1ère candidature.

5784 — 1. Démontrez que:

Si A et B sont des matricee carrées symétriques, alors AB est une matrice symétrique si et seulement si A et B commutent $(A \cdot B = B \cdot A)$.

2. Sans effectuer le produit, trouvez le rang de la matrice $C = A \cdot B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. On considère la transformation linéaire de l'espace vectoriel R^2 définie dans la base canonique par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe aucune base de R^2 par rapport à laquelle la matrice de cette transformation linéaire soit diagonale.

4. Trouver les valeurs propres et les vecteurs correspondants de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Soit $\int \sin^m x \cos^n x \, dx = I_{m,n}$.

Etablir la formule de réduction

$$(m+n) I_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1) I_{m-2,n}$$

$$\forall\, m, n \text{ sauf si } m = -n = 1.$$

Application: Calculer $I_{3,2} = \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$.

6. Démontrer la forme de récurrence

$$n I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2}$$

avec

$$I_n = \int \sin^n x \, dx \qquad (n \neq -1, +1) \cdot$$

Application: $\int \sin^7 x \, dx$.

7. Démontrer

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{si } n \text{ est un entier positif impair} \\[2mm] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ est un entier positif pair} \end{cases}$$

$n!! = n(n-2)(n-4) \cdots$.

Enunciados de F. et J. Teixeira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

185 — Nicolae Popescu — **Categorii Abeliene** — Editura Academiei Republicii Socialiste România — Bucaresti, 1971.

A teoria das categorias abelianas tem-se desenvolvido nos últimos vinte anos e pelos seus métodos e resultados desempenha um papel de relevo na Matemática abstracta. Tem origem na Algebra, particularmente na teoria dos módulos sobre um anel e tem sido desenvolvida pela necessidade de se obter o quadro natural para muitas noções algébricas. Do mesmo modo, a teoria das categorias abelianas tem aplicações importantes na teoria dos anéis, na geometria algébrica, na geometria analítica, na topologia algébrica, etc.

O presente trabalho é uma monografia que aborda problemas importantes da teoria das categorias abelianas.

O primeiro capítulo expõe (sem demonstrações) noções e resultados fundamentais da teoria das categorias.

Ao segundo capítulo descrevem-se as noções fundamentais sobre as categorias prèaditivas, aditivas pré-abelianas e abelianas, demonstrando os resultados clássicos sobre as categorias abelianas, os produtos e somas fibradas teoremas de isomorfismo, somas directas. No parágrafo oitavo, o mais importante do capítulo, o Autor ocupa-se dos limites indutivos e projectivos nas categorias abelianas, demonstra a equivalência das quatro formas da condição Ab 5 de Grothendieck e apresenta consequências.

O terceiro capítulo, «Functores aditivos» contem o estudo dos functores aditivos, categorias dos functores aditivos, categorias de módulos, caracterização de categorias de functors aditivos e categorias de módulos o teorema do produto tensorial, a exactidão dos functores, objectos projectivos e injectivos, envolvente injectiva, a existência de envolventes injectivos em algumas categorias.

O quarto capítulo intitulado «A localização» é o mais importante de todos, desenvolve a teoria geral da localização que desempenha grande papel na Algebra na Geometria algébrica, etc. Inícia-se pela teoria das categorias das fracções aditivas que é uma generalização bastante abstracta das fracções ordinárias, destacando-se o teorema 2. 4 que fornece a técnica das construções na teoria da localização: as aplicações aqui expressas são a construção da categoria espectral duma categoria abeliana com complementar e a construção da categoria cociente duma categoria abeliana por uma subcategoria espessa. No parágrafo sexto estuda-se uma forma particular da categoria cociente para a qual o functor canónico admite um adjunto à direita, iniciando assim no livro o estudo das aplicações da teoria da localização. Segue-se o estudo das sub-categorias localizantes e da importância dos objectos injectivos na teoria da localização. Dá-se grande relevo à localização nas categorias dos módulos a saber a construção das sub-categorias localizantes utilizando a noção de sistema localizante (Gabriel), estuda-se a construção do localisado de um módulo em relação a uma subcategoria localisante e as suas consequências importantes, parágrafos 10 a 12. A aplicação da teoria da localização faz-se ainda na caracterização das categorias abelianas com geradores e limites indutivos exactos, localização nas categorias de functores aditivos e aplicação na construção de functores exactos à esquerda e a aplicação no teorema de imersão Mitchell. Continua com o estudo de algumas localizações de uma categoria de módulos caracterizando os epimorfismos achatados (à esquerda) dos aneis e com aplicação ao estudo (à esquerda) de um anel. O capítulo termina pelo estudo de algumas localizações especiais e aplicações da localização na teoria dos feixes abelianos sobre um espaço topológico.

O quinto capítulo trata do teorema de Krull-Remack-Schmidt para as categorias abelianas e começa pelas formas clássicas deste teorema (existência e unicidade — Azumaya, Atyah). Continua com o estudo das categorias espectrais e as l. c. categorias para as quais o teorema de Krull-Remack-Schmidt sob a forma Gabriel é válido. Estuda as l. c. categorias particulares: categorias com a dimensão de Krull-Gabriel definida, as categorias semi-artinianas, as categorias localmente noethérianas, localmente artínianas e localmente finitas. Dá a caracterização das categorias localmente noetherianas e aplicações ao estudo dos aneis noetherianos (à esquerda). Termina por algumas considerações sobre uma forma geral do teorema de Krull-Remack-Schmidt sobre uma categoria de Grothendieck qualquer.

O sexto capítulo trata da «Teoria da decomposição» e dá a definição e as propriedades gerais duma teoria axiomática da decomposição que tem casos particulares da teoria da decomposição primária e terciária: Estuda a ligação entre estas teorias de decomposição e o anterior teorema de Krull-Remach-Schmidt.

O sétimo capítulo intitulado «A dualidade» tem por objectivos a construção do dual duma categoria de Grothendieck que é uma categoria dos módulos topológicos sobre um anel topológico dum tipo particular.

Os temas abordados neste livro e a profundidade com que os mesmos são tratados reflectem bem o alto nível científico que a Academia das Ciências da República Popular da Roménia tem conseguido imprimir ao País no campo da matemática, promovendo não só o desenvolvimento desta ciência nas suas formas mais abstratas como nas aplicações mais concretas, como reforço de todas as actividades produtivas nacionais: agricultura, indústria, econometria, etc.

J. G. T.

186 — N. P. Bhatia e G. P. Szegö — **Stability Theory of Dynamical Systems** — Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften — Band 161, Springer Verlag. Berlin-Heidelberg-New York.

A teoria da estabilidade dos sistemas dinâmicos pode dizer-se ter sido iniciada em termos de teoria de equações diferenciais ordinárias no século XIX com Liapounov e Poincaré.

Posteriormente e nas últimas décadas deve o seu maior incremento à escola soviética; Lefschetz alertando os matemáticos dos USA do atrazo, chama a atenção sobre o interesse que a teoria apresenta na resolução de problemas que se colocam na produção de energia nuclear (década 50 e começo de 60).

As oito centenas de trabalhos citados nas referên cias bibliográficas do presente livro exemplificam e confirmam os aspectos *modernos* e as *origens* da teoria.

Liapounov define de uma maneira precisa os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade e fornece um «método» de análise das propriedades de estabilidade de uma determinada solução de uma equação diferencial ordinária. Tanto a definição como o método caracterizam em termos estritamente locais as propriedades de estabilidade de uma solução de equação diferencial. Pelo contrário a teoria de Poincaré difere da anterior na medida em que as propriedades globais das equações diferenciais no plano desempenham o papel relevante.

Um dos aspectos básicos da teoria de Poincaré está na introdução do conceito de trajectória, isto é, uma curva no plano $x, \dot{x}$, paramétrica em relação ao tempo t, que pode obter-se pela eliminação da variável entre equações dadas, reduzindo assim a equação diferencial à ordem primeira, a respeito de x e $\dot{x}$. Nesta via Poincaré adopta um referencial no qual estuda o comportamento qualitativo das equações diferenciais. Poincaré não está interessado na integração de tipos particulares de equações, mas em classificar todos os comportamentos possíveis de todas as equações diferenciais de segunda ordem. Pela introdução do conceito de trajectória Poincaré está apto a formular e a resolver, como problemas topológicos, os problemas da teoria das equações diferenciais. Desta forma Poincaré abre o caminho para a noção abstracta de sistema dinâmico que pode ser atribuída essencialmente a A. A. Markov e H. Whitney. Estes dois autores observaram separadamente que é possível estudar a teoria qualitativa de famílias de curvas (trajectórias) num espaço X conveniente, contanto que estas famílias sejam de certa forma condicionadas no seu comportamento, isto é, se forem definidas como tendo sido geradas por um grupo de transformações topológicas a um parâmetro, actuando sobre X.

G. D. Birkhoff deu grande desenvolvimento à teoria dos sistemas dinâmicos podendo ser verdadeiramente considerado como o fundador dessa teoria. A sua célebre monografia de 1927 sobre os Sistemas Dinâmicos é a base de muitos trabalhos de investigação das décadas de 30 e 40, que hoje em dia não estão desactualizados.

Birkhoff traçou as duas vias fundamentais na teoria dos sistemas dinâmicos, a saber a teoria topológica e a teoria ergódica.

Em 1947 V. V. Nemytskii e V. V. Stepanov publicaram a «Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais» que até hoje tem servido de referência de base aos mais importantes trabalhos da teoria dos sistemas dinâmicos. Em 1949 Nemytskii escreveu um trabalho que faz o ponto sobre os problemas topológicos na teoria dos sistemas dinâmicos e reune todos os resultados da teoria topológica até o fim da década de 40.

Durante os anos de 50 faz-se um grande esforço na generalização do conceito de um sistema dinâmico em relação aos grupos transformações topológicas e muitos autores aparecem com obras notáveis.

Mais recentemente a teoria foi ampliada com a introdução de novos problemas considerados à Liapounov, ausente nos primeiros trabalhos sobre sistemas dinâmicos e grupos de transformação topológicos. Neste sentido, a obra de Taro Ura, em particular a sua teoria dos prolongamentos e as suas relações com a estabilidade mostrou claramente que a parte significativa da teoria da estabilidade é de natureza topológica e pertence à concepção básica da teoria dos sistemas dinâmicos. Os trabalhos de V. I. Zubov contribuem bastante para esta extensão da teoria com a introdução dos espaços métricos.

O presente volume foi concebido para apresentar de uma forma simples os resultados recentes da teoria dos sistemas dinâmicos nos espaços métricos e especialmente a teoria da estabilidade nas suas aplicações concretas à teoria das equações diferenciais. Não se refere a vários capítulos recentemente criados como a teoria da estabilidade estrutural, a teoria ergódica e a teoria geral dos grupos de transformações topológicas. Mantém-se um nível de acessibilidade aos estudantes universitários dos médios e e últimos anos (com conhecimentos de espaços métricos e de equações diferenciais) para o que não se faz referência aos sistemas dinâmicos locais.

Os capítulos I a VII contêm a teoria básica dos sistemas dinâmicos nos espaços métricos e os Capítulos VIII e IX contêm aplicações e extensões da teoria da estabilidade (Cap. V) aos sistemas dinâmicos definidos por equações diferenciais ordinárias.

Mais pormenorizadamente, o Capítulo I contém a definição de um sistema dinâmico e alguns exemplos que indicam vários campos de aplicação.

O Capítulo II contém noções elementares invariantes sob certas transformações topológicas dos sistemas dinâmicos. O Capítulo III trata principalmente dos conjuntos mínimos e sua estrutura. O Capítulo IV dedica-se ao estudo dos sistemas dinâmicos dispersivos e paralelizáveis e termina a teoria básica exposta. O Capítulo V desenvolve o tema principal do livro, a saber a teoria de estabilidade e da atracção (a teoria da atracção aqui apresentada difere essencialmente da de Zubov que assenta no conceito de atracção fraca). O Capítulo VI dedica-se a um problema mais específico: a classificação dos escoamentos nas proximidades de um conjunto compacto invariante. O Capítulo VII contém a teoria dos prolongamentos de T. Ura com aplicação à estabilidade absoluta e recorrência generalizada. O Capítulo VIII trata da teoria geométrica da estabilidade para as equações diferenciais autónomas ordinárias incluindo várias exteesões do método directo de Liapounov. O Capítulo IX dedica-se ainda a um problema mais específico dos conceitos de atração e estabilidade via funções de Liapounov não contínuas.

J. G. T.

187 — Jean Pierre Kahane — **Séries de Fourier absolument convergentes — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete** — Springer-Verlag Berlin, 1970.

«Este livro tem por objectivo o estudo das funções da classe A, isto é, as funções contínuas sobre o círculo cuja série de Fourier é absolutamente convergente. O pertencer à classe A é uma propriedade local. A teoria descritiva consiste em comparar esta propriedade local a outras propriedades (interessando o módulo de continuidade, por exemplo). É esta a mais antiga orientação, definida neste campo por S. Bernstein. Os resultados recentes dizem respeito sobretudo as restrições das funções da classe A a conjuntos fechados E do círculo; estas restrições definem uma classe de funções $A(E)$. Para outros conjuntos fechados, E, do círculo, toda a função sobre E pertence a $A(E)$ e diz-se que E é um conjunto de Helson.

Por outro lado, A é uma álgebra de Banach (a norma de uma função é a soma dos módulos dos coeficientes de Fourier). Esta estrutura descoberta por Wiener, sugere grande número de problemas, entre os quais o de considerar a classe $A(E)$ como álgebras cocientes de A

$$A(E) = A/I_E$$

em que I_E é o ideal fechado de A constituído pelas funções de A que se anulam sobre E.

Nestes termos levantam-se as seguintes questões:

1 — Quais são os endomorfismos de A?

2 — Quais as funções que operam em A, isto é, as funções F (definidas, por exemplo, sobre um intervalo real I) tais que, para toda f de A com valor em I se tenha $F(f) \in A$?

3 — Quais são os ideais fechados de A?

4 — Quais as sub-álgebras fechadas de A?

5 — Sendo dada uma função f de A, quais são as funções F, definidas sobre o conjunto dos valores de f, tais que $F(f) \in A$?

As questões 1 e 2 foram levantadas em 1934 po P. Levy e foram resolvidas completamente em 1953 (Beurling e Helson) e 1958 (Katznelson). Um caso particular da questão 3 é o seguinte problema que, por razões históricas, é designado «problema de síntese espectral»: Todo o ideal fechado de A é um I_E? Deve-se a resposta negativa a Malliavin (1959). As questões 4 e 5 estão de certa forma relacionadas e esta última foi apresentada sob a forma expressa por Melliavin também em 1959 sob o nome de «cálculo simbólico individual»: Em 1939 porém Marcinkiewicz tinha já trabalhado na mesma direcção. Apesar das ligações evidentes entre as questões 5 e 2 foi apenas recentemente (1966-67) que o cálculo simbólico individual permitiu reencontrar o teorema de Katznelson.

Todos estes problemas postos em relação a A, transpõem-se para $A(E)$. Melhor, verifica-se que, excepção do primeiro, a melhor via de acesso para o estudo em A consiste no seu estudo em certos $A(E)$. O poderoso método das algebras tensoriais introduzido por Varopoulos (1965-1967) consiste em identificar certos $A(E)$ como álgebras $V(\mathsf{D})$ de funções definidas sobre o quadrado D^2 do grupo compacto $\mathsf{D} = \{-1, 1\}^N$ (onde a adição é definida como a multiplicação das coordenadas). Por seu turno identifica-se uma sub-álgebra fechada da $V(\mathsf{D})$ a $A(\mathsf{D})$, álgebra das séries de Fourier absolutamente convergentes sobre o grupo D (e não mais sobre o círculo!) $A(\mathsf{D})$ pode ainda interpretar-se como a álgebra das séries de Fourier-Walsh absolutamente convergentes.

Muitas questões que se põem sobre os $A(E)$ ficam em aberto. Em particular, mal se conhece a significação do isomorfismo de duas álgebras $A(E)$ e $A(E')$».

Jean Pierre Kahane, é um dos matemáticos da actualidade mais qualificados para expôr as orientações e as vias que se apresentam no domínio da matemática que, na forma anterior, é tratado na introdução do livro de que é Autor. A sua competência permite-lhe não só ser colaborador duma das mais categorizadas colecções de obras de matemática — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete — mas ainda nela fazer ressaltar os aspectos mais salientes duma teoria com mais de dois séculos de existência iniciada na célebre Teoria Analítica do Calor. A longa bibliografia exposta, de 172 referências, varre completamente todo o espectro das tendências manifestadas e dos resultados obtidos. É uma obra de alto nível científico. J. G. T.

Notícias críticas próximas sobre as seguintes obras:

A. F. Monna — Analyse non-Archimedienne — Band 56.

Leopoldo Nachbin — Topology on spaces of Holomorphic Mappings — Band 47.

Carlo Miranda — Partial differential Equations of Elliptic Type — Band 2.

H. Busemann — Recent synthetic Differential Geometry — Band 54.

H. S. Wilf — Finite Sections of Some Classical Inequalities — Band 52.

S. Lopes de Medrano — Involutions on Manifolds — Band 59.

Volumes da col. «Ergebnisse der Mathematik» und «Ihrer Grenzgebiete.

J. Stoer-C. Witzgall — Convexity and optimization in Finite Dimensions I — Band 163.

A. Grothendieck-J. A. Dieudonné — Elements de Géometrie Algebrique I — Band 166.

Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Enizeldarstellungen.