O «paradoxo dos gémeos» e «tempo formal»

por *António Brotas*
(Centro de Cálculo Científico, Instituto Gulbenkian de Ciência)

O tempo é uma grandeza que se mede com relógios. Relógios são máquinas que se podem comprar na Suissa (1). Estas duas sólidas verdades nem sempre são respeitadas nos textos sobre a Teoria da Relatividade.

Como, com frequência, em sobreposição ao conteúdo físico da teoria, se instalam ideias «relativistas», produtos do simples poder invocador da palavra relatividade, que conduzem a paradoxos relacionados com o tempo, surgem textos em que os autores se dedicam a definir «tempos» convenientemente elaborados para levantar esses paradoxos.

Um exemplo flagrante desta tendência é-nos dado pelo artigo: «Proper time, apparent time, and formal time in the twin paradox» de V. Hlavaty [1].

Ora, qualquer relógio suisso desmentiria ao «tempo formal» definido neste texto a qualidade de ser tempo.

Consideramos importante comentar este artigo para sublinhar a diferença que existe entre o hábil manipular do aparelho matemático da teoria e a compreensão do que ela quer dizer em termos de comportamento das coisas.

*

* *

Vejamos em primeiro lugar quais os paradoxos relacionados com o tempo que correntemente aparecem na Teoria da Relatividade.

O primeiro paradoxo.

A Teoria da Relatividade Restrita pode ser enunciada do seguinte modo: As coordenadas espaciais (ortonormais) e temporal de um acontecimento em dois referenciais de inércia estão relacionadas entre si pelas fórmulas de transformação de Lorentz:

$$(1) \qquad x' = \frac{x + v\,t}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,,$$

$$t' = \frac{t + x\dfrac{v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\,; \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

(no caso dos eixos Ox e Ox' dos dois referenciais serem paralelos a $\vec{v}$ e das origens coincidirem).

De (1) obtemos com facilidade

$$(2) \qquad t' = t\sqrt{1-\beta^2} + \frac{x'\,v}{c^2}$$

fórmula que permite pôr em evidência o resultado seguinte:

Um relógio B, móvel com uma velocidade *constante* em relação a um referencial de

(1) É corrente nos textos de Relatividade falar-se em «tempo biológico». Consideramos que o tempo biológico vivido por um ser vivo é o mesmo que é marcado por um relógio que o acompanhe e parece-nos que os relógios-relógios sempre são mais precisos e mais cómodos que os relógios biológicos. Para estabelecer as relações entre este texto e esses outros basta fazer corresponder «tempo biológico» ao que designamos por «tempo medido por relógios».

inércia S, atraza-se em relação a relógios *iguais* fixos em S.

Com efeito, sendo x' a coordenada (constante) do relógio B num referêncial de inércia S', móvel em relação a S com a velocidade v, a fórmula (2) permite escrever:

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1-\beta^2} \tag{3}$$

em que t'_2 e t'_1 representam o tempo marcado pelo relógio de B nos instantes 2 e 1 (1) e t_2 e t_1 o tempo marcado pelo relógios de S (fixos em S) que estão próximos do relógio B nos instantes 1 e 2.

Este resultado surge como um paradoxo quando raciocinamos do seguinte modo: «Se os relógios fixos em S' se atrazam em relação aos relógios fixos em S, *então* os relógios fixos em S avançam em relação aos relógios fixos em S'».

A ser assim, haveria de facto uma distinção entre os referênciais S e S' contrária ao Princípio da Relatividade que exige a equivalência de todos os referênciais de inércia.

O raciocínio indicado não pode, porém, ser usado em Relatividade. Com efeito, a sua validade pressupõe que simultaneidade tenha um significado absoluto o que não verdade em Relatividade ($t'_2 = t'_1$ não implica $t_2 = t_1$).

O Princípio da Relatividade é de facto respeitado. Em (3), t'_2 e t'_1 representam o tempo marcado por um mesmo relógio e t_2 e t_1 o tempo marcado por relógios diferentes. O relógio B atrasa-se em relação aos relógios fixos em S, mas é sucessivamente comparado *com diferentes relógios de* S.

Consideremos agora o relógio A fixo em S. As fórmulas inversas de (1) permitem escrever

$$t = t'\sqrt{1-\beta^2} - \frac{x\,v}{c^2}. \tag{2'}$$

Sendo x a coordenada (constante) de A em S temos

$$t_2 - t_1 = (t'_2 - t'_1)\sqrt{1-\beta^2}, \tag{3'}$$

em que t_2 e t_1 representam o tempo marcado pelo relógio A e t'_2 e t'_1 o tempo marcado por dois relógios fixos em S' que no instante inicial e no instante final se cruzam com o relógio A (1). A atrasa-se portanto em relação aos relógios de S'.

Em conjunto temos: cada relógio de S', B por exemplo, atrasa-se em relação aos relógios fixos em S que encontra no seu caminho e cada relógio fixo em S, A por exemplo, atrasa-se em relação aos relógios fixos em S' que encontra (2). Há perfeita equivalência entre um e outro referêncial. O Princípio da Relatividade é pois respeitado.

Esta questão só foi considerada um paradoxo, no início, quando a Teoria da Relatividade estava ainda insuficientemente divulgada. A sua compreensão, hoje faz parte da compreensão elementar da teoria.

(Em linguagem da geometria espacio-temporal o resultado (3) enuncia-se: dados dois acontecimentos 2 e 1, o comprimento do segmento que liga 2 a 1 é menor ou igual à diferença $t_2 - t_1$, em que t_i é o instante em que num dado referêncial de inércia se verifica o acontecimento i. A igualdade é válida quando os dois acontecimentos 2 e 1 se verificam no mesmo ponto do referêncial considerado. A diferença $t_2 - t_1$, igual então ao comprimento do segmento de Universo que liga 2 a 1, é chamada intervalo de tempo próprio).

(1) O instante t_1 marcado pelo relógio B e a posição do relógio B nesse instante definem o acontecimento 1 da linha de Universo de B.

(1) 1 e 2 são agora acontecimentos da linha do Universo de A.

(2) Podemos ainda dizer: É cada vez maior o avanço dos relógios de S em relação a *um* certo relógio de S' e é cada vez maior o atrazo de *um* certo relógio de S em relação aos relógios de S'. E vice-versa.

O 2.° paradoxo. O paradoxo dos gémeos.

Seja A um observador imóvel num referencial de inércia S e B um observador que inicialmente se afasta de A com uma velocidade constante v. Atingido um ponto C (fixo em S), B inverte o sentido da marcha e regressa a A com a mesma velocidade v.

Sendo d a distância A a C e t_0 o instante inicial de passagem de B por A, o observador B atinge C no instante $t_1 = t_0 + d/v$ e atinge de novo A no instante $t_2 = t_0 + 2\,d/v$. (t_0, t_1 e t_0 são valores indicados por relógios fixos em S e acertados entre si).

O estudo anterior diz-nos que um relógio que B leve no bolso se atrasa em relação aos relógios fixos em S. Durante a viagem de A para C esse relógio anda $(t_1 - t_0)\sqrt{1-\beta^2}$ e durante a viagem de regresso de C para A $(t_2 - t_1)\sqrt{1-\beta^2}$.

Neste problema os dois observadores tocam-se nos instantes inicial e final. Enquanto o relógio de A andou $(t_2 - t_0)$ o relógio de B andou só $(t_2 - t_0)\sqrt{1-\beta^2}$. Atrasou-se portanto $\Delta = (t_2 - t_0)(1 - \sqrt{1-\beta^2})$. Este atraso é o atraso de *um* relógio em relação a *um outro* relógio. A situação é diferente da do problema anterior em que vimos o atrasar de um relógio em relação a um conjunto de relógios.

O tempo que efectivamente vive cada um dos observadores é o tempo marcado pelo relógio que traz no bolso. Se A e B forem gémeos, no regresso da viagem, B vai encontrar A mais velho (tendo efectivamente vivido mais tempo) do que ele próprio.

Este resultado é um facto afirmado pela Teoria da Relatividade. A surpresa que pode causar não deve ser confundida com a constatação de um paradoxo. Um paradoxo surge quando encontramos um resultado contraditório com um outro resultado ou com um princípio de que não estamos dispostos a abdicar. Tal não se verifica neste caso como vamos procurar mostrar.

Mas vejamos em primeiro lugar como Hlavaty trata a questão no artigo referido. Na primeira parte do artigo escreve:

«From the point of view of geometry the only paradoxical thing about this problem is its name».

Chamando em seguida a, b e c aos acontecimentos passagem de B por A, chegada de B a C e segunda passagem de B por A, mostra que o resultado: *tempo medido pelo relógio de A superior ao tempo medido pelo relógio de B*, é só a tradução do resultado geométrico.

$$(a\,b) > (b\,c) + (c\,a)$$

em que $(a\,b)$ é o comprimento, em métrica pseudo-euclideana, do segmento de Universo que vai de a a b.

Seríamos tentados a dizer que o artigo podia acabar aqui. Na página seguinte Hlavaly, porém, escreve:

«On the other hand, there is something deeper in this problem than meets the eye on first glance. From the *relativistic point de view* the statement that B recedes from A and retuns to A is equivalent to the statement that A recedes from B and returns to B"».

O sublinhado é nosso. Este *ponto de vista relativista* é, como dissemos no início, um ponto de vista induzido pela prática usual da palavra relatividade, mas não pela Teoria da Relatividade.

A Teoria da Relatividade, bem ao contrário, estabelece uma clara distinção entre o que acontece ao observador A e o que acontece ao observador B. Enquanto que A está sempre imóvel num referêncial de inércia S, B está inicialmente imóvel num referencial de inércia S' e depois num outro S''. *É esta diferença* que tem como consequência a diferença de marcha dos relógios de A e de B. Ignorá-la, é fazer surgir este resultado como um paradoxo.

HLAVATY defronta-se com esta dificuldade porque considera que «do ponto de vista relativista» A e B estão nas mesmas circunstâncias. No seguimento do artigo procura resolvê-la, ou melhor, procura evitá-la com meios artificiosos que comentaremos adiante. De momento queremos só sublinhar que não nos defrontamos com esta dificuldade dado que consideramos que do ponto de vista da Teoria da Relatividade *é diferente* o que acontece a A e o que acontece a B.

Podem no entanto surgir outras dificuldades.

Uma outra maneira errada de abordar o problema consiste na aceitação do raciocínio seguinte:

«Enquanto A esteve sempre imóvel num referencial de inércia, B esteve imóvel num referencial de inércia excepto no período (que podemos supôr instantâneo) em que invérteu a marcha em C. *Então* a diferença na marcha dos relógios *só* pode ser devida *ao que se passa* nessa inversão de marcha».

A aceitação deste ponto de vista conduz imediatamente a um paradoxo. Com efeito a diferença acusada pelos relógios à chegada de B a A é $\Delta = \dfrac{2d(1-\sqrt{1-\beta^2})}{v}$. Se B, mantendo a mesma velocidade v, inverter a marcha não no ponto C mas no ponto C' à distância d' de A o atraso passa a $\Delta' = \dfrac{2d'}{v}\ \ (1-\sqrt{1-\beta^2})$. Mas o que se passa em C' é rigorosamente o que se passava em C. Sendo os atrasos diferentes não podem portanto ser devidos *ao que se passa na inversão de marcha*. (Estão votadas ao fracasso todas as tentativas para explicar a diferença Δ por meio de eventuais efeitos devidos à aceleração em C).

Como explicar então esta diferença?

Há que não pedir à teoria mais do que ela nos tem a dar, mas há que utilizar o que ela nos dá. O problema dos gémeos não é mais do que a sobreposição de dois problemas idênticos ao que consideramos quando consideramos o «1.º paradoxo». Ora, se este primeiro paradoxo é assunto esclarecido, também o segundo o pode ser sem apelo ao que quer que seja de diferente.

Procuremos em primeiro lugar responder a uma pergunta:

Há em relatividade efeitos devidos à velocidade?

O Princípio da Relatividade afirmando a equivalência de todos os referenciais de inércia nega, (em Mecânica Clássica e em Relatividade), a possibilidade de efeitos absolutos devidos à velocidade. Isto não significa, porém, impossibilidade de existência de efeitos relativos. O atrasar do relógio de um observador B que se move num referencial S é bem o exemplo de um efeito relativo devido à velocidade. (Efeito que existe em Relatividade e não em Mecânica Clássica).

A ideia de que «em Relatividade não existem efeitos devidos à velocidade» tem no entanto sido tão divulgado e tornou-se tão corrente que se nota nos textos de Relatividade como que uma espécie de retraimento em afirmar o que claramente é indicado pelas equações de LORENTZ, a saber, que em Relatividade há efeitos relativos devidos à velocidade (e até mais do que em Física Clássica).

Em consequência, vem constantemente ao decima uma «necessidade de explicar» o atraso do relógio de um observador em movimento. Em vez de encarar este atraso como um efeito relativo devido à velocidade (e inteiramente compatível com o princípio da Relatividade como já vimos) há autores que procuram ainda outras «explicações».

O atraso do relógio do observador em movimento rectilíneo e uniforme num referencial e o atraso do relógio do observador que sofre inversão de marcha e volta ao ponto inicial, um e outro, são efeitos relativistas devidos à velocidade. Não há que procurar outras explicações, há só que mostrar, no segundo caso como já foi mostrado no primeiro, que o efeito em questão é compatível com o Princípio da Relatividade.

A demonstração fica logo feita quando é feito notar que o segundo problema não é mais do que a sucessão de dois problemas iguais ao primeiro. Mas, dadas as dificuldades que a questão tem levantado, uma análise mais detalhada talvez não seja excessiva.

Problema dos gémeos e Princípio da Relatividade.

Partamos do facto assente (e compatível com o Princípio da Relatividade) de que o relógio de um observador se atrasa em relação aos relógios de um referencial no qual se move com uma velocidade constante.

Encaremos o problema dos gémeos do ponto de vista do referêncial S em que A está imóvel.

O observador B está em movimento e o seu relógio atrasa-se em relação aos relógios fixos em S. Se, inicialmente, o relógio de B estiver acertado com o relógio de A, ao chegar a C, estará atrasado em relação a um relógio fixo em C e acertado por A. Durante o regresso de C a A o relógio de B contínua a atrasar-se. É pois clara a razão do atraso do relógio de B à chegada a A.

Encaremos agora o problema do ponto de vista dos referênciais de B. B está inicialmente imóvel num referêncial S' que se move em relação a S com a velocidade v e, depois da inversão de marcha, fica imóvel num outro referêncial S'' que também se move em relação a S com a velocidade v, mas em sentido contrário.

O relógio do observador A atrasa-se constantemente em relação aos relógios fixos em S' e em relação aos relógios fixos em S''.

Vamos supôr que inicialmente todos os relógios de S' estão acertados com o relógio B e que os relógios de S'' estão acertados entre si e de modo tal que, quando B chega a C, o relógio de S'' que encontra está acertado pelo seu. (Depois da inversão de marcha B viaja lado a lado com este relógio). Satisfeitas estas condições B estará acertado com os relógios de S' na primeira fase da viagem e com os relógios de S'' na segunda fase. Admitamos ainda que A está acertado com B no momento inicial.

A está em movimento em relação a S' em relação a S''. Durante um período comparemos o relógio de A com os relógios de S'. O relógio de A atrasa-se. Como na fase final da experiência temos de comparar o relógio de A com o relógio de B (que nessa altura estará acertado com os relógios de S'') passamos *num momento qualquer* a comparar o relógio de A com os relógios de S''. (Por outras palavras: consideremos um acontecimento na linha de Universo de A. Até esse acontecimento estudemos A do ponto de vista de S' e depois do ponto de vista de S'').

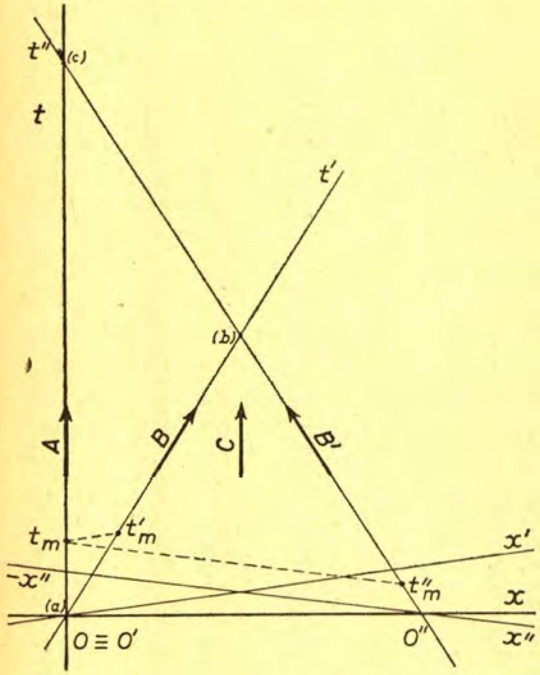
No momento da mudança (¹) A contacta com um relógio fixo em S' e com um relógio fixo em S''. Um cálculo (que pode ser deixado como exercício simples) mostra que *nesse* momento *esse* relógio de S'' está atrazado em relação a *esse* relógio de S' de

$$(4) \qquad \Delta_m = t'_m - t''_m = (t_2 - t_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2}\right).$$

valor independente do momento considerado.

(¹) Mudança de sistema de referência e não mudança física, bem entendido.

Como A está acertado com B no momento inicial e B marcha acertado com os relógios de S'' na fase final, temos que o atraso de A em relação a B no encontro final é dado pela soma do que A se atrasou em relação aos relógios de S' até ao momento da mudança, mais o avanço do relógio de S'' em relação ao relógio de S' no mo-



$S(t,x)$; $S'(t',x')$; $S''(t'',x'')$

Fig. 1

mento da mudança (valor negativo igual a $-\Delta_m$), mais o atraso de A em relação aos relógios de S'' desde esse momento até ao encontro final.

Um cálculo simples mostra que a soma da primeira e terceira parcelas é igual a $(t_2-t_0)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)$.

A soma total tem o valor negativo $(t_2-t_0)(\sqrt{1-\beta^2}-1)$.

Vemos que, no momento do reencontro, o relógio de A está avançado em relação ao de B sem ter deixado de se atrasar sempre em relação aos relógios dos referenciais S' e S'' em que B esteve fixo. Em tudo foi respeitado o Princípio da Relatividade.

O «tempo formal» de Hlavaty.

Vejamos agora a continuação do artigo de Hlavaty.

Dado o ponto de vista «relativista» que adopta, para Hlavaty, o atraso do relógio de B no problema dos gémeos é uma dificuldade, uma espécie de facto contra natura que procura evitar.

Adopta então a atitude de definir uma variável a que chama «tempo formal» convenientemente escolhida de modo a que o «tempo formal» de B venha coincidir com o «tempo formal» de A no momento do reencontro. Fala em seguida de relógios que medem o «tempo formal». Para estes «relógios» a «dificuldade», naturalmente, desaparece.

De facto, a base de partida de Hlavaty não é pròpriamente a Teoria da Relatividade (teoria física) mas sim a consideração de um espaço pseudo-euclideano, objecto matemático utilizado no aparelho matemático da teoria.

(Enunciamos atraz a Teoria da Relatividade falando de fórmulas de Lorentz, de referênciais de inércia e de coordenadas espaciais e temporais, coordenadas estas que são grandezas físicas mensuráveis com réguas e relógios. Foi esta a formulação inicial de Einstein. Posteriormente, Minkovski apresentou uma formulação elegante e fecunda (os desenvolvimentos o provaram) que se pode resumir assim: o espaço-tempo é um espaço pseudo-euclideano. Este segundo enunciado identifica o comprimento de um segmento do espaço-

-tempo dotado de uma métrica pseudo-euclideana com o tempo medido por um relógio cujo movimento coincide com esse segmento. *É esta interpretação que dá ao segundo enunciado um conteúdo igual ao do primeiro.*)

Hlavaty, partindo do espaço-euclideano, para vir ao encontro da Física, tem de identificar objectos matemáticos com grandezas físicas. (A sua marcha é em sentido contrário da inicial que foi o da elaboração do aparelho matemático a partir das entidades físicas). Quando a identificação o conduz a factos que considera desagradáveis permite-se mudá-la.

Em certa altura escreve:

«Let us return to the formula A. One switch from the geometrical interpretation to the physical application by identifying the (geometrically defined) proper time with the biological time. Although some interesting conclusions could be drawn from this identification we shall not deal with them because in this paper we are interested only in the geometrical aspect of the problem. In other words, we shall investigate only the geometrical invariants without attempting to identify them with physical (biological) notions».

Em linhas anteriores definiu geomètricamente o tempo próprio como o comprimento da linha de Universo. Apesar de reconhecer que a identificação deste tempo próprio com o tempo biológico (nós diríamos tempo medido por relógios suissos) conduz a conclusões interessantes, como conduz também a resultados que considera não relativistas (o atraso do relógio de B no problema dos gémeos dado pela fórmula A), passar a definir, também geomètricamente, um «tempo formal» distinto do tempo próprio, distinto portanto do comprimento da linha do Universo.

Diz preocupar-se ùnicamente com o aspecto geométrico do problema mas termina falando em relógios que medem o tempo formal. («In the second phase of the experiment either one of the observers sees the other observer's clock (as compared to his clock) accelerating with the increasing time so that when the observers meet again their clocks are synchronized»).

Se a construção de Hlavaty fosse consistente constituíria uma teoria física diferente Einstein. Poderiam ser sugeridas experiências para averiguar se os relógios (suissos) medem o «tempo formal» de Hlavaty ou o tempo próprio (comprimento do segmento do espaço tempo).

Mas vejamos como funcionariam relógios que medissem o «tempo formal».

Dado um acontecimento E, (ponto do espaço-tempo), um referencial S_i e um ponto O_i escolhido para origem do sistema de eixos, Hlavaty define a tempo formal $[E]_i$ do acontecimento E em relação ao referêncial S_i (de facto em relação à origem O_i) como o comprimento do segmento $E\,O_i$ do espaço-tempo (dotado duma métrica pseudo-euclideana).

Estudando em seguida o problema dos gémeos adopta em primeiro lugar como referêncial o referêncial de A e com a origem o acontecimento encontro inicial de A com B. Admite em seguida que os observadores A e B tem relógios que medem o tempo formal referente a este referêncial e a esta origem. Como não podia deixar de ser o relógio de B vai estar sincronizado com o relógio de A no momento em que os dois observadores se tornam a encontrar. (O tempo formal, com efeito, só depende das coordenadas).

Mas suponhamos que um dos observadores, B por exemplo, leva no bolso não só o relógio que mede o tempo formal $[\ ]_A$ referente ao referêncial A e à origem considerados, mas também um outro relógio que mede o tempo formam $[\ ]_i$ referente a um outro qualquer referêncial S_i e a uma outra origem O_i. A definição e a geometria do espaço-tempo mostram que estes dois relógios, que andam juntos no bolso de B, se desacertam constantemente um do outro (1). Não pretendem os suiços que seja esta uma qualidade dos seus relógios.

HLAVATY estuda em seguida o problema dos gémeos do ponto de vista de B mas, neste segundo estudo, os relógios dos observadares A e B são outros relógios. Conseguem chegar acertados ao encontro (2), mas andam desacertados dos relógios anteriormente utilizados no estudo do problema «do ponto de vista A». Cada observador teria de ter assim vários «relógios» para medir distintos «tempos formais».

Parecem-me estas divergências bem suficientes para poder dizer que, como conceito físico, «tempo formal» não é tempo. Como do ponto de vista geométrico não é mais do que a distância a um ponto fica-nos que as relações invariantes apresentadas no artigo são simples relações da geometria dos triângulos (3).

Uma questão em suspenso.

No estudo que fizemos do problema dos gémeos não consideramos qualquer espécie de efeito devido às acelerações. A razão foi esta: o observador A esteve sempre imóvel num referêncial de inércia e o mesmo se passou com B, excepto no período de inversão de marcha em C que consideramos instantâneo. Esta inversão de marcha só pode ser devida a uma causa exterior, um choque elástico, por exemplo. Como a consideramos instantânea e como excluímos a hipótese de saltos instantâneos na marcha de um relógio não tivemos que considerar no problema dos gémeos qualquer efeito devido à aceleração. Uma pequena alteração no enunciado permite de resto mostrar claramente que neste problema os atrasos nada têm que ver com acelerações. Em vez de admitirmos que B altera a marcha em C, vamos admitir que B se cruza em C com outro observador B' que marcha em sentido contrário e que no momento do cruzamento acerta o relógio por B. Neste problema não há acelerações de qualquer espécie e, estando B acertado por A no início e sendo B' acertado por B em seguida, vamos, no final, encontrar entre A e B' o mesmo atraso $(t_2 - t_0)(1 - \sqrt{1-\beta^2})$. Este atraso é pois devido às velocidades e não às acelerações.

Mas, ser *este* atraso devido às velocidades e não às acelerações não exclui a possibilidade de *noutros* problemas se vêrificarem efeitos temporais devidos às acelerações.

O problema pode ser apresentado da seguinte maneira:

A Teoria da Relatividade Restrita diz-nos que o relógio de um observador B, em movimento em relação a um referencial de inércia S_0 com uma velocidade v *constante*, se atrasa em relação aos relógios de S_0 segundo a lei

$$(5) \qquad t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1-\beta^2}.$$

Mas é legítimo generalizar e escrever

$$(6) \qquad t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\beta^2}\, dt$$

no caso de v variável?

Não se trata de uma simples questão de cálculo integral.

A simples validade (5) no caso de v constante não implica a validade de

$$(7) \qquad dt' = \sqrt{1-\beta^2}\, dt$$

(1) O «tempo» medido por um não é igual nem sequer função linear do «tempo» medido pelo outro.

(2) E à custa de sérias dificuldades como seja o estar o relógio de A parado durante um período.

(3) E no entanto foram transcritas sem comentário crítico no resumo do artigo feito por G. H. WHITROU publicado na Mathematical Reviews e repetido na Physies Abstracts (Setembro 1961).

no caso de v variável. Implica só a validade de

$$(8) \qquad dt' = f(v, \gamma, \cdots) dt$$

em que f é uma função à priori não determinada de v e de γ aceleração (e eventualmente de outras derivadas de ordem superior) que se reduz a $\sqrt{1-\beta^2}$ quando v é constante.

Não fica à priori excluida a hipótese da relação geral ser do tipo

$$(9) \quad dt' = \sqrt{1-\beta^2 + K(\gamma)}\, dt \quad \text{com } K(0)=0,$$

relação que conduz a um resultado diferente de (6).

O problema é pois este: É possível afirmar a validade de (6) no caso de v variável? A resposta afirmativa significa afirmação da não existência de efeitos temporais devidos à aceleração.

O problema é delicado. Muitos autores têm tendência em dizer que se trata de um problema de Relatividade Generalizada. Nós diremos, de preferência, que se trata de um problema que se apresenta em Relatividade Generalizada do mesmo modo que em Relatividade Restrita.

Dado que (5) não implica (6) a pergunta que se nos põe é esta: A Teoria da Relatividade Restrita afirma unicamente (5) ou afirma também (6) (1)?

(1) Podemos avançar um argumento em favor da validade de (6) no caso de v variável. Uma fórmula física tem de ser correcta do ponto de vista dimensional. Numa fórmula como a fórmula (9) o termo $K(\gamma)$ tem de ser de dimensão nula. Ora, para o compor, só dispomos de uma grandeza γ, de dimensão LT^{-2} e de uma constante c de dimensão LT^{-1}. Temos como única solução $K(0)=0$.

A ser verdade só a primeira parte, a Teoria da Relatividade Restrita, como teoria sobre o tempo, seria uma teoria incompleta no sentido de que, dado o movimento de um corpo, só em casos particulares a teoria permitiria calcular o tempo medido por um relógio que acompanhasse esse corpo.

É em geral aceite a validade de (6) (1). Em favor desta aceitação joga muito a necessidade de se dispor de uma teoria completa.

Um autor como ARZELIÈS [2] sugere que se façam experiências para estudo deste assunto. É uma atitude a não desencorajar. O problema de uma ciência como a Mecânica é o do confronto de uma estrutura matemática que pretendemos desenvolver com uma realidade que procuramos conhecer. Convem às vezes pedir à realidade que nos informe directamente.

[1] Journal of Mathematics and Mechanics. Vol. 9, No 5, Sept. 1960, p. 733-744.

[2] «La cinematique relativiste» (1955). «La dynamique relativiste et ses applications» Fasc. II (1958). «Relativité généralisée. Gravitation» Fasc I (1961). Gauthier-Villars. Nestes livros o autor dá cêrca de 150 referências relacionadas com os paradoxos do Tempo em Relatividade.

(1) A extensão deste ponto de vista à Relatividade Generalizada permite calcular o tempo próprio de um corpo que não segue uma geodesica do espaço-tempo, isto é, sujeito a forças além das gravitacionais. O problema põe-se em Relatividade Generalizada do mesmo modo que em R. R., só que neste caso o espaço-tempo é mais complicado.