MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Ano lectivo 1969-70 — Ponto n.º 1 — 4-6-1970.

5773 — 1) Prove que

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B).$$

R.: *Provemos em primeiro lugar que*

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B).$$

$$x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \Longrightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \Longrightarrow f(x) \in A \cup B \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(A \cup B).$$

Mostremos agora que

$$f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

$$x \in f^{-1}(A \cup B) \Longrightarrow f(x) \in A \cup B \Longrightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \Longrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

2) Sendo X subconjunto do espaço métrico A, prove que o seu fecho $\overline{X}$ é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm X.

Ache o supremo, o ínfimo e o fecho do conjunto linear

$$X =]1, 3] \cup \left\{x \in R : x = (-1)^n \frac{n}{3n+2} \; (n = 1, 2, \cdots)\right\}.$$

O conjuno X é fechado? É aberto? Porquê?

R.: *Seja* K *a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm* X. *Então, como* $K \supseteq X$, *tem-se* $\overline{K} \supseteq \overline{X}$. K *é fechado e portanto* $K = \overline{K}$. *Assim* $K \supseteq \overline{X}$. *Por outro lado,* $\overline{X}$ *é fechado,* $\overline{X} \supseteq X$ *e assim* $\overline{X}$ *e um dos conjuntos cuja intersecção é* K. *Portanto* $\overline{X} \supseteq K$. *Assim* $K = \overline{X}$.

Para o conjunto linear X *apresentado no problema é* $\sup X = 3$, $\inf X = -1/5$, $\overline{X} = X \cup \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{1}\right\}$.

O conjunto X *não é fechado nem aberto.*

3) Considere os intervalos fechados $I_n = [l_n, L_n]$, suponha que $I_n \supseteq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ e que $L_n - l_n \to 0$. Prove que existe um e um só ponto comum a todos os intervalos I_n.

$$\text{Calcule } \lim_{n=\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{\log n}{n^2}\right) - \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1}.$$

R.: *Tem-se*

$$l_1 \leqq l_2 \leqq \cdots \leqq l_n \leqq \cdots$$
$$L_1 \geqq L_2 \geqq \cdots \geqq L_n \geqq \cdots$$

e, com $l_1 \leqq l_n \leqq L_n \leqq L_1$, *as sucessões* l_n *e* L_n *têm limites finitos e, dado que* $L_n - l_n \to 0$, *tem-se* $\lim l_n = \lim L_n = \xi$.

É claro que ξ *é o único ponto comum a todos os intervalos* I_n. *Se houvesse outro* η, *teríamos* $L_n - l_n \geqq |\xi - \eta| \;\forall\, n \in N$ *e então não era verdade que* $L_n - l_n \to 0$.

$$\lim \frac{\log\left(1 + \frac{\log n}{n^2}\right) - \frac{1}{n}}{\sqrt[n]{a} - 1} = \lim \frac{\eta \frac{\log n}{n^2} - \frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}\log a} - 1} =$$

$$= \lim \frac{\eta \frac{\log n}{n^2} - \frac{1}{n}}{\xi \frac{1}{n} \log a} = \lim \frac{\eta \frac{\log n}{n} - 1}{\xi \log a} = -1/\log a.$$

4) Considere a série Σa_n $(a_n \geqq 0)$. Mostre que, se o conjunto dos termos da sucessão $\sqrt[n]{a_n}$ possui um ponto de acumulação maior do que 1, a série é divergente.

$$\text{Estude a natureza da série } \Sigma \frac{1}{[4 + (-1)^n]^n}.$$

R.: *Se* $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ *tem um ponto de acumulação maior do que* 1, *então* $\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n} > 1$ *e* Σa_n *diverge.*

Como

$$\overline{lim}\sqrt[n]{\frac{1}{[4+(-1)^n]^n}}=\overline{lim}\,\frac{1}{4+(-1)^n}=\frac{1}{3}<1\,,$$

a série dada converge.

5) Sendo f função contínua em $]-\infty,+\infty[$, (inclusivé nos pontos impróprios), mostre que

$$\forall\, x \in R,\ \exists\, k \in R : f(x)+k>0.$$

Na mesma hipótese e supondo $f(-\infty)\cdot f(+\infty)<0$, indique, justificando, o máximo da função definida por $g(x)=\dfrac{1}{a^2+[f(x)]^2}$.

R.: *Como* f *é contínua em* $]-\infty,+\infty[$, *tem-se* $\forall\, x \in R\ |f(x)|<k$ (*ou* $\forall\, x \in R\ -k<f(x)<k$) *donde resulta* $\forall\, x\in R, \exists\, k \in R\ f(x)+k>0$.

Como f *passa por todos os valores desde* $f(-\infty)$ *a* $f(+\infty)$, *toma o valor* 0. *Então*, $max\ g(x)=1/a^2$.

6) Deduza a fórmula que dá a derivada da função definida por $f(x)=\log_a x$ com $a\neq e$.

R: $y=log_a x \Longleftrightarrow x=a^y$

$$\frac{dy}{dx}=1\Big/\frac{dx}{dy}=\frac{1}{a^y\,log\,a}=\frac{1}{x\,log\,a}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Ano lectivo 1969-70 — Ponto n.º 2 — 24-6-1970.

5774 — 1) Sendo a e b números reais, prove que

i) $a\neq 0 \wedge b\neq 0 \Longrightarrow (a\,b)^{-1}=a^{-1}\,b^{-1}$.

ii) $|a|\geq a \qquad |a|\geq -a$.

R: *i*) $(a\,b)(a^{-1}\,b^{-1})=a\,b\,(b^{-1}\,a^{-1})=$

$=a\,(b\,b^{-1})\,a^{-1}=a\,a^{-1}=1$

$(a^{-1}\,b^{-1})(a\,b)=b^{-1}(a^{-1}\,a)\,b=b^{-1}\,b=1.$

Logo, $(a\,b)^{-1}=a^{-1}\,b^{-1}$.

$$ii)\quad |a|=\begin{cases} a & (a\geq 0)\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

Sendo $a\geq 0$, *vem* $-a\leq 0$ *e* $|a|=a\geq 0\geq -a$ *o que dá* $|a|=a$ *e* $|a|\geq -a$; *supondo* $a<0$, *vem* $-a>0$ *e* $|a|=-a>0>a$ *o que dá* $|a|>a$ *e* $|a|=-a$.

Portanto, em todos os casos, $|a|\geq a \wedge |a|\geq -a$.

2) Sendo X subconjunto do espaço métrico A, prove que $\operatorname{int} X$ é a reunião de todos os conjuntos abertos contidos em X.

Ache $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ext} X$, $\sup X$ e $\inf X$ para o conjunto linear

$$X=[1,3]\cup\{5,6\}\cup\left\{x\in R: x=\frac{2n+(-1)^n n}{n+1}\right\}.$$

Justifique as respostas.

R: *Seja* G *a reunião de todos os conjuntos abertos contidos em* X. *Então* G *é aberto. O* $int\,X$ *é conjunto aberto contido em* X *e portanto* $int\,X\subseteq G$. *Se* $x\in G$, *então* x *pertence a um conjunto aberto* $T\ (T\subseteq X)$. *Como* T *é aberto, existe* $\varepsilon>0$ *tal que* $V_\varepsilon(x)\subseteq T$ *e portanto* $V_\varepsilon(x)\subseteq X$ *e* $x\in int\,X$. *Logo* $x\in G \Longrightarrow x\in int\,X$ *e portanto* $G\subseteq int\,X$. *Podemos pois afirmar que* $G=int\,X$.

Para o exercício proposto é

$int\,X=]1,3[$

$ext\,X=R-\left\{[1,3]\cup\{5,6\}\cup\left\{x\in R: x=\dfrac{2k+1}{2k+2}\right\}\right\}$

$sup\,X=6$

$inf\,X=1/2$

3) Supondo que $\lim u_n/v_n=1$ e v_n é sucessão limitada, prove que $u_n-v_n\to 0$.

Dê um exemplo de sucessões u_n e v_n para as quais $u_n/v_n\to 1$ mas $\lim(u_n-v_n)\neq 0$.

Calcule $\lim\limits_{n=\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)^{\frac{\log n}{n^2}}$.

R: $\dfrac{u_n}{v_n}\to 1 \Longleftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n}=1+\alpha_n\ (\alpha_n\to 0)\Longleftrightarrow u_n=v_n+$
$+\alpha_n v_n \Longleftrightarrow u_n-v_n=\alpha_n v_n$.

Ora $\alpha_n v_n\to 0$ *e a proposição está provada.*

Tomando $u_n=n$ *e* $v_n=n+1$, *vem* $u_n/v_n\to 1$ *mas* $u_n-v_n=-1$ *e portanto* u_n-v_n *não tende para* 0 *porque* v_n *não é limitada.*

$$\lim_{n=\infty}\frac{log\,n}{n^2}\,log\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=lim\,\frac{log\,n}{n^2}\,log\left(e^{\frac{1}{n}log\,a}-1\right)=$$

$$=lim\,\frac{log\,n}{n^2}\,log\left(\xi\,\frac{1}{n}\,log\,a\right)$$

$$=lim\,\frac{log\,n}{n^2}\left(log\,\xi+log\,log\,a-log\,n\right)=$$

$$=lim\left[\frac{log\,n}{n^2}\,log\,\xi+\frac{log\,n}{n^2}\,log\,log\,a-\left(\frac{log\,n}{n}\right)^2\right]$$

$=0.$

Portanto, $\lim \left(\sqrt[n]{a}-1\right)^{\frac{\log n}{n^2}} = 1$.

4) Seja p_n uma sucessão de termos positivos e $P_n = p_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \; (a_n > 0)$.

Demonstre que: (i) $\underline{\lim}\, P_n > 0 \Rightarrow \Sigma\, a_n$ converge; (ii) $\overline{\lim}\, P_n < 0 \wedge \Sigma (1/p_n)$ diverg, $\Rightarrow \Sigma\, a_n$ diverge.

Deduza o corolário que se obtém fazendo $p_n = n$ e mostre que se trata de um corolário do critério de Raabe.

Estude a natureza das séries

$$\Sigma \frac{1+(-1)^n}{n} \quad \text{e} \quad \Sigma \frac{1+(-1)^n}{n^2}.$$

R: *Considerando* $P > 0$, *tome-se* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno por forma que* $K = P - \varepsilon > 0$. *Portanto, a partir de certa ordem, é*

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} > K$$

ou

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{p_n}{p_{n+1} + K}$$

o que implica a convergência de $\Sigma\, a_n$ *(1.ª parte do critério de* Kummer*).*

Com $\overline{P} < 0$, *tome-se* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno por forma que* $K = \overline{P} + \varepsilon < 0$ *e então, a partir de certa ordem,*

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} < 0$$

o que dá

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{p_n}{p_{n+1}},$$

condição que, juntamente com a divergência de $\Sigma\,(1/p_n)$, *garante a divergência de* $\Sigma\, a_n$ *(2.ª parte do critério de* Kummer*).*

Fazendo $p_n = n$, *vem*

$$P_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1.$$

$\underline{\lim}\, P_n > 0 \Rightarrow \Sigma\, a_n\, C$, *equivale a afirmar que*

$$\underline{\lim}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 \Rightarrow \Sigma\, a_n\, C.$$

$\overline{\lim}\, P_n < 0 \wedge \Sigma\,(1/n)\, D. \Rightarrow \Sigma\, a_n\, D.$ *equivale a*

$$\overline{\lim}\, n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1 \Rightarrow \Sigma\, a_n\, D.$$

Para $\Sigma \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ *basta notar que a soma dos* $2n$ *primeiros termos é a soma dos* n *primeiros termos da série divergente* $\Sigma \dfrac{1}{n}$ *para garantirmos que a série é divergente; para* $\Sigma \dfrac{1+(-1)^n}{n^2}$, *a soma dos* $2n$ *primeiros é a soma dos* n *primeiros termos de* $\Sigma \dfrac{1}{2n^2}$ *(conv.) e portanto a série converge.*

5) Demonstre que, sendo f função contínua incessantemente crescente em $[a, b]$, a equação $f(x) = k \; (f(a) \leq k \leq f(b))$ admite uma solução única x_0.

R: *Por ser contínua em* $[a,b]$ $\exists\, x_0 \in \,]a,b[\; f(x_0) = k$ *mas como é incessantemente crescente é* $\forall x \neq x_0 \; f(x) \neq f(x_0) = k$ *e portanto* x_0 *é a única solução.*

6) Prove que sendo f função periódica, também f' é periódica.

Se f não-constante tem o período μ, é necessário que f' tenha o período μ? Porquê?

R: $f(x+\mu) = f(x) \Rightarrow f'(x+\mu) = f'(x)$ *e portanto* f' *também é periódica.*

Supondo que a derivada tinha o período $\mu_1 < \mu$, *seria* $\mu = m\,\mu_1$ *e viria* $f'(x+\mu_1) = f'(x)$, *o que implicaria* $f(x+\mu_1) = f(x) + K$.

Então, obter-se-ia $f(x + m\,\mu_1) = f(x) + K\,m$ *ou* $f(x+\mu) = f(x) + K\,m$ *donde resultaria* $K\,m = 0$ *ou* $K = 0$. *Mas então seria* $f(x+\mu_1) = f(x)$ *o que é contrário à hipótese de ser* μ *o período de* f. *Logo a derivada* f' *tem o mesmo período de* f.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Ano lectivo 1969-70 — Ponto n.º 3.

5775 — 1) Sendo n inteiro positivo, prove que

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 2.$$

R.:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} =$$

$$= \left(cis\,\frac{2\pi}{3}\right)^{3n} = cis\, 2n\pi = 1$$

$$\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=$$
$$=\left(cis\,\frac{4\pi}{3}\right)^{3n}=cis\,4\,n\,\pi=1$$

logo

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}+\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=2\,.$$

2) *A* **é o espaço métrico com a distância definida do modo seguinte:**

$$d(x,y)=\begin{cases}0\ (x=y)\\1\ (x\neq y)\end{cases}.$$

Seja $X\subseteq A$. X é aberto? É fechado? É limitado? Justifique as respostas.

Tomando o conjunto linear

$$X=\{1,2,3\}\cup\left\{x\in R: x=\frac{e^n}{n}\ (n=1,2,\cdots)\right\},$$

indique $\operatorname{int}X$, $\operatorname{ext}X$, $\operatorname{front}X$, $\sup X$ e $\inf X$. O conjunto X é fechado? É aberto? Justifique as respostas.

R.: *Atendendo a que $V_\varepsilon(a)=\{a\}$ $(\varepsilon\leq 1)$ e $V_\varepsilon(a)=X$ $(\varepsilon>1)$, é fácil concluir que X é aberto e portanto não é fechado. É claro que o conjunto X é limitado pois $V_\varepsilon(a)=X$ $(\varepsilon>1)$.*

Para o conjunto linear apresentado tem-se: $int\,X=\emptyset$, $ext\,X=R-\{1,2,3\}\cup\left\{x: x=\frac{e^n}{n}\right\}$, $front\ X=X$, $sup\,X=+\infty$, $inf\,X=0$ e X é fechado.

3) Supondo que $u_n-v_n\to 0$ e que $1/v_n$ é sucessão limitada, prove que $\lim u_n/v_n=1$. Dê um exemplo de sucessões u_n e v_n para as quais $u_n-v_n\to 0$ mas $\lim u_n/v_n\neq 1$.

Calcule $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{e^n}$.

R.:

$$lim\,(u_n-v_n)=0\iff u_n-v_n=\alpha_n\ (\alpha_n\to 0)\iff$$
$$\iff u_n=v_n+\alpha_n\iff\frac{u_n}{v_n}=1+\alpha_n\cdot\frac{1}{v_n}$$

donde se conclui fàcilmente, em consequência da hipótese sobre $1/v_n$, que $\frac{u_n}{v_n}\to 1$.

Com $u_n=2/n$ e $v_n=1/n$, vem $u_n-v_n=\frac{1}{n}\to 0$ mas, no entanto, $lim\,\frac{u_n}{v_n}=2$ porque $1/v_n$ não é limitada.

Atendendo a que

$$lim\ e^n\,log\left(1+\frac{1}{n^n}\right)=lim\ e^n\,\eta\,\frac{1}{n^n}=lim\left(\frac{e}{n}\right)^n=0,$$
$$\left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{e^n}\to 1\,.$$

4) Seja Σa_n $(a_n\geq 0)$ uma série convergente e b_n $(b_n\geq 0)$ uma sucessão limitada. Mostre que a série $\Sigma a_n b_n$ é convergente.

Dada a série $\sum\limits_1^\infty\frac{(2x+1)^n}{n(n+2)}$, determine o intervalo de convergência e a natureza nos extremos desse intervalo.

R.: *Como $\frac{a_n b_n}{a_n}=b_n<K$, então a convergência de Σa_n implica a da série $\Sigma a_n b_n$.*

Como $\left|\frac{u_n+1}{u_n}\right|\to(2x+1)$, a série dada converge absolutamente para $|2x+1|<1$ $(-1<x<0)$ e diverge para $|2x+1|>1$ $(x>0\vee x<-1)$.

Para $x=0$, obtém-se a série $\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n(n+2)}$ absolutamente convergente e, para $x=-1$, vem

$$\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1}{n(n+2)}$$

que é também absolutamente convergente.

5) Sendo f função contínua e biunívoca em $[a,b]$, prove que f é incessantemente crescente ou decrescente em $[a,b]$.

R.: *Sendo f biunívoca em $[a,b]$, vem $f(a)\neq f(b)$. Suponhamos que $f(a)<f(b)$. Provaremos que f é crescente em $[a,b]$.*

Sejam $x_1,x_2\in[a,b]$ tais que $x_1<x_2$. Deveremos ter $f(x_1)<f(x_2)$. Com efeito, se fosse $f(x_1)=f(x_2)$, a função não era biunívoca. Se fosse $f(x_1)>f(x_2)$, duas hipóteses teríamos de considerar: $f(x_2)<f(a)$ e $f(x_2)>f(a)$. No primeiro caso, vinha $f(x_2)<f(a)<f(b)$ e portanto existiria $\overline{x}\in]x_2,a[$ tal que $f(\overline{x})=f(a)$, o que é absurdo em face da biunivocidade; no segundo caso, ter-se-ia $f(a)<f(x_2)<f(x_1)$ e, anàlogamente, existiria $\overline{x}\in]a,x_1[$ tal que $f(\overline{x})=f(x_2)$, o que é absurdo pela mesma razão.

Logo, podemos efectivamente concluir que

$$\forall\ x_1,x_2\in[a,b]\ \ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\,.$$

Anàlogamente se provaria a proposição na hipótese $f(a) > f(b)$.

6) Sendo k parâmetro real e sabendo que a equação da tangente à curva representativa de $y = \frac{x+k}{x}$ é $x - 4y - 4 = 0$, ache o valor do parâmetro k e as coordenadas do ponto de tangência.

R.: $y' = -\frac{k}{x^2}$ *e portanto terá de ser*

$$\begin{cases} -\frac{k}{x^2} = \frac{1}{4} \\ y = 1 + \frac{k}{x} \\ x - 4y - 4 = 0 \end{cases},$$

sistema cuja solução é

$$\begin{cases} k = -4 \\ y = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Ano lectivo de 1969/70 — Epoca de Outubro — Ponto n.º 4 — 1-10-1970.

5776 — 1) Demonstre que $(A - C) \cup (B - D) \subseteq \subseteq (A \cup B) - (C \cap D)$. Dê um exemplo em que se tenha $(A - C) \cup (B - D) = (A \cup B) - (C \cap D)$.

R:

$$(A - C) \cup (B - D) = (A \cap \tilde{C}) \cup (B \cap \tilde{D}) = (A \cup B) \cap$$
$$\cap (A \cup \tilde{D}) \cap (\tilde{C} \cup B) \cap (\tilde{C} \cup \tilde{D}) \subseteq (A \cup B) \cap (\tilde{C} \cup \tilde{B}) =$$
$$= (A \cup B) \cap [\sim (C \cap D)] = (A \cup B) - (C \cap D).$$

Tomando

$$U = \{1,2,3,4,5\}, A = \{1,2\}, B = \{2,3,4\},$$
$$C = \{2,3\}, D = \{1,2,3\}$$

vem

$$(A - C) \cup (B - D) = (A \cup B) - (C \cap D) = \{1,4\}.$$

2) Sendo X subconjunto do espaço métrico A, prove que $\operatorname{int} X = \operatorname{est} \tilde{X}$ e $\operatorname{front} X = \operatorname{front} \tilde{X}$.

Determine a e b por forma que o conjunto linear $X = \{3, a\} \cup \{x \in R : x = \frac{bn}{n+2} (n = 1, 2, \cdots)\}$ tenha o derivado $X' = \{3\}$ e $\inf X = 1/2$. Qual é o $\sup X$? X é fechado? É aberto? Justifique as respostas.

R: a *p. int.* $X \Rightarrow V_\varepsilon(a) \subseteq X \Rightarrow V_\varepsilon(a) \cap \tilde{X} = \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow$ a *p. ext.* X; a *p. ext.* $\tilde{X} \Rightarrow V_\varepsilon(a) \cap \tilde{X} = \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow V_\varepsilon(a) \subseteq X \Rightarrow$ a *p. int.* X.

Se a *é ponto fronteiro de* X (*de* $\tilde{X}$) *em qualquer sua vizinhança, por mais pequeno que seja o valor de* ε, *há sempre pontos de* X *e de* $\tilde{X}$. *Logo,* a *também é ponto fronteiro de* $\tilde{X}$ (*de* X).

Como $\lim_{n=\infty} \frac{bn}{n+2} = b$, *terá de ser* $b = 3$. *inf* $X = 1/2 \Rightarrow a = 1/2$; *sup* $X = 3$ *e* X *é fechado.*

3) Dada a sucessão u_n, suponha que u_{2n}, u_{2n+1} e u_{3n} são convergentes. Prove que u_n converge.

Diga qual é o conjunto dos sublimites da sucessão

$$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Indique, justificando, os seus limites máximo e mínimo.

R: *Supondo que* $u_{2n} \to u$, $u_{2n+1} \to v$ *e* $u_{3n} \to w$, *notemos que* $3n$ *é número par* (*quando* n *for par*) *ou ímpar* (*quando* n *for ímpar*) *e portanto as subsucessões de* u_{3n} *que se obtêm com* n *par e* n *ímpar são, respectivamente, subsucessões de* u_{2n} e u_{2n+1}. *Podemos então garantir que* $u = v = w$ *e portanto* u_n *converge para* u.

O conjunto dos sublimites da sucessão dada é

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, 0\right\}$$

Os limites máximo e mínimo são, respectivamente, 1 *e* 0.

4) Prove que, sendo $u_n > -1$ $(n \geq 0)$, a convergência de $\sum_0^\infty u_n$ e $\sum_0^\infty u_n^2$ implica a convergência de $\sum_0^\infty \log(1 + u_n)$.

Discuta a natureza da série

$$\sum_{=}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} (1 - x^2)^n.$$

R: *Notando que* $u_n \to 0$, $\log(1 + u_n) = u_n - \lambda u_n^2$ *onde* $\lambda \to \frac{1}{2}$ *quando* $u_n \to 0$.

Tem-se então $\sum_{0}^{\infty} \log(1+u_n) = \sum_{0}^{\infty} u_n - \sum_{0}^{\infty} \lambda u_n^2$.

Ora como $\sum_{0}^{\infty} u_n$ *converge e* $\sum_{0}^{\infty} \lambda u_n^2$ *também converge, porque* $\frac{\lambda u_n^2}{u_n^2} \to \frac{1}{2} \neq 0, \infty$, *a série* $\sum_{0}^{\infty} \log(1+u_n)$ (*soma de séries convergentes*) *também converge.*

Para a série $\sum_{1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} (1-x^2)^n$ *vem*

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2n+3}{2n+2} |1-x^2| \to |1-x^2|$$

Como

$$|1-x^2| < 1 \Longleftrightarrow -1 < 1-x^2 < 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 < 1 \Longleftrightarrow x \neq 0 \\ 1-x^2 > -1 \Longleftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

a série converge para $-\sqrt{2} < x < 0$ *e* $0 < x < \sqrt{2}$.

Por outro lado,

$$|1-x^2| > 1 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-x^2 > 1 \ \ (\textit{impossível}) \\ 1-x^2 < -1 \Longleftrightarrow x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \end{cases}$$

e portanto a série diverge para $x < -\sqrt{2}$ *e* $x > \sqrt{2}$.

Para $x = 0$, *vem a série* $\sum_{1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$ *que é divergente pois* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+3}{2n+1} \to 1+0$.

Para $x = \pm\sqrt{2}$ *vem* $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$ *e, como* $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{2n+3}{2n+2} > 1$, *o seu termo geral não tende para zero e portanto a série diverge.*

5) Seja f contínua em $[a, b]$ e admita que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Prove que, sob estas condições, a equação $f(x) = x$ tem sempre uma raiz em $[a, b]$. Exemplifique com $f(x) = \sqrt{x}$ em $[0, 4]$.

R.: *Nos casos em que* $f(a) = a$ *ou* $f(b) = b$ *a proposição é óbvia. Se for* $f(a) > a$ *e* $f(b) < b$ *a função* $g(x) = f(x) - x$ *toma sinais contrários em* a *e* b *e portanto* $g(x)$ *anula-se num ponto* c *interior* (*teorema de* Bolzano-Cauchy): $g(c) = 0$ *ou* $f(c) = c$.

Com $f(x) = \sqrt{x}$ *em* $[0, 4]$ *a equação* $\sqrt{x} = x$ *tem as raízes* $x = 0$ *e* $x = 1$.

6) A função F satisfaz à condição $F(c-0) < F(c) < F(c+0)$ no ponto interior c do seu domínio. Estude a existência de $F'(c)$.

R.: $F'_e(c) = \lim_{x=c-0} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = +\infty$

$$F'_d(c) = \lim_{x=c+0} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = +\infty$$

Portanto, no ponto $x = c$ *vem* $F'(c) = +\infty$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Ano lectivo de 1969/70 — Epoca de Outubro — Ponto n.º 5 — 1-10-1970.

5777 — 1) Considere as aplicações de R em R definidas por $f(x) = x^5$, $g(x) = x - 1$ e $h(x) = x$. Determine $f \circ g$, $g \circ f$, $(f \circ g) \circ h$, $f \circ (g \circ h)$, $g^{-1} \circ f^{-1}$ e $(f \circ g)^{-1}$.

R.: $f \circ g = (x-1)^5$, $g \circ f = x^5 - 1$, $(f \circ g) \circ h = (x-1)^5$, $f \circ (g \circ h) = (x-1)^5$ $g^{-1} \circ f^{-1} = 1 + \sqrt[5]{y}$, $(f \circ g)^{-1} = 1 + \sqrt[5]{y}$.

2) Prove as proposições seguintes:

i) Sendo a um número real qualquer e $X = \{x : x$ é racional $\wedge x < a\}$, então $a = \sup X$.

ii) Sendo A conjunto linear não-vazio limitado inferiormente e B o conjunto dos números $-x$ tais que $x \in A$, então B é superiormente limitado e $\inf A = -\sup B$.

Indique o conjunto derivado, o supremo e o ínfimo do conjunto linear

$$X = \left\{ x : x = (-1)^n + \frac{1}{m} \ (m, n = 1, 2, \cdots) \right\}.$$

R.:

i) *O número* a *é majorante de* X *e, como* $\forall \delta > 0, \exists x \in Q \ \ a - \delta < x < a$, *é evidente que* $a = \sup X$

ii) *Sendo* $l = \inf A$, *tem-se* $\forall x \in A \ x \geq l$ *e* $\forall \delta > 0, \exists x' \in A : x' < l + \delta$. *Portanto,* $\forall -x \in B \ -x \leq -l$ *e* $\forall \delta > 0, \exists -x' \in B \ -x' > -l - \delta$. *Logo* $-l$ *é o* $\sup B$.

Para $X = \left\{ x : x = (-1)^n + \frac{1}{m} (m, n = 1, 2, \cdots) \right\}$ *tem-se* $X' = \{-1, 1\} \cup X$, $\inf X = -1$, $\sup X = 2$.

3) Mostre que, sendo $u_n > 0$ e $u_{n+1}/u_n \leq k < 1$ (k constante) $\forall n \in N$, então $\lim u_n = 0$. O que

se pode afirmar quando se sabe apenas que $u_{n+1}/u_n < 1$? Justifique.

Sendo $u_n = n!/n^n$, indique o $\lim u_n$ a partir de $\lim u_{n+1}/u_n$.

R.: $u_{n+1}/u_n \leqq k < 1 \Rightarrow \sum u_n$ *converge* $\Rightarrow u_n \to 0$. *Quando* $u_{n+1}/u_n < 1$ *apenas se pode afirmar que* $u_{n+1} < u_n$ *e portanto* $u_n \to u \geqq 0$.

Para $u_n = n!/n^n$ *vem* $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1$ *e portanto* $\lim u_n = 0$.

4) Sendo $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ e $b_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$, prove que $b_1 + b_2 + \cdots + b_n > a_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$.

Tomando a série Σa_n, aproveito o resultado anterior para justificar que Σb_n é sempre divergente.

Estude a natureza da série

$$\Sigma \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}.$$

R: *Como*

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$b_3 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

resulta imediatamente

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n > a_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Esta desigualdade serve para provar que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \to +\infty$$

pois

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty.$$

Para estudar a série dada, notemos que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{p+n+1}{q+n+1} \to 1$$

e o critério da razão não explica a natureza da série. Como

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{(q-p)\,n}{n+p+1} \to q - p,$$

o critério de Raabe, *permite concluir que a série converge com* $q > p + 1$ *e diverge com* $q \leqq p + 1$.

5) Seja f contínua no intervalo $[0, 2\pi]$ tal que $f(0) = f(2\pi)$. Prove que existe um ponto c nesse intervalo tal que $f(c) = f(c + \pi)$. Sugestão: considere a função auxiliar $g(x) = f(x) - f(x + \pi)$.

R: *Observemos que* $g(0) = f(0) - f(\pi)$ *e* $g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0)$. *Se* $f(0) = f(\pi)$, *a proposição é óbvia. Com* $f(0) \neq f(\pi)$, *a função contínua* $g(x)$ *tem sinais contrários em* 0 *e* π *e o teorema de* Bolzano-Cauchy *garante que existe um ponto* c *entre* 0 *e* π *tal que* $g(c) = f(c) - f(c + \pi) = 0$.

6) Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1).. \end{cases}$$

Prove que f é diferenciável para $x = 1$.

R: *Como*

$$f'(1) = \lim_{x=1} \frac{\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} - 2}{x-1} = \lim_{x=1} \frac{x-1-2(\sqrt{x}-1)}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} =$$

$$= \lim_{x=1} \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x-1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x=1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2},$$

a função é diferenciável.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Ano lectivo de 1969-70 — Época de Outubro — Ponto n.º 6 — 6-10-1970.

5778 — 1) Prove as seguintes propriedades no conjunto R dos números reais:

i) $-(-a) = a$

ii) $a \gtreqless b \Longleftrightarrow -a \lesseqgtr -b$.

R: i) *Dado o número real* $a = [A_1, A_2]$, *tem-se* $-a = [-A_2, -A_1]$ *e é claro que* $-(-a) = [A_1, A_2]$.

ii) *Sendo* $a = [A_1, A_2]$ *e* $b = [B_1, B_2]$, *tem-se* $a = b \Longleftrightarrow A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2$ *mas então também* $-A_1 = -B_1 \wedge -A_2 = -B_2$ *o que mostra que* $-a = -b$.

Supondo, por exemplo, $a > b$ *tem-se* $A_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ *o que indica que*

$$-b = [-B_2, -B_1] > [-A_2, -A_1] = -a .$$

2) Prove por indução que todo o conjunto linear finito tem mínimo e máximo. Mostre que

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|]$$

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b - |a - b|]$$

e prove também que

$$\max\{a + c, b + d\} \leqq \max\{a, b\} + \max\{c, d\} .$$

Ache o supremo e o ínfimo de

$$\{x \in R : (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0\}$$

com

$$a < b < c < d .$$

R.: *A proposição é óbvia para um conjunto de dois elementos. Supondo que a propriedade é verdadeira para um conjunto de* m *elementos, se tomarmos um conjunto com* m + 1 *elementos e considerarmos um seu subconjunto de* m *elementos, o mínimo existe. De facto, é o menor de dois elementos: o mínimo do subconjunto e o elemento que lhe não pertence.* Mutatis mutandis, *o raciocínio aplica-se ao máximo.*

Supondo

$$a \leqq b ,\ \max\{a, b\} = a = \frac{1}{2}(a + b + a - b) .$$

Com $a \leqq b$, *vem*

$$\max\{a, b\} = b = \frac{1}{2}(a + b + b - a) .$$

Anàlogamente se prova que

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b - |a - b|] .$$

$$\max\{a + c, b + d\} =$$

$$= \frac{1}{2}[(a + c) + (b + d) + |(a + c) - (b + d)|] \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}[(a + c) + (b + d) + |a - b| + |c - d|] =$$

$$= \frac{1}{2}[a + b + |a - b|] + \frac{1}{2}[c + d + |c - d|] =$$

$$= \max\{a, b\} + \max\{c, d\} .$$

Para o conjunto

$$X = \{x \in R : (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) < 0\} ,$$

vem $\sup X = d$ *e* $\inf X = a$.

3) Dada a sucessão $a, a + b, 1 + 1/2, a, a + b, 1 + 1/3, a, a + b, 1 + 1/4, \cdots$ determine os números a e b por forma que a sucessão seja convergente. Justifique.

Admitindo que $u_n \to u$ e $v_n \to v$, mostre que, exceptuando os casos $(u = 1, v = \infty)$, $(u = \infty, v = 0)$ e $(u = 0, v = 0)$, a sucessão $w_n = u_n^{v_n}$ $(u_n > 0)$ possui o limite u^v.

Calcule $\lim \left(1 + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}\right)^n$.

R.: $a = 1$ *e* $b = 0$.

Notando que $\log w_n = v_n \log u_n \to v \log u$, *fàcilmente se conclui que* $w_n \to u^v$.

$$n \log\left(1 + 2\, tg \frac{1}{n}\right) = 2\, n\, \eta\, tg \frac{1}{n} =$$

$$= 2\, \eta \frac{sen \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{1}{n}} \to 2$$

e portanto

$$\left(1 + 2\, tg \frac{1}{n}\right)^n \to e^2 .$$

4) Dada a série Σu_n, demonstre que

i) $|u_{n+1}/u_n| \leqq h < 1 \Longrightarrow \Sigma u_n$ é absolutamente convergente.

ii) $|u_{n+1}/u_n| \geqq 1 \Longrightarrow \Sigma u_n$ é divergente.

Estude a natureza da série de termo geral

$$u_n = \frac{a^n}{(1 + a)(1 + a^2) \cdots (1 + a_n)} \quad (a > 0) .$$

R.:

$|u_{n+1}/u_n| \leqq h < 1 \Rightarrow \Sigma |u_n|$ *conv.* $\Rightarrow \Sigma u_n$ *conv. absol.*

$|u_{n+1}/u_n| \geqq 1 \Rightarrow \Sigma |u_n|$ *div* $\Rightarrow u_n$ *não é evanescente* $\Rightarrow \Sigma u_n$ *div*.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{1+a^{n+1}} \to \begin{cases} a \ (a<1) \\ 1/2 \ (a=1) \\ 0 \ (a>1) \end{cases}$$

e o critério da razão permite concluir que a série converge para todos os valores de a.

5) Sendo f monótona em $[a, b]$, justifique que f só pode possuir descontinuidades de 1.ª espécie nesse intervalo. Estude a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (x \text{ rac.}) \\ x \ (x \text{ irrac.}) \end{cases}.$$

R.: *Uma função monótona tem sempre limites laterais nos pontos de* $[a, b]$ *e portanto só pode possuir descontinuidades de 1.ª espécie.*

A função

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ (x \ \textit{rac.}) \\ x \ (x \ \textit{irrac.}) \end{cases}$$

é contínua para $x = 0$ *pois* $|f(x) - f(0)| = |x|$. *Em todos os outros pontos apresenta descontinuidades de 2.ª espécie.*

6) Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} \ (x<0) \\ \sqrt{x} \ (x \geqq 0) \end{cases}$$

e calcule $g'(0)$. Esboce a imagem da função na vizinhança de $x = 0$.

R.: *Notando que*

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{-x}} \ (x<0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ (x>0) \end{cases}$$

resulta $g'(0) = \mp \infty$.

I. S. C. E. F — Matemáticas Gerais — Exame final — Ano lectivo de 1969-70 — Época de Outubro — Ponto n.º 7 — 6-10-1970.

5779 — 1) Prove a seguinte propriedade: se $a, b \in R$ e $a > b$, então $a + c > b + c \ \forall c \in R$.

R.: *Com efeito, seja* $a = [A_1, A_2]$, $b = [B_1, B_2]$, $c = [C_1, C_2]$, $a + c = [D_1, D_2]$ *e* $b + c = [E_1, E_2]$. *Como* $a > b$, *existe* $a'_1 \in A_1$ *e* $b'_2 \in B_2$ *tais que* $a'_1 > b'_2$ *ou* $a'_1 - b'_2 > 0$. *Então, poderemos determinar* $c'_1 \in C_1$ *e* $c_2 \in C_2$ *tais que* $c'_2 - c'_1 < a'_1 - b'_2$ *ou* $b'_2 + c'_2 < a'_1 + c'_1$. *Mas* $b'_2 + c'_2 \in E_2$ *e* $a'_1 + c'_1 \in D_1$ *e portanto* $a + c > b + c$.

2) Prove que λ é ponto de acumulação de A se e só se em qualquer vizinhança de λ existe pelo menos um elemento de A distinto de λ.

Mostre que $\sup A = \sup \overline{A}$, onde $\overline{A}$ designa o fecho de A. Indique dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Indique o ínfimo, o supremo e o fecho do conjunto $X = \{x \in R : x = n^{(-1)^m} \ (m, n = 1, 2, \cdots)\}$.

R.: *Se* λ *é ponto de acumulação de* A, *numa* $V_\varepsilon(\lambda)$, *por menor que seja* ε, *existe uma infinidade de elementos de* A *e portanto existe sempre um elemento de* A *distinto de* λ. *Recìprocamente, se em qualquer* $V_\varepsilon(\lambda)$ *existe um elemento de* A *distinto de* λ, *há uma infinidade de elementos de* A *em qualquer* $V_\varepsilon(\lambda)$.

Notando que $\overline{A} = A \cup A'$, *basta examinar as hipóteses* $\sup \overline{A} > \sup A$ *e* $\sup A > \sup \overline{A}$. *No primeiro caso haveria* $\overline{a} > \sup A$, *o que é absurdo; no segundo caso, haveria* $a > \sup \overline{A}$ *que é uma contradição. Logo* $\sup A = \sup \overline{A}$.

Sendo $A =]a, b[$ *e* $B =]b, c]$ *vem* $A \cap B = \emptyset$ *e* $\overline{A} \cap \overline{B} = \{b\}$. $\inf X = 0$, $\sup X = +\infty$, $\overline{X} = X \cup \{0\}$.

3) Indique, justificando, quais das proposições seguintes são verdadeiras:

i) Se $u_{2n} \to u$ e $u_{2n+1} \to v$, u e v são os únicos sublimites de u_n.

ii) Se o conjunto dos termos de uma sucessão não tem máximo nem mínimo, a sucessão é divergente.

iii) Se $\forall n \in N \ \ u_n > 0 \wedge u_n \to 0$, então u_n é decrescente.

Calcule $\lim n \left(\sqrt[3]{2 + \dfrac{1}{n}} - \sqrt[3]{2} \right)$.

R.: *A proposição* i) *é òbviamente verdadeira. Para* ii) *basta notar que o ínfimo e o supremo de* (u_n) *são pontos de acumulação, e portanto sublimites de* u_n, *para provar que ii) é verdadeira. Para iii), observemos que* $u_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{n} > 0$ *é evanescente e no entanto não é decrescente. Logo iii) é falsa.*

$$n\left(\sqrt[3]{2+\frac{1}{n}}-\sqrt[3]{2}\right)=n\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{2n}}-1\right)=$$

$$=n\sqrt[3]{2}\,\frac{1}{3}\,\xi\,\frac{1}{2n}\to\frac{\sqrt[3]{2}}{6}.$$

4) Se a série Σa_n $(a_n \geqq 0)$ é divergente e S_n designa a soma dos seus n primeiros termos, prove que $\Sigma(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$ também diverge.

Estude a natureza das séries

$$\sum_0^\infty (-1)^{n+1} e^{-n\,\mathrm{sen}\,x} \quad \text{e} \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n!\,x^n}.$$

R.: *Se* Σa_n *diverge, então* $S_n \to +\infty$ *e a série de* Mengoli $\Sigma(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$ *também diverge.*

Notando que $\sum\limits_0^\infty (-1)^{n+1} e^{-n\,sen\,x}$ *é série geométrica de razão* $-e^{-sen\,x}$*, ela será convergente se e só se* $\frac{1}{e^{sen\,x}}<1$ *ou* $sen\,x>0$*, isto é, para* $2k\pi<x<$ $<(2k+1)\pi$*. A série de potências* $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n!\,x^n}$ *converge absolutamente para* $x\neq 0$.

5)

i) Dê exemplo de uma função contínua num conjunto fechado limitado que não tome todos os valores desde o mínimo ao máximo.

ii) Represente geomètricamente uma função f contínua em $[a,b]$ excepto no ponto interior c onde possui uma descontinuidade de primeira espécie com $f(c-0)<f(c)<f(c+0)$. Calcule $f'(c)$ para esta função.

R.: i) $f(x)=\begin{cases}1 & (0\leqq x\leqq 1)\\ 2 & (x=2)\end{cases}$

ii)

$f'_d(c)=+\infty$ *e* $f'_e(c)=+\infty$, *isto é,* $f'(c)=+\infty$.

6) Prove que, sendo g diferenciável para $x=a$, então

$$\lim_{h=0}\frac{g(a+h)-g(a-h)}{2h}=g'(a)$$

R.: *Por definição de diferenciabilidade podemos escrever*

$$g(a+h)-g(a)=h\,[g'(a)+\alpha] \quad (\lim_{h=0}\alpha=0)$$

$$g(a-h)-g(a)=-h\,[g'(a)+\beta] \quad (\lim_{h=0}\beta=0)$$

Subtraindo membro a membro, vem

$$g(a+h)-g(a-h)=2h\,g'(a)+h(\alpha+\beta)$$

ou

$$\frac{g(a+h)-g(a-h)}{2h}=g'(a)+\frac{\alpha+\beta}{2},$$

o que prova a proposição.

Enunciados e soluções dos n.os 5773 a 5779 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Ponto N.º 1—7-1-70.

5780 — 1) Justificando cuidadosamente as respostas, indique se são:

a) reflexivas,

b) simétricas,

c) transitivas

as relações F, G e H, definidas em R pela forma seguinte:

$x\,F\,y \Longleftrightarrow |x-y|>0$

$x\,G\,y \Longleftrightarrow x^2-y^2 \in Q$ (Q é o conjunto dos racionais)

$x\,H\,y \Longleftrightarrow \underset{u\in R}{\exists}\; x=u\,y$.

Nos casos em que se trate de relações de equivalência, indique a classe de equivalência do elemento 0 (zero) e uma outra classe de equivalência, distinta desta.

2) Seja f a aplicação de R em si mesmo definida por

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{se } x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x>0\end{cases}.$$

a) Indique, justificando, se f é injectiva ou sobrejectiva.

b) Dê exemplos concretos de um conjunto limitado (em R) cujo transformado por f seja ilimitado e de um conjunto ilimitado que f transforme num conjunto limitado.

c) Mostre que

$$(f\circ f)\,(x)=f(-x), \qquad \forall\, x\in R$$

(considere separadamente os casos $x>0$, $x=0$, $x<0$).

Pondo $f_1=f$ e, para todo o $n\in N$, $f_{n+1}=f_n\circ f$, aproveite o resultado anterior para determinar explicitamente a aplicação f_n.

3) Sendo u_n e v_n os termos gerais de duas sucessões de termos reais e $w_n = u_n + v_n$, indique, justificando, quais das proposições seguintes são necessàriamente verdadeiras e mostre, por meio de exemplos concretos que as restantes podem não o ser:

a) Se u_n e v_n são divergentes, w_n também o é.
b) Se u_n e v_n são limitadas, w_n também o é.
c) Se u_n e v_n são ilimitadas, w_n também o é.
d) Se u_n e v_n são crescentes, w_n também o é.
e) Se u_n e v_n são monótonas, w_n também o é.

4) *a*) Prove que, para que $c \in R$ seja ponto de acumulação do conjunto

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p$$

$(p \in N)$ é necessário e suficiente que c seja ponto de acumulação de um, pelo menos, dos conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_p$.

b) Se em vez de uma reunião de conjuntos, em número finito, se tratasse da reunião de uma infinidade de conjuntos, a condição seria ainda suficiente? E necessária? Justifique.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Ponto N.º 2—7-1-70.

5781 — 1) Justificando cuidadosamente as respostas, indique quais dos seguintes subconjuntos de R são

a) abertos,
b) fechados,
c) limitados (em R):

$$A = \{x : \exists_{y \in R}\, x^2 + y^2 \leqslant 0\}$$

$$B = \left\{x : \frac{1}{x} \in Z\right\} \qquad (Z \text{ é o conjunto dos inteiros})$$

$$C = \{x : |x - 1| + |x + 1| > 4\}.$$

2) Seja f a aplicação de R em si mesmo definida pela forma seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in Q \quad (Q \text{ é o conjunto dos racionais}) \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } x \in R \setminus Q. \end{cases}$$

a) Prove que f é bijectiva.
b) Indique, justificando, quais são os valores de x que verificam a condição:

$$f(x) = x.$$

c) Designando por A o transformado por f do intervalo $[1, 2]$, indique (quando possível) o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto A.

d) Pondo $f_1 = f$ e, para todo o $n \in N$, $f_{n+1} = f_n \circ f$, determine explìcitamente a aplicação f_n.

3) Sendo u_n o termo geral de uma sucessão de termos reais e $v_n = u_n^2$, indique, justificando, quais das proposições seguintes são necessàriamente verdadeiras e mostre, por meio de exemplos concretos, que as restantes podem não o ser:

a) Se v_n é convergente, u_n também o é.
b) Se v_n é divergente, u_n também o é.
c) Se v_n é majorada, u_n é limitada.
d) Se v_n é crescente, u_n é crescente.
e) Se v_n é crescente, u_n é monótona.

4) Convencionemos dizer que um conjunto $A \subset R$ é *simétrico em relação à origem* sse

$$\forall_{x \in R} (x \in A \Longrightarrow -x \in A)$$

e que um conjunto $B \subset R$ é *fechado a respeito da adição* sse

$$\forall_{x, y \in R} (x \in B \wedge y \in B \Longrightarrow x + y \in B).$$

Nestas condições, sendo C um subconjunto de R, considere a relação G, em R, definida por

$$x\, G\, y \Longleftrightarrow x - y \in C$$

e prove que:

a) G é reflexiva sse $0 \in C$.
b) G é simétrica sse C é simétrico em relação à origem.
c) G é transitiva sse C é fechado a respeito da adição.

Enunciados de J. Campos Ferreira

Université Libre de Bruxelles — Faculté des Sciences Appliquées — Algèbre-Analyse.

1ère candidature.

5782 — 1. En quels points les fonctions suivantes sont-elles discontinues

a) $f(x) = [x]$ où $[x]$ représente la partie entière de x

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+2\sin x}$

c) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 . \end{cases}$

2. Montrer que la fonction $y = \dfrac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0,1[$ mais n'est pas uniformément continue.

3a) Montrer à l'aide de la définition de la dérivée que

$$(e^{ax})' = a\,e^{ax} \qquad a \in \mathbf{R} .$$

Application: Calculer les dérivées des fonctions suivantes à partir de *a*)

1. $Sh\,x$
2. $Ch\,x$
3. $Th\,x$
4. $ln\ x$.

4. Etudier la fonction $y = |x|$ est-elle continue et dérivable en tout point x?

5. En quels points la fonction $y = |\cos x|$ est-elle non dérivable?

6. Étudier la variation des fonctions suivantes

a) $\begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \cos\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x\cos\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2\cos\dfrac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 . \end{cases}$

En quels points ces fonctions sont-elles continues? Dérivables? Continument dérivables? Représentez les sur un graphe.

1ère candidature.

5783 — 1. Calculer les dérivées partielles de la fonction.

$$f = (x\,y)^z$$

2. Calculer les dérivées partielles de la fonction $f = e^{\sin y/x}$.

3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de y par rapport aux variables indépendantes strictement positives x_1, x_2, x_3, si

$$y = \sqrt{u^2 + v^2} \text{ et } u = \log x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad v = e^{\sin(x_1+x_2+x_3)} .$$

4. Calculler à 1/10 près $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (2.1) et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (2.1) si $f(x,y) = \sqrt{x\sin y + \dfrac{x}{y}}$.

5. Soit $X(t)$ une matrice dont les éléments $x_{ij}(t)$ sont des fonctions dérivables de t. Calculer

a) $\dfrac{d}{dt}X^{-1}$ *b*) $\dfrac{d}{dt}X^2$.

6. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction

$$f(x,y,z) = x^{(y^z)} .$$

7. Montrer que l'équation $y^3 + 5\,x\,y^2 + 10\,y - 10\,x^2 = 0$ définit, dans le voisinage de $x = 0$ une et une seule fonction réelle $y(x)$.

Développer cette fonction $y(x)$ en série de Taylor jusqu'au terme en x^5 inclus.

8. Si $\begin{cases} x = \varphi + \sin\varphi \\ y = 1 - \cos\varphi \end{cases}$

sont les équations paramétriques d'une courbe plane d'équation cartésienne $y = F(x)$, calculer $F'(x)$ et étudier la variation de $F'(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

9. Considérons la surface d'équation $x\,y + y\,z - x\,z = 2$.

Déterminer pour quelles valeurs de x et y il est possible d'appliquer le théorème des fonctions implicites. Si (x_0, y_0) est l'un de ces points, calculer (de deux manières: en explicitant ou en n'explicitant pas z en fonction de x et y) les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ et la différentielle totale $dz(x_0, y_0)$.

10. Calculer la matrice jacobienne de u, v par rapport à x, y si u et v sont les fonctions définies implicitement par les relations:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 + 2\,x + 3\,y = 0 \\ u\,v + x - y = 0 . \end{cases}$$

1ère candidature.

5784 — 1. Démontrez que:

Si A et B sont des matricee carrées symétriques, alors AB est une matrice symétrique si et seulement si A et B commutent $(A \cdot B = B \cdot A)$.

2. Sans effectuer le produit, trouvez le rang de la matrice $C = A \cdot B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On considère la transformation linéaire de l'espace vectoriel R^2 définie dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe aucune base de R^2 par rapport à laquelle la matrice de cette transformation linéaire soit diagonale.

4. Trouver les valeurs propres et les vecteurs correspondants de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Soit $\int \sin^m x \cos^n x \, dx = I_{m,n}$.

Etablir la formule de réduction

$$(m+n) I_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n}$$

$$\forall\, m, n \text{ sauf si } m = -n = 1.$$

Application: Calculer $I_{3,2} = \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

6. Démontrer la forme de récurrence

$$n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$$

avec

$$I_n = \int \sin^n x \, dx \qquad (n \neq -1, +1) \cdot$$

Application: $\int \sin^7 x \, dx$.

7. Démontrer

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)\,!\,!}{n\,!\,!} & \text{si } n \text{ est un entier positif impair} \\[2ex] \dfrac{(n-1)\,!\,!}{n\,!\,!} \, \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ est un entier positif pair} \end{cases}$$

$$n\,!\,! = n(n-2)(n-4)\cdots.$$

Enunciados de F. et J. Teixeira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

185 — NICOLAE POPESCU — **Categorii Abeliene** — Editura Academiei Republicii Socialiste România — Bucaresti, 1971.

A teoria das categorias abelianas tem-se desenvolvido nos últimos vinte anos e pelos seus métodos e resultados desempenha um papel de relevo na Matemática abstracta. Tem origem na Algebra, particularmente na teoria dos módulos sobre um anel e tem sido desenvolvida pela necessidade de se obter o quadro natural para muitas noções algébricas. Do mesmo modo, a teoria das categorias abelianas tem aplicações importantes na teoria dos anéis, na geometria algébrica, na geometria analítica, na topologia algébrica, etc.

O presente trabalho é uma monografia que aborda problemas importantes da teoria das categorias abelianas.

O primeiro capítulo expõe (sem demonstrações) noções e resultados fundamentais da teoria das categorias.

Ao segundo capítulo descrevem-se as noções fundamentais sobre as categorias prèaditivas, aditivas pré-abelianas e abelianas, demonstrando os resultados clássicos sobre as categorias abelianas, os produtos e somas fibradas teoremas de isomorfismo, somas directas. No parágrafo oitavo, o mais importante do capítulo, o Autor ocupa-se dos limites indutivos e projectivos nas categorias abelianas, demonstra a equivalência das quatro formas da condição Ab 5 de GROTHENDIECK e apresenta consequências.

O terceiro capítulo, «Functores aditivos» contem o estudo dos functores aditivos, categorias dos functores aditivos, categorias de módulos, caracterização de categorias de functors aditivos e categorias de módulos o teorema do produto tensorial, a exactidão dos