NOTA DE AULA

Outra definição de semigrupo regular à direita e à esquerda

por José Morgado
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Recordemos que um semigrupo S se diz *regular à direita e à esquerda*, se, para todo elemento $a \in S$, existem elementos $x, y \in S$ tais que

$$a^2 x = a \quad \text{e} \quad y a^2 = a .$$

O objectivo desta nota é estabelecer o seguinte

TEOREMA. *Um semigrupo* S *é regular à direita e à esquerda, se e sòmente se, para todo elemento* $\mathrm{a} \in \mathrm{S}$, *existe em* S *algum elemento* z *tal que*

$$\mathrm{a^2 z = a} \quad e \quad \mathrm{z^2 a = z} .$$

DEM. O teorema é uma consequência imediata dos dois lemas que se seguem:

LEMA 1. *Seja* a *um elemento do semigrupo* S *tal que, para algum elemento* $\mathrm{z} \in \mathrm{S}$, *se tem*

(i) $\mathrm{a^2 z = a}$

(ii) $\mathrm{z^2 a = z}$.

Então existe em S *algum elemento* t *tal que*

$$\mathrm{a^2 t = a = t a^2} \quad e \quad \mathrm{t^2 a = t = a t^2} .$$

DEM. Na verdade, tem-se

$$\begin{aligned} a z a &= a^2 z \cdot z a , && \text{por (i)} \\ &= a^2 \cdot z^2 a , && \text{pela associatividade,} \\ &= a^2 z , && \text{por (ii),} \\ &= a , && \text{por (i).} \end{aligned}$$

Anàlogamente se mostra que se tem

$$z a z = z^2 a^2 z = z^2 a = z .$$

Ponhamos agora

$$t = a z^2 .$$

Então tem-se evidentemente

$$a^2 t = a^2 \cdot a z^2 = a \cdot a^2 z \cdot z = a^2 z = a$$

e também

$$t a^2 = a z^2 a^2 = a \cdot z^2 a \cdot a = a z a = a ,$$

o que prova a primeira parte do Lema 1.

A segunda parte resulta das igualdades seguintes:

$$t^2 a = a z^2 \cdot a z^2 \cdot a = a \cdot z^2 a \cdot z^2 a = a z^2 = t$$

e ainda

$$a t^2 = a \cdot a z^2 \cdot a z^2 = a^2 z \cdot z a z \cdot z = a z^2 = t .$$

LEMA 2. *Seja* a *um elemento do semigrupo* S *para o qual existem elementos* x *e* y *em* S *tais que*

(i) $\mathrm{a^2 x = a}$,

(ii) $\mathrm{y a^2 = a}$.

Então existe em S *algum elemento* z *tal que*

$$\mathrm{a^2 z = a} \quad e \quad \mathrm{z^2 a = z} .$$

DEM. Com efeito, de (i) e (ii) resulta

$$y\,a = y\,a^2 x = a\,x\,,$$

donde

$$a\,y\,a = a^2 x = a = y\,a^2 = a\,x\,a\,.$$

Pondo

$$z = y\,a\,x\,,$$

obtém-se

$$a^2 z = a^2 y\,a\,x = a \cdot a\,y\,a \cdot x = a^2 x = a$$

e, por outro lado,

$$z^2 a = y\,a\,x \cdot y\,a\,x \cdot a = y^2 a \cdot y \cdot a\,x\,a =$$
$$= y^2 \cdot a\,y\,a = y^2 a = y \cdot y\,a = y\,a\,x = z\,,$$

o que completa a demonstração do Lema 2.

Anàlogamente se mostraria que *um semigrupo* S *é regular à direita e à esquerda, se e sòmente se para todo* $a \in S$, *existe em* S *algum elemento* z *tal que*

$$z\,a^2 = a \quad e \quad a\,z^2 = z\,.$$