Geometrização da Lógica de Proposições
(a n dimensões)

por **António José Mendes Silva**
Universidade de Coimbra

I — Introdução e proposições básicas da teoria.

Traduzir a rigorosa linguagem da análise lógica, psra a sugestiva linguagem dos traçados geométricos, foi a ideia central, que presidiu à elaboração deste método, com vista à criação de sistemas de cálculo mais rápidos e intuitivos.

As proposições básicas desta teoria, são, além de proposições de lógica pura, as seguintes condições definidoras do *referencial lógico:*

1 — «0» é a origem do referencial e a intersecção dos semi-eixos «fechados» — Postulado.

2 — Cada eixo é constituído por um *semi-eixo verdadeiro* e por um *semi-eixo falso* — Postulado.

3 — Os pontos dos eixos distintos da origem, representam proposições — Postulado.

A origem (ponto comum aos semi-eixos verdadeiros e falsos) não pode representar proposições-Teorema, pois se assim não fosse, uma proposição poderia ser *simultâneamente* verdadeira e falsa, o que peca contra o princípio da não contradição *aqui admitido.*

4 — Os pontos P dos quadrantes representam pares ordenados, cujos elementos são as suas coordenadas — Postulado.

Deste postulado e do teorema anterior deriva que os quadrantes lógicos são conjuntos disjuntos, pois não contêm os eixos-Corolário, porque se um ponto dos quadrantes, pertencesse a um eixo, pelo menos uma das suas coordenadas (que são proposições) estaria situada na origem, o que vai contra o teorema anterior, pelo qual a origem não pode representar proposições.

5 — *O universo operacional duma operação entre* proposições $x_1 \theta y_1$, é a reunião dos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, que representam os pares ordenados (x_1, y_1), $(\sim x_1, y_1)$, $(\sim x_1, \sim y_1)$ e $(x_1, \sim y_1)$, respectivamente — Postulado.

6 — *O universo operacional duma operação entre expressões proposicionais* $x \theta y$, é a reunião dos quatro quadrantes, q_1, q_2, q_3 e q_4, ou seja: o conjunto dos pontos que representam respectivamente os pares ordenados (x, y), $(\sim x, y)$ $(\sim x, \sim y)$ e $(x, \sim y)$ — Postulado.

Destas duas últimas condições se infere, que as deduções, silogismos e problemas, quer relativos a expressões proporcionais, quer aelativos a proposições, se consideram referidos aos respectivos universos operacionais.

7 — *Domínio operacional* (1) é o conjunto de pontos do universo operacional em que

(1) Para simplificar, adiante diremos apenas *domínio,* em vez de domínio operacional.

a operação considerada é verdadeira — Postulado.

8 — Duas proposições são *contrárias*, isto é, uma é a negação da outra, quando estão situadas no mesmo eixo e ocupam posições simétricas relativamente à origem do referencial — Postulado.

A figura que a seguir apresentamos, ajuda a visualizar as condições do referencial lógico:

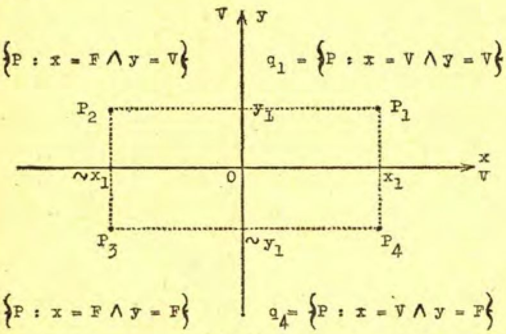

Fig. 1

II — Aplicação ao cálculo. Generalização.

1 — Com base na axiomática exposta, é fácil construir uma tabela com os *domínios operacionais* das principais operações lógicas. A tabela que a seguir apresentamos, foi feita para expressões proposicionais (para proposições a tabela é análoga). Na coluna dos «domínios operacionais» estão justificações entre parênteses.

OPERAÇÃO	DOMÍNIO OPERACIONAL
$x \wedge y$	q_1 (ambos verdadeiros)
$x \dot{\vee} y$	$q_2 \cup q_4$ (um verdadeiro e outro falso)
$x \vee y$	$q_1 \cup q_2 \cup q_4$ (um ou dois verdadeiros)
$x \Rightarrow y$	$q_1 \cup q_2 \cup q_3$ $\{(x \Rightarrow y) = F$ <u>sse</u> $x = V \wedge y = F\}$
$x \Leftrightarrow y$	$q_1 \cup q_3$ (ambos verdadeiros ou ambos falsos)
$\sim(x \;\theta\; y)$	domínio complementar do domínio de $x \;\theta\; y$

É fácil provar, utilizando a *teoria das estruturas algébricas*, que:

$$(A, \vee) \simeq (D, \cup), \ (A, \wedge) \simeq (D, \cap),$$
$$(A, \sim) \simeq (D, \complement), \ (A, \Rightarrow) \simeq (D, \subset),$$
$$(A \Leftrightarrow) \simeq (D, =), \text{ etc.}$$

— *Sendo:* estes pares ordenados *grupoides*, A o conjunto das operações entre proposições, D o conjunto dos domínios operacionais das referidas operações e $\simeq$ a relação de *isomorfia* definida pela aplicação que a uma operação entre proposições, faz corresponder o respectivo domínio operacional[1].

Ora o *princípio de isomorfia*, diz que se (E, θ) e (B, φ) são grupoides isomorfos, todas as propriedades lógicas de θ são verificadas por φ e vice versa; então, pela aplicação deste princípio ao caso presente, provamos que para efeitos de cálculo, os domínios operacionais podem substituir as correspondentes operações.

Obtém-se assim um novo sistema de cálculo, mais intuitivo e mais rápido que o cálculo clássico.

2 — *Vejamos alguns exemplos:*

a) Seja a demonstração de que:

$$x \Rightarrow y = \sim x \vee y .$$

De acordo com a axiomática (e as tabelas que dela derivam) e tendo em conta os isomorfismos apresentados, tem-se (ver fig. 2):

O domínio de $x \Rightarrow y$ é $q_1 \cup q_2 \cup q_3$.

O domínio de $\sim x \, (x = F)$ é $q_2 \cup q_3$.

O domínio de $y \, (y = V)$ é $q_2 \cup q_1$.

Como o domínio de $\sim x \vee y$ (isomorfismo) é a *reunião* dos domínios de $\sim x$ e de y,

[1] O caso das expressões proposicionais é análogo.

tem-se que este domínio é: $q_1 \cup q_2 \cup q_3$, que é também o domínio de $x \underset{\cdot}{\Longrightarrow} y$.

Logo (isomorfismo):

$$x \underset{\cdot}{\Longrightarrow} y = \sim x \vee y$$

c. q. d.

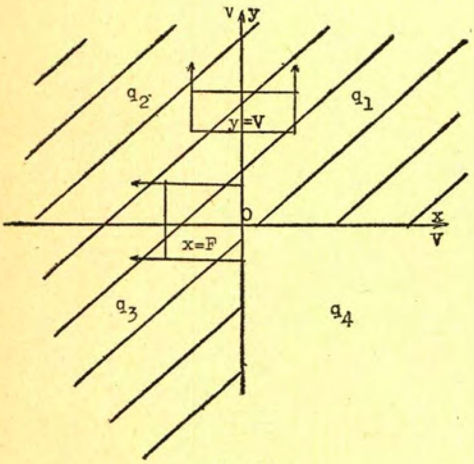

Fig. 2

b) *Demonstração da 2.ª Lei de De Morgan*

O domínio de $x_1 \vee y_1$ é $P_1 \cup P_2 \cup P_4$.
Logo:
O domínio de $\sim(x_1 \vee y_1)$ é P_3.
Mas o domínio de $(x_1 = F \wedge y_1 = F) = \sim x_1 \wedge \sim y_1$ é P_3.
Donde:

$$\sim(x_1 \vee y_1) = \sim x_1 \wedge \sim y_1 .$$

c. q. d.

Anàlogamente se deduzia a 1.ª Lei de De Morgan.

c) Seja a demonstração de que

$$\sim(x_1 \dot{\vee} y_1) = x_1 \Longleftrightarrow y_1 .$$

O domínio de $\sim(x_1 \dot{\vee} y_1)$ é $P_1 \cup P_3$ visto que o de $x_1 \dot{\vee} y_1$ é $P_2 \cup P_4$. Mas como de $x_1 \Longleftrightarrow y_1$ é $P_1 \cup P_3$:

$$\sim(x_1 \dot{\vee} y_1) = x_1 \Longleftrightarrow y_1$$

c. q. d.

d) *Seja o problema*

— Simplificar a expressão:

$$(x \vee y) \wedge (x \underset{\cdot}{\Longleftrightarrow} y) .$$

Traduzindo pelos *isomorfismos apresentados*:

$$(q_1 \cup q_2 \cup q_4) \cap (q_1 \cup q_3) = q_1 ,$$

atendendo a que segundo a axiomática, os quadrantes são conjuntos disjuntos; mas q_1 é o domínio de $x \wedge y$.

e — 1) Vamos demonstrar que o seguinte silogismo está correcto:

$x_1 \Longrightarrow y_1$
$\sim y_1$
$\therefore \sim x_1$

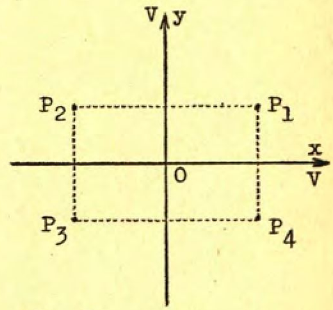

Fig. 3

O domínio de $x_1 \Longrightarrow y_1$ é $P_1 \cup P_2 \cup P_3$. Como (2.ª premissa) $\sim y_1 = V$, tem-se $y_1 = F$. Ora, o único ponto de $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ em que $y = F$ é P_3 e como em P_3 se tem $\sim x_1$, a conclusão é $\sim x_1$.

c. q. d.

e — 2) *Pelo método clássico:*

$$(x_1 \Longrightarrow y_1) = (y_1 \vee \sim x_1)$$

e como:

$$(x_1 \vee y_1) = \sim x_1 \Longrightarrow y_1$$

tem-se que:

$$(y_1 \vee \sim x_1) = (\sim y_1 \Rightarrow \sim x_1)$$

donde pela propriedade transitiva da igualdade:

$$(x_1 \Rightarrow y_1) = (\sim y_1 \Rightarrow \sim x_1) .$$

Portanto a 1.ª premissa do silogismo é igual a:

$$\sim y_1 \Rightarrow \sim x_1 .$$

Ora tendo-se $\sim y_1$ (segunda premissa), por definição de implicação, forçosamente se terá $\sim x_1$.

Da comparação entre os dois métodos se infere que este último é menos intuitivo.

3 — Trabalhámos em L^2, *sendo*

$$L = \{V, F\} .$$

É fácil generalizar a teoria para L^n, ou seja para n *dimensões*. Sendo então os quadrantes dados por ${}^2S_n$ (sequência de dois objectos, os valores lógicos V e F, agrupados n a n), pois neste caso geral temos, não os *dois* elementos dum par ordenado, mas os n elementos duma sequência de n elementos.

Em certos casos é possível (quando as operações são *associativas*) decompor um problema de n dimensões em vários problemas de 2, ou de 3, ou de m (com $m < n$) dimensões.

Para *três dimensões*, é conveniente a representação gráfica em perspectiva:

${}^2S_3 = 2^3 = 8$

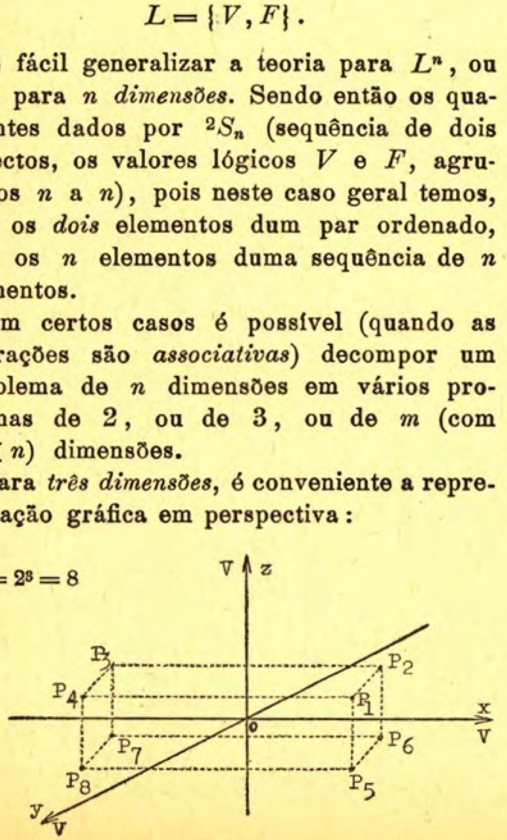

Fig 4

Mas claro que o estudo segundo esta teoria, utilizando Cálculo Combinatório, se pode fazer independentemente de qualquer representação gráfica, sendo então o número e a natureza dos quadrantes dados por ${}^2S_n$, no caso geral de n dimensões.

4 — *Exemplo para três dimensões* (fig. 4):

— Seja «$D(j)$» o *domínio operacional* da operação «j» e U o seu *universo operacional.*

Temos:

$$D(z_1) = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$$

e:

$$D(x_1 \vee y_1) = U - (P_5 \cup P_7) = C_{\cup}(P_5 \cup P_7)$$

donde (vide isomorfismo):

$$D(z_1 \wedge (x_1 \vee y_1)) = P_1 \cup P_2 \cup P_4$$

por outro lado:

$$D(z_1 \wedge x_1) = P_1 \cup P_2$$

e:

$$D(z_1 \wedge y_1) = P_1 \cup P_4$$

donde (vide isomorfismo):

$$D((z_1 \wedge x_1) \vee (z_1 \wedge y_1)) = P_1 \cup P_2 \cup P_4$$

logo:

$$z_1 \wedge (x_1 \vee y_1) = (z_1 \wedge x_1) \vee (z_1 \wedge y_1) .$$

Deduzimos assim, dada a arbitrariedade de

$$x_1 , \; y_1 \text{ e } z_1 ,$$

a propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção inclusiva.