ANO XXX — N.os 113-116 GAZETA DE MATEMÁTICA JANEIRO/DEZ. — 1969

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA

Linguagens elementares e estruturas matemáticas

(Breve iniciação)

por ***Hugo Ribeiro***
Pennsylvania State University, U. S. A.

À memória de Manuel Zaluar Nunes

Esta exposição tem o propósito de oferecer sistemàticamente a estudantes com preparação média uma oportunidade de tomarem interesse por questões elementares e métodos que surjem naturalmente em teorias básicas da Matemática e se situam na fronteira da Matemática e da Lógica. Procuramos a eficácia duma tal tentativa em poucas páginas através da escolha e organização do material, das aplicações, da precisão dos enunciados definições e resultados e da indicação de alguns problemas aparentemente acessíveis. As breves referências bibliográficas são para apontar acesso imediato ao desenvolvimento dos vários tópicos.

0. Observações iniciais. A classe dos grupos pode definir-se como a de todos aqueles sistemas (algébricos) com duas operações, uma, binária, a multiplicação, e outra, unária, a inversão, nos quais são verdadeiras certas identidades que envolvem, ùnicamente, o símbolo $=$, símbolos («variáveis») $x, y, z, \cdots$, os símbolos operacionais $\cdot$ e $^{-1}$ (cujas interpretações são respectivamente a multiplicação e a inversão) e, finalmente, parêntesis (que são símbolos evitáveis quando as regras de formação de termos forem convenientemente escolhidas). Mas nenhum conjunto de identidades envolvendo ùnicamente $=$, variáveis e o símbolo $\cdot$ (com a mesma interpretação) de operação binária, pode servir como conjunto de axiomas da teoria dos grupos — porque, de contrário, como essas identidades seriam todas verdadeiras, digamos, no grupo aditivo dos inteiros o conjunto dos números naturais, que é fechado para essa operação, constituiria, com a adição dos números naturais, um sistema algébrico no qual, claramente, as mesmas identidades também seriam verdadeiras, isto é, constituiria um grupo.

Considere-se uma qualquer classe, K, de sistemas algébricos todos do mesmo tipo, isto é com o mesmo número de operações de cada aridade. É óbvio que se há um conjunto de identidades tal que a nossa classe, K, é a de todos os sistemas algébricos, daquele tipo, nos quais todas as identidades desse conjunto são verdadeiras então K tem a propriedade de conter todos os subsistemas e todas as imagens homomórficas de elementos de K assim como todos os produtos directos de elementos de K. Mas G. BIRKHOFF mostrou que, reciprocamente, se a classe dada K, contém com cada elemento todos os seus subsistemas e é fechada para todas as operações de homomorfismo e produto directo então há um conjunto de identidades tal que os elementos de K são precisamente aqueles do tipo dado nos quais todas as identidades desse conjunto são verdadeiras. Por um lado há a consideração de objectos matemáticos, todos do mesmo tipo, e por outro a (menos familiar) de uma linguagem (formal) bem delimitada que serve para exprimir (com tais limitações) o que pode, ou não, passar-se em objectos desse tipo. E não só a estrutura de expressões dessa linguagem pode fornecer propriedades da classe dos objectos matemáticos nos quais elas são verdadeiras mas também certas propriedades duma classe podem informar-nos a respeito da estrutura de expressões (da linguagem fixada) verdadeiras em todos os membros da classe.

KALICKI e SCOTT determinaram todas as classes de semigrupos que são «equacionalmente completas» isto é tais que dada uma identidade qualquer ou esta é verdadeira (e é sempre!) só nos semigrupos com um único elemento (verdadeira onde $x=y$ é) ou é verdadeira em todos os semigrupos da classe. Os semireticulados («semi-lattices») constituem uma tal classe como fàcilmente se verifica: Se t_1 e t_2 são termos quaisquer, de $t_1=t_2$ resulta (usando a associatividade, a comutatividade e a idempotência da operação) uma identidade $t'_1=t'_2$ verdadeira em precisamente os mesmos semireticulados e tal que nenhuma variável ocorre mais de uma vez em cada um dos termos t'_1 e t'_2, de modo que 1) se nestes dois termos ocorrem precisamente as mesmas variáveis $t'_1=t'_2$ é verdadeira em todos os semireticulados e 2) se, digamos, x ocorre em t'_1 mas não em t'_2 então $t'_1=t'_2$ só pode ser verdadeira nos reticulados com um único elemento (porque se a e b são dois elementos então interpretando x como a e todas as outras variáveis como b a multiplicação de a por b dá b e, por outro lado, interpretando x como b e qualquer outra variável como a a multiplicação de a por b dá a). A classe dos reticulados distributivos é, também, equacionalmente completa, isto é nenhuma subclasse própria, excepto a dos reticulados com um único elemento, se pode obter acrescentando uma nova identidade às identidades que constituem o sistema usual de axiomas da teoria dos reticulados distributivos. (Procure o leitor demonstrar isto directamente!). E assim, uma extensão da linguagem é necessária para se obter axiomas que forneçam, por exemplo, a subclasse daqueles reticulados distributivos constituida pelas ordens totais. Outras indicações de problemas e resultados que envolvem classes equacionais encontram-se num artigo recente de TARSKI. Por exemplo, que classes são as classes de todos os sistemas algébricos de dado tipo em que uma única identidade pode servir de axioma?

(G. BIRKHOFF, Proc. Cambridge Phil. Soc. 31 (1935); J. KALICKI and D. SCOTT, Indag. Math. 17 (1955); A. TARSKI, em Contributions to Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam 1968).

1. Estruturas e linguagem. Usámos, até agora sem explicação, certas noções que é indispensável esclarecer. Por outro lado a linguagem que temos considerado é demasiadamente simples. Em particular interessam-nos também estruturas matemáticas com relações que não são necessàriamente, como até agora, operações.

Consideremos, para uma dada sucessão $<n_1, \cdots, n_m>$ («tipo») de números naturais a classe de todas as estruturas

$$\mathfrak{A} = <A, R_1, \cdots, R_m>, \text{ onde}$$

A é um conjunto não vazio e $R_i (1 \leq i \leq m)$ uma relação n_i-ària de A, isto é um subconjunto do conjunto de todos os n_i-tuplos de elementos de A (que se identifica com um elemento de A no caso de $n_i = 1$ e R_i ser uma operação de A). Consideremos, por outro lado, uma linguagem, que permite referência directa a tais relações, cujos símbolos são $=$ (que se não confundirá com o símbolo $=$ da linguagem que estamos usando nas nossas descrições!), variáveis $v_0, v_1 \cdots$ que permitem referência aos elementos dos conjuntos A, símbolos (de predicados) $P_1, \cdots, P_m$ que se referem respectivamente às relações $R_1, \cdots, R_m$, os símbolos $\neg$ («não», de negação), $\wedge$ («e», de conjunção), $\bigwedge$ («qualquer que seja», de quantificador universal) e os parêntesis (e). As *fórmulas* desta linguagem são definidas indutivamente: elas são as sucessões de símbolos que pertencem a todos aqueles conjuntos de sucessões de símbolos que contêm, para cada i com $1 \leq i \leq m$ e variáveis $v_{j_0}, \cdots v_{j n_i - 1}$ todas as sucessões $v_{j_0} = v_{j_1}$ e $P_i v_{j_0} v_{j_1} \cdots v_{j n_i - 1}$ («fórmulas atómicas») e que (regras gramaticais) 1) com cada sucessão φ contêm também a sucessão $\neg \varphi$ assim como, para cada variável v_j, também $\bigwedge v_j \varphi$ e 2) com quaisquer sucessões φ e ψ contêm também a sucessão $(\varphi \wedge \psi)$.

Diz-se duma variável v_k que ocorre livre numa fórmula se e só se a fórmula é atómica e v_k ocorre nela ou a fórmula é $\neg \varphi$ e v_k ocorre livre em φ ou a fórmula é $(\varphi \wedge \psi)$ e v_k ocorre livre em φ ou em ψ ou, finalmente, a fórmula é $\bigwedge v_j \varphi$, $k \neq j$ e v_k ocorre livre em φ. *Sentenças* são as fórmulas sem ocorrências livres de variáveis. Sentenças *universais* [*existenciais*] são as sentenças $\bigwedge v_{j_0} \cdots \bigwedge v_{j_l} \varphi [\bigvee v_{j_0} \cdots \bigvee v_{j_l} \varphi]$ para as quais em φ não ocorrem quantificadores. (Como é usual, escrevem-se abreviaturas das nossas fórmulas usando outros símbolos $\vee$ («ou»), $\rightarrow$ («se ... então ...»), $\longleftrightarrow$ («se e só se»), $\bigvee$ («há», de quantificador existencial), e com frequência se omitirão parêntesis). Deverá ser claro como ler, na linguagem que estamos usando, as sentenças da linguagem que introduzimos. Por exemplo (com $m = 1$ e $n_1 = 2$) as sentenças $\bigwedge v_0 \bigwedge v_1 \bigwedge v_2 ((P_1 v_0 v_1 \wedge \wedge P_1 v_1 v_2) \rightarrow P_1 v_0 v_2)$, $\bigwedge v_0 \neg P_1 v_0 v_0$, $\bigwedge v_0 \bigwedge v_1 (\neg v_0 = v_1 \rightarrow (P_1 v_0 v_1 \vee P_1 v_1 v_0))$ constituem um sistema usual de axiomas da teoria das ordens totais.

Se desejamos focar a nossa atenção em estruturas, $\mathfrak{A}$, nas quais pelo menos uma relação R_i é uma operação então usamos frequentemente, para referir a R_i, em vez de P_i um símbolo f_i («constante» ou «nome de indivíduo» no caso de $n_i = 1$). (Tais estruturas são aquelas nas quais a sentença $\bigwedge v_0 \cdots \bigwedge v_{n_i - 2} (\bigvee v_{n_i - 1} P_i v_0 \cdots v_{n_i - 1} \wedge \bigwedge v_j \bigwedge v_l ((P_i v_0 \cdots v_{n_i - 2} v_j \wedge P_i v_0 \cdots v_{n_i - 2} v_l) \rightarrow \rightarrow v_j = v_l))$ é «verdadeira»). *Termos*, t_k, são então introduzidos, como constituindo o infimum dos conjuntos que contém as variáveis assim como os símbolos f_i e que são fechados para a operação de formação das sucessões $f_i\ t_0 t_1 \cdots t_{n_i - 2}$. As fórmulas atómicas são agora $t_{j_0} = t_{j_1}$, para quaisquer termos t_{j_0} e t_{j_1}, e $P_i t_0 \cdots t_{n_i - 1}$ para quaisquer termos $t_0, \cdots, t_{n_i - 1}$. E as fórmulas obtêm-se, como acima, mas agora a partir destas fórmulas atómicas. Se todas as relações R_i de $\mathfrak{A}$ são operações, $\mathfrak{A}$ diz-se ser uma estrutura algébrica.

Necessitamos finalmente, dada uma estrutura $\mathfrak{A}$ e uma sentença σ da linguagem correspondente, saber o que deve entender-se por «σ é verdadeira em $\mathfrak{A}$». Para isto consideremos as sucessões infinitas $a = \langle a_0, a_1, \cdots \rangle$ de elementos do conjunto A. (Seria mais natural limitar-nos a sucessões finitas mas isso traria desvantagens de ordem técnica nesta exposição). Definimos indutivamente uma relação entre esses elementos, a, de A^ω e as fórmulas, φ, da nossa linguagem: *a satisfaz em* $\mathfrak{A}$ *i*) $v_{j_0} = v_{j_1}$ se e só se a_{j_0} é a_{j_1}, *ii*) $P_i v_{j_0} v_{j_1} \ldots v_{j_{n_i - 1}}$ se e só se para o n_i-tuplo $\langle a_{j_0}, \cdots, a_{j_{n_i - 1}} \rangle$

de elementos $a_{j_0}, \cdots, a_{j_{n_i-1}}$ de A se tem $< a_{j_0}, \cdots, a_{j_{n_i-1}} > \in R_i$, *iii*) $\neg \varphi$ se e só se a não satisfaz, em $\mathfrak{A}, \varphi$, *iv*) $(\varphi \wedge \psi)$ se e só se a satisfaz, em $\mathfrak{A}, \varphi$ e a satisfaz, em $\mathfrak{A}, \psi$, *v*) $\bigwedge v_j \varphi$ se e só se qualquer $a' \in A^\omega$ com $a'_l = a_l$ para $l \neq j$ é tal que a' satisfaz, em $\mathfrak{A}, \varphi$. Resulta imediatamente desta definição que, para cada $\mathfrak{A}$, se σ é uma sentença então ou todas as sucessões $a \in A^\omega$ satisfazem, em $\mathfrak{A}, \sigma$ ou nenhuma sucessão $a \in A^\omega$ satisfaz, em $\mathfrak{A}, \sigma$. É no primeiro caso que se diz que *σ é verdadeira em $\mathfrak{A}$*, ou que *$\mathfrak{A}$ é modelo de σ*. (E é no segundo caso que se diz que σ é falsa em $\mathfrak{A}$).

Uma fórmula, φ, diz-se lògicamente válida se e só se qualquer que seja a estrutura $\mathfrak{A}$ todas as sucessões $a \in A^\omega$ satisfazem, em $\mathfrak{A}, \varphi$. Assim as fórmulas $v_j = v_j$ são todas lògicamente válidas. Também, qualquer que seja a fórmula φ, se v_j ocorre livre em φ e a fórmula ψ se obtém de φ por substituição de ocorrências livres de v_j em φ por ocorrências livres de qualquer outra variável v_l então $v_j = v_l \rightarrow (\varphi \longleftrightarrow \psi)$ é lògicamente válida.

A restrição a estruturas com um número finito de relações (tipo finito), e a restrição correspondente na linguagem, são dispensáveis (como fàcilmente se verá) em muito do que se segue.

(H. HERMES, Einführung in die Mathematische Logik, 1963, Teubner; G. KREISEL et J. L. KRIVINE, Éléments de logique mathématique, 1966, Dunod; A. TARSKI, Some notions and methods on the border line of algebra and metamathematics, in Proc. of the Int. Congress of Mathematicians, vol. 1, 1950).

2. Alguns resultados elementares. Retomamos agora, brevemente, problemas da natureza dos do § 0. Uma estrutura $\mathfrak{B} = < B, S_1, \cdots, S_m >$ (do tipo da estrutura $\mathfrak{A} = < A, R_1, \cdots, R_m >$) é uma subestrutura de $\mathfrak{A}$ (e $\mathfrak{A}$ é extensão de $\mathfrak{B}$) se e só se qualquer que seja i (com $1 \leq i \leq m$) $S_i = R_i \cap B^{n_i}$. Se uma estrutura $\mathfrak{C}$ é isomórfica duma subestrutura $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ diz-se que $\mathfrak{C}$ é isomòrficamente mergulhável em $\mathfrak{A}$. TARSKI observou que para cada estrutura finita $\mathfrak{B}$ (B finito!) há uma sentença universal, σ, tal que as estruturas (do mesmo tipo!) nas quais $\mathfrak{B}$ não é isomòrficamente mergulhável são, precisamente, os modelos de σ. (Para a demonstração, que o leitor deve tentar, note-se que $\mathfrak{B}$ pode, a menos de isomorfismo, descrever-se completamente por uma sentença existencial e que esta é, claro, verdadeira em todas as extensões de $\mathfrak{B}$). A união de uma classe, K, de estruturas é a estrutura, $\mathfrak{A}$, cujo conjunto, A, é a união dos conjuntos dos elementos de K e cuja relação R_i é, para cada i, a união das relações-i dos elementos da classe. K diz-se cadeia de estruturas se e só se de quaisquer dois elementos de K um é subestrutura do outro. Do lema, acima, resulta que uma classe K de estruturas é a de todos os modelos (de todas as sentenças) de um conjunto de sentenças universais se e só se *i*) qualquer estrutura isomòrficamente mergulhável numa estrutura de K também pertence a K e *ii*) a união de qualquer cadeia de elementos de K também pertence a K. Resultados que envolvem uma única sentença universal ou então sentenças com formas mais complexas foram obtidos por VAUGHT, CHANG e outros. Também extensamente estudadas têm sido classes de sistemas algébricos fechadas para certas operações, com, por exemplo, a propriedade de conterem com cada sistema todas as suas imagens homomórficas.

Prosseguimos a análise de KALICKI e SCOTT referida no § 0 para deixarmos aqui uma nota mais pessoal: Sabemos que a subclasse dos reticulados distributivos constituída pelas ordens totais não pode obter-se, pela adjunção de identidades, como sendo a classe de todos os modelos do novo conjunto de sentenças, mas que pode obter-se pela adjunção da sentença universal que afirma ser o infimum (ou o supremum) de dois elementos um destes. Perguntamos então que subclasses (próprias) da das ordens totais são as de todos os modelos do conjunto de sentenças obtido pela adjunção de uma única nova sentença universal aos axiomas que indicámos no § 1. A adjunção de, por exemplo, $\wedge v_0 \wedge v_1 \wedge v_2 (v_0 = v_1 \vee \vee v_0 = v_2 \vee v_1 = v_2)$ determina as ordens totais com não mais de dois elementos, e explicámos na Port. Math. vol. 15 como é simples mostrar que tais subclasses, isto é, as que para algum n (dependente da sentença universal dada) contêm precisamente as ordens totais de no máximo n elementos, são as únicas possíveis. Qualquer sentença universal da nossa linguagem que não é verdadeira em todas as ordens totais é, pois, equivalente a uma sentença da linguagem mais simples (sem referência à relação de ordem) da teoria da identidade. É neste sentido que dizemos que a teoria das ordens totais é universalmente completa. Discutimos depois em termos de propriedades de classes de estruturas a situação aqui exemplificada pelas ordens totais e também fizémos uma aplicação à teoria dos semigrupos ordenados. Gostaríamos de conhecer outras aplicações e uma análise sistemática da noção de teoria universalmente completa relativamente não à teoria da identidade, a que nos limitámos, mas a subteorias mais complexas.

(A. Tarski, Indagationes Mathematicae, vols. 16 and 17, 1954 and 1955; R. Vaught, Bull. Am.Math. Soc. t. 59, 1953; R. Fraissé, Cours de logique mathématique, tome 1, 1967, Gauthier-Villars; H. Ribeiro, Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, vol. 5, 1961; D. Brignole and H. Ribeiro, Algebra i Logika, t. 4, 1965, Novosibirski).

3. Teorema de compacticidade (finitude). Se Σ é um conjunto de fórmulas que é inconsistente (isto é se em cada estrutura, $\mathfrak{A}$, nenhuma sucessão $a \in A^{\omega}$ satisfaz todas as fórmulas de Σ) então há um subconjunto finito, Δ, de Σ, que é inconsistente. (Não tentaremos aqui uma demonstração no quadro desta curta exposição. Mas desde que vários leitores conhecem a existência de axiomas e regras de inferência da lógica elementar e também o resultado de Gödel que afirma obterem-se deste modo precisamente as fórmulas lògicamente válidas, notemos aqui que se Σ é inconsistente então usando Σ há uma demonstração duma sentença falsa em todas as estruturas, e como em tal demonstração só intervém um subconjunto finito, Δ, de Σ, Δ é inconsistente). Temos pois que se Σ é um conjunto de sentenças tal que qualquer subconjunto finito de Σ tem um modelo então há um modelo de Σ. Para mostrar em detalhe uma aplicação muito simples notemos primeiro que a teoria elementar dos corpos pode ser dada na linguagem que contém $x, y, z, \cdots$ como símbolos de variáveis, os dois símbolos de constantes 0 e 1 (de operações 0-àrias) os dois símbolos $+$ e $\times$ (de operações binárias) e com o conjunto de axiomas $\wedge x \wedge y \wedge z + x + y z = + + x y z$, $\wedge x \wedge y \wedge z \times x \times y z = \times \times x y z$, $\wedge x \wedge y + x y = + y x$, $\wedge x \wedge y \times x y = \times y x$, $\wedge x + x 0 = x$, $\wedge x \times x 1 = x$, $\wedge x \vee y + x y = 0$, $\wedge x \vee y (x = 0 \vee \times x y = 1)$, $\wedge x \wedge y \wedge z \times x + y z = = + \times x y \times x z$, $\neg 1 = 0$. A aplicação consiste em obter que para qualquer sentença, σ, verdadeira em todos os corpos de característica zero há um número natural, n_σ, tal que σ é verdadeira em todos os corpos de característica maior que n_σ. Com efeito, seja φ_1 a conjunção dos axiomas, acima, da teoria dos corpos e, para cada número primo, p, seja φ_p a sentença $+ 1 + 1 + 1 + \cdots + 11 = 0$ onde ocorrem p vezes os símbolos 1 (que só é verdadeira nos corpos de característica p), e agora observe-se que, por hipótese, o conjunto $\{\neg\sigma, \varphi_1, \neg\varphi_2, \neg\varphi_3, \neg\varphi_5, \cdots\}$ não tem modelos. Há, pois, de acordo com o corolário acima, um subconjunto finito deste conjunto de sentenças que não tem modelos, e portanto há um número (1 ou primo p) n_σ, tal que qualquer modelo de $\{\varphi_1, \cdots, \neg\varphi_{n_\sigma}\}$ não é modelo de $\neg\sigma$, donde qualquer corpo de característica maior que n_σ é modelo de σ.

O leitor deve tentar obter as seguintes aplicações (de TARSKI e de ROBINSON):

1) Se o conjunto das ordens dos elementos dum grupo, $\mathfrak{A}$, é infinito então há um grupo $\mathfrak{B}$ que tem um elemento de ordem infinita e tal que as sentenças (da linguagem elementar dos grupos) verdadeiras em $\mathfrak{B}$ são precisamente aquelas que são verdadeiras em $\mathfrak{A}$ (tal que «$\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes»).

2) Há corpos não arquimedeanos.

3) Para cada domínio de integridade que não é um corpo há um domínio de integridade elementarmente equivalente com elementos c, não unitário, e d, não zero, tais que, para qualquer n, c^n divide d.

O teorema de compacticidade permite, usando o resultado de algebra elementar que diz haver para qualquer polinómio com coeficientes num corpo, $\mathfrak{F}$, um corpo extensão de $\mathfrak{F}$ no qual esse polinómio tem um zero, obter imediatamente uma demonstração do teorema de STEINITZ que diz que $\mathfrak{F}$ tem uma extensão na qual *qualquer* polinómio se decompõe em factores lineares. De facto, considere-se uma linguagem da teoria dos corpos que contenha uma constante (um nome) para cada elemento de $\mathfrak{F}$ e seja Γ o conjunto de todas as sentenças atómicas verdadeiras em $\mathfrak{F}$ e todas as negações de sentenças atómicas falsas em $\mathfrak{F}$. Observe-se que se φ_1 é a conjunção dos axiomas (acima) da teoria dos corpos então cada modelo de $\Gamma \cup \{\varphi_1\}$ é um corpo extensão de $\mathfrak{F}$, e que na nossa linguagem há para cada polinómio com coeficientes em $\mathfrak{F}$ uma sentença para exprimir que esse polinómio é um produto de factores lineares. Mas se Σ é o conjunto de todas estas sentenças e Δ é qualquer subconjunto finito de Σ então $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \cup \Delta$ é, pelo resultado de algebra elementar citado acima, consistente. Do teorema de compacticidade infere-se portanto que $\Gamma \cup \{\varphi_1\} \cup \Sigma$ é consistente, isto é que há uma extensão de $\mathfrak{F}$ na qual todos os polinómios se decompõem em factores lineares.

Note-se também que do teorema de compacticidade resulta que se há uma única sentença cujos modelos são precisamente os dum conjunto Σ de sentenças então há também um subconjunto finito, Δ, de Σ cujos modelos são precisamente os de Σ.

A noção de ultraproduto de estruturas, de importância na teoria dos modelos mas que não podemos discutir aqui, é uma modificação da de produto directo que pode utilizar-se para uma demonstração simples do teorema de compacticidade e com a qual o leitor deve familiarizar-se.

(A. ROBINSON, Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, North-Holland, 1963; FRAYNE, MOREL and SCOTT, Fundamenta Mathematicae, vol. 51, 1962).

4. Algumas aplicações de teoremas do tipo do de Löwenheim-Skolem. Estes teoremas que têm tido aplicações importantes, especialmente aos fundamentos da teoria dos conjuntos, permitem inferir da existência de modelos infinitos dum conjunto de sentenças, a existência de modelos com propriedades prescritas. Limitamo-nos aqui, primeiro, ao seguinte enunciado fraco que pressupõe uma linguagem, como a descrita no § 1, em que o conjunto das fórmulas é numerável: Se o conjunto, Σ, de sentenças tem um modelo infinito $\mathfrak{A}$ (isto é se A é infinito) então Σ tem um modelo numerável, $\mathfrak{A}'$, tal que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são elementarmente equivalentes. (Uma das demonstrações envolve a consideração de uma linguagem obtida da original pela adjunção de um símbolo, f_φ, de operação n-ária, para cada fórmula que aqui escrevemos $\varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-1}})$ para indicar que as variáveis $v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-1}}$ são as de ocorrências livres, e envolve depois mostrar 1) que para cada estrutura, do tipo dado pela linguagem original, há uma estrutura do tipo dado pela nova linguagem tal que $\bigwedge v_{j_0} \cdots \bigwedge v_{j_{n-2}} (\bigvee v_{j_{n-1}} \varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-2}}) \rightarrow \varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-2}}, f_\varphi(v_{j_0}, \cdots, v_{j_{n-2}})))$ e 2) que os elementos desta estrutura a que se referem as constantes da nova linguagem constituem uma subestrutura elementarmente equivalente).

Deste teorema imediatamente se segue (Skolem) que se a teoria dos conjuntos (axiomas de Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays, ou outros) é consistente então tem já um modelo numerável. (A distinção, clara, das duas linguagens — a linguagem que aqui estamos usando quando escrevemos «modelo numerável» e a linguagem da teoria dos conjuntos, que aliás permite introduzir a definição de conjunto numerável — elimina a sugestão da natureza paradoxal do teorema de Löwenheim-Skolem).

Se aos axiomas da teoria das ordens totais (§ 1) se juntam os axiomas $\neg \bigvee v_0 \bigwedge v_1 (v_0 = v_1 \vee P_1 v_0 v_1)$, $\neg \bigvee v_0 \bigwedge v_1 (v_0 = v_1 \vee \vee P_1 v_1 v_0)$ e $\bigwedge v_0 \bigwedge v_1 (P_1 v_0 v_1 \rightarrow \bigvee v_2 (P_1 v_0 v_2 \wedge \wedge P_1 v_2 v_1))$ obtem-se um conjunto, Σ, de axiomas da teoria das ordens totais densas sem primeiro nem último elemento. Se $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são dois modelos de Σ eles são necessàriamente infinitos, e há portanto modelos, $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$, numeráveis elementarmente equivalentes a, respectivamente, $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$. Mas Cantor demonstrara (veja-se por exemplo, Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, 1958, p. 209) que dois quaisquer modelos numeráveis de Σ são isomorfos. $\mathfrak{A}'$ e $\mathfrak{B}'$ são, portanto, elementarmente equivalentes, donde $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ são elementarmente equivalentes. É pois impossível distinguir por uma sentença da nossa linguagem um modelo, $\mathfrak{A}$, de Σ doutro modelo, $\mathfrak{B}$, de Σ, porque ou em ambos uma tal sentença é verdadeira ou em ambos é falsa, (isto é o conjunto, Σ, de sentenças é «completo»). Em particular qualquer sentença da teoria da ordem é verdadeira no conjunto ordenado dos racionais se e só se é verdadeira no conjunto ordenado dos reais.

Registamos agora o seguinte teorema numa forma que também pressupõe uma linguagem como a do § 1: Se o conjunto Σ de sentenças tem um modelo infinito $\mathfrak{A}$, e $\mathfrak{c}$ é um cardinal maior que o do conjunto, A, de $\mathfrak{A}$, então Σ tem um modelo, $\mathfrak{A}'$, de cardinalidade $\mathfrak{c}$ tal que $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}'$ são elementarmente equivalentes. Um corolário imediato diz-nos que há modelos não numeráveis do conjunto dos axiomas de Peano com o esquema de indução limitado às propriedades que podem ser expressas na nossa linguagem (elementar) da aritmética, portanto que há tais modelos não isomórficos ao modelo dos números naturais.

Tarski mostrara que as sentenças verdadeiras no corpo dos números complexos são precisamente as sentenças verdadeiras em todos os corpos algèbricamente fechados de característica zero. Dos teoremas que estamos considerando e do facto, conhecido da algebra, que quaisquer dois corpos algèbricamente fechados e com a mesma característica e mesma cardinalidade não numerável são isomórficos, resulta agora que um conjunto de axiomas da teoria dos corpos algèbricamente fechados de dada característica é completo. Vaught observou, em geral, que se um conjunto consistente, Σ, de sentenças não tem modelos finitos e para algum cardinal $\mathfrak{c}$ é n-categórico (isto é tal que dois quaisquer modelos de cardinalidade $\mathfrak{c}$ são isomórficos) então Σ é completo. Este e outros critérios de completude têm consequências importantes. Obtém-se, por exemplo, uma demonstração, curta e simples, do conhecido teorema dos zeros (Nullstellensatz) de HILBERT.

(T. SKOLEM, em Les Entretiens de Zürich, 1938; A. TARSKI and R. VAUGHT, Compositio Mathematicae, vol. 13, 1957; A. ROBINSON, Complete theories, North-Holland, 1956).

5. Algebra cilíndrica duma estrutura. Várias operações familiares como a de homomorfismo, fazem corresponder estruturas a estruturas. Utilizamos o conteudo do § 1 para descrever aqui uma outra que permitirá não só a oportunidade de revisão desse § 1 mas ainda a de pormos algumas questões aparentemente simples.

Seja $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \cdots, R_m \rangle$ uma estrutura de tipo $\langle n_1, \cdots, n_m \rangle$, e façamos corresponder a cada fórmula, φ, da linguagem correspondente o conjunto, φ^*, de todas as sucessões $a = \langle a_0, a_1, a_2, \cdots \rangle$ de elementos de A tais que a satisfaz, em $\mathfrak{A}, \varphi$. Observe-se que qualquer que seja j, $(v_j = v_j)^* = A^\omega$ e $(\neg\, v_j = v_j)^* = 0$ (o conjunto vazio). Observe-se, mais, que o conjunto, $\mathcal{C}$, dos conjuntos φ^* assim obtidos constitui um corpo de subconjuntos de A^ω, (uma álgebra de BOOLE $\langle \mathcal{C}, \cap, ', 0, A^\omega \rangle$ onde $\cap$ e $'$ são respectivamente intersecção e complementação). Enfim, há nesta álgebra de BOOLE 1) para cada número natural j uma operação unária, C_j, («cilindrificação») que fornece para cada $\varphi^* \in \mathcal{C}$ o conjunto, $C_j\varphi^*$, de todas as sucessões $a \in A^\omega$ tais que qualquer que seja $a' \in \varphi^*$, a' não difere de a senão, eventualmente, na coordenada j e 2) para cada par j_0, j_1 de números naturais uma operação 0-ária, d_{j_0, j_1} («diagonalisação») que fornece o subconjunto de A^ω constituido por todas as sucessões $a \in A^\omega$ tais que $a_{j_0} = a_{j_1}$. A «álgebra cilíndrica de $\mathfrak{A}$» é agora definida como sendo o sistema algébrico $\mathcal{C}\mathfrak{A} = \langle \mathcal{C}, \cap, ', 0, A^\omega, C_j, d_{j_0, j_1} \rangle_{j, j_0, j_1}$ de tipo infinito constituído por aquela álgebra de BOOLE e as operações, em número infinito, C_j e d_{j_0, j_1}. Fàcilmente se verificará que $\mathcal{C}\mathfrak{A}$ pode definir-se a partir de $\mathfrak{A}$, duma maneira intrínseca, sem o intermédio da linguagem.

Esta operação de passagem de estruturas às suas álgebras cilíndricas sugere a questão de como é que relações entre dadas estruturas (do mesmo tipo) se reflectem como relações entre as álgebras cilíndricas correspondentes. Também é natural perguntar por relações que se obtêm por iteração da operação $\mathcal{C}$. Álgebras cilíndricas abstractas são a contrapartida algébrica do cálculo de predicados com identidade assim como álgebras de BOOLE são a do cálculo proposicional. (Estão estreitamente relacionadas às álgebras poliádicas, e os problemas de representação têm sido extensamente estudados).

(L. HENKIN, em Mathematical interpretation of formal systems, North-Holland, 1955; P. HALMOS, Algebraic Logic, 1962).

*

* *

[Acrescentado em provas tipográficas: No verão de 1969, pouco depois da preparação deste artigo (inicialmente destinado a um número especial da revista *Ciência* dos estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa) apareceu o livro *Models and Ultraproducts*, de J. L. BELL e A. B. SLOMSON, *North-Holland, 1969* que também aqui recomendamos. H. R.].