{31} & A_{32} & B_3 & 3 \end{array} =$$

$$= \operatorname{dev} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+3} B_3 +$$

$$+ \operatorname{dev}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3} B_2 +$$

$$+ \operatorname{dev}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3} B_1 =$$

$$= (A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}) B_3 -$$

$$- (A_{11} A_{32} - A_{31} A_{12}) B_2 +$$

$$+ (A_{21} A_{32} - A_{31} A_{22}) B_1 \in \mathsf{M}_{s,t}(\mathsf{K});$$

«co-facteur» de $A_{12} : =$

$$= (-1)^{1+2} \det \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix};$$

$\Delta_{12} : = \operatorname{dev}$ («co-facteur» de A_{12}) $: =$

$$= \operatorname{dev} (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} \operatorname{dev} \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix};$$

II. Résultats intermédiaires (Connus)

Considérons le système

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ (i = 1, \cdots, m).$$

On peut énoncer [4, 1], si le rang de la matrice du système est $r = m = n$:

A. ***Règle de Cramer*** (Mac-Laurin, Bézout [1]).

Tout système de n équations à n inconnues, où le déterminant des coefficients est différent de zéro, admet un système de solutions uniques, données par les formules suivantes:

$$x_i = D^{-1} D_i, \ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Lorsque $r = m < n$, le système est possible indéterminé et les r inconnues principales sont fonctions linéaires des $n - r$ inconnues non-principales.

Lorsque $r < m$, le système est possible si et seulement si $C_j = 0$, $(j = r+1, \cdots, m)$.

Et l'on peut énoncer [4, 7]:

B. ***Théorème de Rouché*** (Cappelli [3]).

Un système d'équations linéaires est possible si et seulement s'il n'y a pas de déterminants caractéristiques ou tous s'annulent.

On a, alors, r étant le rang de la matrice du système:

$$x_i = D^{-1} D_i \ (i = 1, \cdots, r),$$

$n - r$ inconnues arbitraires et

$$C_j = 0, \ (j = r + 1, \cdots, m).$$

Il nous faut un théorème hybride d'abord (1) énoncé par Ingraham [6] et récemment généralisé par Brenner [2]:

C. ***(Ingraham)***

Si $\mathbf{A} = (A_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, et A_{ij} sont des matrices carrées de type (s, s) permutables entre elles et si Δ est la matrice obtenue en dévellopant le déterminant de $\mathbf{A}$ en prennant les A_{ij} comme éléments, alors $\det \mathbf{A} = \det \Delta$.

Remarque. Ingraham a démontré ce théoreme sous une double hypothèse: toutes les sous-matrices A_{ij} sont commutatives et le corps des coefficients est aussi commutatif. Brenner l'a généralisé pour le cas où les matrices ne sont pas commutatives.

Maintenant, considérons l'équation $A x_1 = \lambda_1 x_1$, où $A \in \mathsf{M}_{n,n}(\mathsf{K})$, x_1 est un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre simple λ_1. λ_1 étant simple, la matrice

(1) Ostrowski [8] se réfère aussi à Schur.

$(A - \lambda_1 I)$ admet, au moins, un mineur d'ordre $n-1$ différent de zéro. Sans perdre de la généralité on peut supposer que c'est le déterminant de la sous-matrice principale d'ordre $n-1$ de $(A - \lambda_1 I)$.

De la théorie des équations algébriques, on sait que l'on peut avoir [11, p. 67]:

D.

$$x_1 = \begin{vmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{n1} \\ c_{n2} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{vmatrix}$$

où c_{ni}; *désigne le co-facteur de l'élément de* $(A - \lambda_1 I)$ *dans la position*

$$(n, i), \ (i = 1, 2, \cdots, n).$$

III. Résultats (formellement) semblables à A. et B.

Considérons le système d'équations matricielles linéaires

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} A_{ik} X_k = B_i, (i = 1, 2, \cdots, m),$$

où

$$A_{pq} \in \mathsf{M}_{s,s}(\mathsf{K}), (p=1,2,\cdots,m; q=1,2,\cdots,n)$$

sont des éléments connus de l'anneau commutatif $\mathsf{M}_{s,s}(\mathsf{K})$, (relativement à l'addition et à la multiplication), avec élément unité;

$$B_i \in \mathsf{M}_{s,t}(\mathsf{K}), (i = 1, 2, \cdots, m)$$

sont connus et

$$X_k \in \mathsf{M}_{s,t}(\mathsf{K}), (k = 1, 2, \cdots, n)$$

sont inconnus;

a) Soit d'abord $m = n = r$.

En pré-multipliant les deux membres de (2) par $\Delta_{ij}, (i, j = 1, \cdots, n)$ et en sommant, vient

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ij} A_{ik} X_k = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} B_i, (j=1,2,\cdots,n),$$

et, par définition de Δ, de Δ_{ij} et de Δ_j, $(j = 1, \cdots, n)$, on obtient [9]

$$\Delta X_j = \Delta_j, (j = 1, \cdots, n).$$

D'où $X_j = \Delta^{-1} \Delta_j, (j = 1, 2, \cdots, n)$, si et seulement si Δ est non-singulière.

Toujours pour $m = n = r$, le système (2) admet une solution unique si et seulement si sa matrice $\begin{vmatrix} A_{11} \cdots A_{1n} \\ \cdots\cdots \\ A_{n1} \cdots A_{nn} \end{vmatrix}$ est non-singulière.

Donc, vu le théorème de Ingraham, on peut énoncer:

A 1. *Le système* (2) *admet une unique solution si et seulement si la matrice* Δ *est non-singulière, et la solution est donnée par*

$$X_j = \Delta^{-1} \Delta_j, (j = 1, 2, \cdots, n).$$

b) Considérons maintenant $r = m < n$

Le système (2) peut s'écrire

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{m} A_{ik} X_k = B'_i, (i = 1, \cdots, m)$$

avec

$$B'_i = B_i - \sum_{j=m+1}^{n} A_{ij} X_j, \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

où les matrices X_j, $(j = m+1, \cdots, n)$, sont considérées arbitraires [10].

La matrice de (2) est

$$\begin{vmatrix} A_{11} \cdots A_{1m} \cdots A_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1} \cdots A_{mm} \cdots A_{mn} \end{vmatrix},$$

celle de (3) est

$$\mathbf{A}' = \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix}.$$

Notons par Δ' et Δ'_i les correspondants de Δ et Δ_i (pour A' et B'_i). L'on peut dire:

A 2. *Le système (3) admet la solution* $X_j = (\Delta')^{-1}\Delta'_j, (j = 1, 2, \cdots, m)$, *si et seulement si la matrice* Δ' *est non-singulière. La solutiou dépend évidemment des* $n - m = n - r$ *matrices arbitraires restantes.*

c) Supposons finalement $m > n = r$. Considérons le système (2) et aussi le système

$$(4)\begin{cases} A_{11} \quad X'_1 + \cdots + A_{1n} \quad X'_n = B_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} \quad X'_1 + \cdots + A_{nn} \quad X'_n = B_n \\ A_{n+1,1} X'_1 + \cdots + A_{n+1,n} X'_n + X'_{n+1} = B_{n+1} \\ A_{n+2,1} X'_1 + \cdots + A_{n+2,n} X'_n + X'_{n+2} = B_{n+2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1} \quad X'_1 + \cdots + A_{mn} \quad X'_n + X'_m = B_m \end{cases}$$

La matrice du système (2) est

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & \cdots & A_{1m} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} & \cdots & A_{mm} \end{vmatrix}$$

et celle du système (4) est

$$\mathbf{A}'' = \left|\begin{array}{ccc|ccc} A_{11} & \cdots & A_{1n} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \hline A_{n+1,1} & \cdots & A_{n+1,n} & I & 0 \cdots & 0 \\ A_{n+2,1} & \cdots & A_{n+2,n} & 0 & I \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{m1} & \cdots & A_{m,n} & 0 & 0 \cdots & I \end{array}\right|$$

où I est l'identité de $\mathbf{M}_{s,s}(\mathbf{K})$.

Le système (4) admet une unique solution si et seulement si la matrice $\Delta'' := \operatorname{dev} \mathbf{A}''$ est non-singulière. La solution est donnée par les formules

$$(5) \quad X'_j = (\Delta'')^{-1}\Delta''_j, (j = 1, 2, \cdots, m),$$

où les matrices Δ''_j sont définies par rapport au système (4). De (5) on voit que $X'_j = 0$, $(j = n+1, \cdots, m)$ si et seulement si $\Delta''_j = 0$, $(j = n+1, \cdots, m)$. Mais, lorsque $X'_j = 0$, $(j = n+1, \cdots, m)$, $X'_i = X_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$. On remarquera que, dans le cas du système (4) [10]:

$$\Delta'' = \operatorname{dev}\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta''_j = \widetilde{\operatorname{dev}}\left|\begin{array}{ccc|c|ccc} A_{11} & \cdots & A_{1,j-1} & B_1 & A_{1,j+1} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{n,j-1} & B_n & A_{n,j+1} & \cdots & A_{nn} \end{array}\right|,$$

$(j = 1, 2, \cdots, n)$, et

$$\Delta''_k = \operatorname{Dev}\left|\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \cdots & A_{1n} & B_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} & B_n \\ \hline A_{k1} & \cdots & A_{kn} & B_k \end{array}\right| := \xi''_k, \quad (k = n+1, \cdots m).$$

Donc on peut énoncer:

B 1. *Soit* Δ'' *une matrice non-singulière de type* (s, s). *Le système* (2) *admet une unique solution donnée par*

$$X_i = (\Delta'')^{-1}\Delta''_i, (i = 1, 2, \cdots, n = r),$$

si et seulement si $\xi''_k = 0, (k = n+1, \cdots, m)$;

c'est-à-dire,

Un système d'équations linéaires matricielles est possible si et seulement s'il n'y a pas de matrices «caractéristiques» ou toutes s'annulent.

[Matrices «caractéristiques», par ressemblance formelle avec déterminants caractéristiques].

On peut appeler r le «rang généralisé» de la matrice du système.

IV. Résultats (formellement) semblables à D.

On s'intéresse à la résolution de l'équation $\mathsf{A}X=\lambda X$ où

$$\left|\begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{matrix}\right| = (A_{ij}) = \mathsf{A} \in \mathsf{M}_{ns,ns}(\mathsf{K})$$

est une matrice carrée d'éléments commutatifs $A_{ij} \in \mathsf{M}_{s,s}(\mathsf{K})$; dans un cas,

$$\left|\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{ns}\end{matrix}\right| = X = \left|\begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n\end{matrix}\right| ,$$

où $X_i \in \mathsf{M}_{s,1}(\mathsf{K})$, $(i=1,\cdots,n)$, sont des vecteurs inconnus non tous nuls; dans un autre cas,

$$X = \left|\begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n\end{matrix}\right| , \; X \in \mathsf{M}_{s,s}(\mathsf{K}), \; (i=1,\cdots,n),$$

sont aussi inconnus et non tous nuls.

L'équation matricielle $\mathsf{A}X=\lambda X$, λ étant un nombre réel ou complexe quelconque, peut s'écrire de la forme suivante:

$$(6)\; \begin{cases} (A_{11}-\lambda I)X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n = 0 \\ A_{21}X_1 + (A_{22}-\lambda I)X_2 + \cdots + A_{2n}X_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}X_1 + A_{n2}X_2 + \cdots + (A_{nn}-\lambda I)X_n = 0 \end{cases}$$

(I matrice identité).

On pose

$$\Delta_n^\lambda := \operatorname{dev} \left|\begin{matrix} \Lambda_{11} & A_{12} & \cdots A_{1,n-1} & A_{1n} \\ A_{21} & \Lambda_{22} & \cdots A_{2,n-1} & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \cdots \Lambda_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots \Lambda_{n,n-1} & A_{nn} \end{matrix}\right| := \operatorname{dev} \mathsf{A}_n^\lambda;$$

$$\delta_j^\lambda := \widetilde{\operatorname{dev}} \left|\begin{matrix} \Lambda_{11} & \cdots A_{1,j-1} & -A_{1n}\; X_n & \cdots A_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1,1} & \cdots A_{n-1,j-1} & -A_{n-1,n}\; X_n & \cdots \Lambda_{n-1,n-1} \end{matrix}\right| ,$$

$(j=1,2,\cdots,n-1)$;

$$\xi_n^\lambda := \operatorname{Dev} \left|\begin{array}{cc|c} A_{11} & \cdots A_{1,n-1} & -A_{1n}\; X_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1,1} & \cdots \Lambda^{n-1,n-1} & -A_{n-1,n}\; X_n \\ \hline A_{n1} & \cdots A_{n,n-1} & -\Lambda_{nn}\; X_n \end{array}\right| ,$$

avec $\Lambda_{ii} = A_{ii} - \lambda I$, $(i=1,2,\cdots,n)$.

Par C_{ni}, $(i=1,2,\cdots,n)$ on désigne la matrice obtenue par développement des «co-facteurs» des «éléments» de A_n^λ en position (n,i), $(i=1,2,\cdots,n)$.

a) Cas où l'inconnue est un vecteur

On a à résoudre l'équation 7) $\mathsf{A}X=\lambda X$, où λ est une valeur propre de A. λ étant une valeur propre de A, le vecteur X est différent de zéro, par conséquent la matrice A_n^λ est singulière. (Si et seulement si A_n^λ était non-singulière, on aurait la solution unique $X=0 \in \mathsf{K}^{ns}$).

Par C., Δ_n^λ est singulière. Sans perdre de la généralité on suppose que $\Delta_{n-1}^\lambda := \operatorname{dev} \mathsf{A}_{n-1}^\lambda$ où A_{n-1}^λ est la sous-matrice principale d'ordre $n-1$.

On vérifie aisément que

$$\delta_j^\lambda = C_{nj}X_n, \quad (j=1,2,\cdots,n-1)$$

et

$$\xi_n^\lambda = -\Delta_n^\lambda X_n .$$

Comme X_n est arbitraire (A. 2), $\xi_n^\lambda = 0$

(matrice) si et seulement si $\Delta_n^\lambda = 0$. Et, vu le résultat B 1., on peut énoncer:

D 1. *La solution de l'équation* 7) *est donnée par* $X_j = (\Delta_{n-1}^\lambda)^{-1} C_{nj} X_n$, $(j = 1, 2, \cdots, n-1)$, *si et seulement si la matrice* Δ_{n-1}^λ *est non-singulière et si et seulement* $\Delta_n^\lambda = 0$.

$X_n \in \mathsf{M}_{s,1}(\mathsf{K}) \in \mathsf{K}^s$ étant arbitraire, on peut poser $X_n = \Delta_{n-1}^\lambda K$, où $K \in \mathsf{K}^s$ est un vecteur arbitraire différent de zéro, et l'on obtient

$$X_j = (\Delta_{n-1}^\lambda)^{-1} (C_{nj} \Delta_{n-1}^\lambda) K =$$
$$= ((\Delta_{n-1}^\lambda)^{-1} \Delta_{n-1}^\lambda) C_{nj} K = C_{nj} K,$$
$$(j = 1, \cdots, n-1);$$

Comme $\Delta_{n-1}^\lambda = C_{nn}$, vient $X_j = C_{nj} K$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$.
Et l'on a:

D 2.

$$X = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{n1} K \\ C_{n2} K \\ \vdots \\ C_{nn} K \end{vmatrix} \in \mathsf{K}^{ns}.$$

b) Cas où l'inconnue est une matrice

Considérons la matrice $\mathbf{A}$ du début de ce paragraphe et soit λ un nombre quelconque; soit $Y^T = [Y_1\ Y_2 \cdots Y_n]$ une matrice non nulle où $Y_i \in \mathsf{M}_{s,s}(\mathsf{K})$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, sont inconnus. Soit l'équation

$$8) \qquad \mathbf{A}\, Y = \lambda\, Y.$$

Comme avant, on peut affirmer:

D 3. *Si et seulement si la matrice* Δ_{n-1}^λ *est non-singulière, et si et seulement si* $\Delta_n^\lambda = 0$, *la solution de* 8) *est donnée par*

$$Y_j = (\Delta_{n-1}^\lambda)^{-1} C_{nj} Y_n, \ (j = 1, 2, \cdots, n-1)$$

où Y_n *est une matrice arbitraire.*

On peut poser $Y_n = \Delta_{n-1}^\lambda = C_{nn}$, donc $Y_j = C_{nj}$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$ et, alors, on a:

D 4.

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{n1} \\ C_{n2} \\ \vdots \\ C_{nn} \end{vmatrix}.$$

V. Éxemple numérique.

Les deux systèmes suivants ont la même matrice et seules les colonnes des termes indépendants diffèrent.

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2w = 1 \\ y + 2w = 2 \\ 3x + 3y + 4z + 4w = 3 \\ 3y + 4w = 4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta = 3 \\ \beta + 2\delta = 1 \\ 3\alpha + 3\beta + 4\gamma + 4\delta = 2 \\ 3\beta + 4\delta = 4 \end{cases}.$$

On peut résoudre simultanément ceux deux systèmes, en considérant le système

$$\begin{cases} A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = B_1 \\ A_{21} X_1 + A_{22} X_2 = B_2 \end{cases} \text{ où } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

dont les sous-matrices sont carrées et commutatives;

$$X_1 = \begin{vmatrix} x & \alpha \\ y & \beta \end{vmatrix}, \quad X_2 = \begin{vmatrix} z & \gamma \\ w & \delta \end{vmatrix};$$

et

$$B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}.$$

On aura

$$\Delta := \operatorname{dev} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_1 := \widetilde{\operatorname{dev}} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 3^{\mathbf{B_1}} & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 4^{\mathbf{B_2}} & 0 & 4 \end{array}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -4 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 := \widetilde{\operatorname{dev}} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1^{\mathbf{B_1}} \\ \hline 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 4^{\mathbf{B_2}} \end{array}\right| =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$X_1 = \Delta^{-1} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad X_2 = \Delta^{-1} \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

Considérons, maintenant, simultanément, les deux systèmes

$$i) \begin{cases} x + y + 2z + 2w = 1 \\ \qquad y + 2w = 2 \\ 3x + 3y + 4z + 4w = 3 \\ \qquad 3y + 4w = 4 \\ 2x + 2y + 4z + 4w = 5 \\ \qquad 2y + 4w = 6 \end{cases},$$

$$ii) \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma + 2\delta = 1 \\ \qquad \beta + 2\delta = 2 \\ 3\alpha + 3\beta + 4\gamma + 4\delta = 3 \\ \qquad 3\beta + 4\delta = 4 \\ 2\alpha + 2\beta + 4\gamma + 4\delta = 2 \\ \qquad 2\beta + 4\delta = 4 \end{cases}$$

On aura

$$\xi_3 := \operatorname{Dev} \left|\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline A_{31} & A_{32} & B_3 \end{array}\right| :=$$

$$= \operatorname{Dev} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 6 & 4 \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \\ \mathbf{2} \\ \\ \mathbf{3} \end{array} =$$

$$= \operatorname{dev} \left|\begin{array}{cc|cc} 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right| \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \operatorname{dev} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right| \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \operatorname{dev} \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right| \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -14 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

On peut remarquer, néanmoins, en regardant la 2.e colonne de ξ_3, que le système *ii*) est possible.

VI. Remarque sur l'égalité des déterminants de certaines matrices.

On montre que

E. *Les matrices*

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} \cdots A_{1n} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ A_{n1} \cdots A_{nn} \end{vmatrix} \quad et \quad B = \begin{vmatrix} A_{11}^T \cdots A_{1n}^T \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ A_{n1}^T \cdots A_{nn}^T \end{vmatrix}$$

ont les mêmes déterminants. (A_{ij}^T *est la transposée de* A_{ij}. *Les sous-matrices* A_{ij} *sont commutatives*).

En effet, posant $\alpha := \text{dev}\, B$ et $\Delta := \text{dev}\, A$, vu le théorème de Ingraham, et vu que l'on vérifie aisément que $\alpha^T = \Delta$, on a

$$\det A = \det \Delta = \det \alpha^T = \det \alpha = \det B .$$

RÉFÉRENCES

[1] Boyer, C. B., «*A history of mathematics*», J. Willey, N. York, 1968.

[2] Brenner, J. L., *Applications of the Dieudonné determinant*, Lin. Alg. Appl. **1**, **4** (1968), 511-536.

[3] Cherubino, S. «*Calcolo delle matrici*», Ed. Cremonnese, Roma, 1957.

[4] Dias Agudo, F. R., «*Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*», Vol. I, Lisboa, 1964.

[5] Householder, A. S., *The aproximative solution of matrix problems*, J. A. C. M. **5** (1958), 204-241.

[6] Ingraham, M. H., *A note on determinants*, Bull. A. M. S. **43** (1937); 579-580.

[7] Larrieu, J. «*Principes d'Algèbre Linéaire*», Dunod, Paris, 1965.

[8] Ostrowski, A., *On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks*, J. Math. Anal. Appl. **2** (1961), 161-209.

[9] Vitória, J., *On certain systems of matricial linear equations*, Rev. E. G. U. M., Ser. I-Ciências Mat., Vol. IV, L. Marques, 1967.

[10] ———, *On certain systems of linear matricial equations* (II), Revista de Ciências Matemáticas, **1** (1969), 9-14; (Univ. L. Marques).

[11] Wilkinson, J. H., «*The algebraic eigenvalue problem*», Oxford, 1967.