Cónicas, Ortópticas e envolventes das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro

por **F. Peres Rodrigues**

Engenheiro Civil, especialista do Serviço de Barragens, chefe da Divisão de Fundações e Túneis, LNEC

Chama-se isóptica duma curva plana ao lugar geométrico dos pontos desse plano donde é possível traçar duas tangentes à curva formando um ângulo constante; se esse ângulo for recto a isóptica recebe o nome particular de ortóptica.

Demonstra-se que a isóptica duma cónica centrada é uma cíclica de 4.º grau, que admite dois eixos de simetria, denominada espírica de PERSEUS [1], e ainda que a isóptica duma parábola é uma hipérbole. Neste artigo, estudam-se as ortópticas e as envolventes das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, das cónicas, e as suas propriedades mais importantes.

1 — Cónicas centradas (elipse e hipérbole)

Seja:

$$F(x, y, t) = (1 - \varepsilon^2)\,x^2 + y^2 - a^2(1 - \varepsilon^2)\,t^2 = 0 \tag{1}$$

a equação duma cónica centrada relativa aos seus eixos, em coordenadas cartesianas homogéneas, sendo a o semi-eixo existente no eixo que passa pelos focos, eixo dos x, e ε a excentricidade da cónica centrada (fig. 1).

1.1 — As tangentes tiradas de um ponto P de coordenadas (X, Y, T) para a cónica centrada, obedecem à equação genérica:

$$\left(X\frac{\partial F}{\partial x} + Y\frac{\partial F}{\partial y} + T\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2 - 4F(x, y, t)\;F(X, Y, T) = 0 \tag{2}$$

A expressão (2), atendendo a (1), em coordenadas cartesianas e ordenada em relação a y, toma a forma particular:

$$(a^2 - X^2)\,y^2 - 2\,(a^2 - Xx)\,Yy + [a^2(1 - \varepsilon^2)(X - x)^2 + Y^2(a^2 - X^2)] = 0 \tag{3}$$

que resolvida permite escrever:

$$y = \frac{(a^2 - Xx)Y \pm a\,(X - x)\sqrt{Y^2 - (1 - \varepsilon^2)(a^2 - X^2)}}{a^2 - X^2} \tag{4}$$

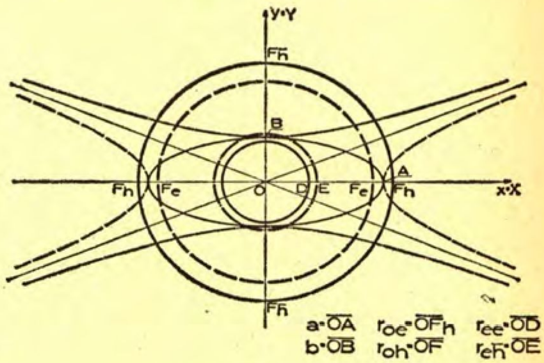

Fig. 1

A expressão (4) representa a equação de duas rectas tangentes à cónica centrada (1), passando pelo ponto P, de coeficientes angulares:

$$m_{1,2} = \frac{-XY \pm a\sqrt{Y^2 - (1 - \varepsilon^2)(a^2 - X^2)}}{a^2 - X^2} \tag{5}$$

---

[1] Ver, por exemplo, AUBERT e PAPELIER — Exercices de géométrie analytique, tome II, Paris 1948.

Para que as duas tangentes (4) sejam ortogonais, devem os seus coeficientes angulares (5) obedecer à condição:

$$(6) \qquad m_1 \cdot m_2 = -1$$

o que conduz a:

$$(7) \qquad X^2 + Y^2 = a^2(2 - \varepsilon^2) = r_0^2$$

ou:

$$(8) \qquad \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 + \varepsilon^2 = 2\,.$$

A expressão (7) mostra que a ortóptica duma cónica centrada é uma circunferência concêntrica de raio r_0 de valor $a\sqrt{2-\varepsilon^2}$, real, nulo ou imaginário, conforme a excentricidade ε for, respectivamente, inferior, igual (hipérbole equilátera) ou superior a $\sqrt{2}$ (hipérbole alongada). Embora a expressão (1) não comporte o caso da parábola ($\varepsilon = 1$ e $a = \infty$), a expressãs (7) dá para ortóptica da parábola uma recta (circunferência de raio infinito), como adiante se verá. Na fig. 2 encontra-se representada a tracejado, no sistema de eixos $\left(\frac{r_0}{a}, \varepsilon\right)$, a expressão (8) e indicada a natureza da ortóptica em função da natureza da cónica.

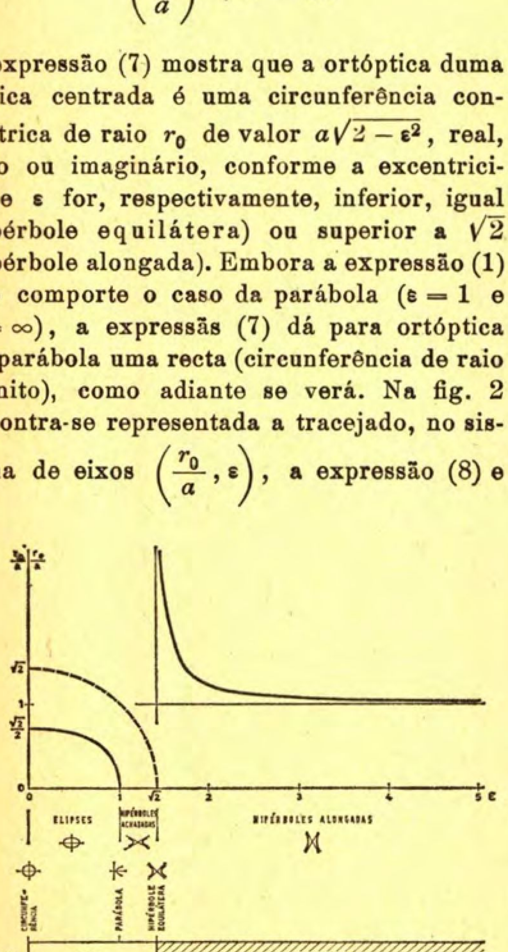

Fig. 2

1.2 — No caso da elipse a excentricidade ε, é dada por

$$(9) \qquad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

e a sua substituição em (7) conduz a:

$$(10) \qquad X^2 + Y^2 = a^2 + b^2 = r_{oe}^2$$

em que b é o semi-eixo menor da elipse (fig. 1).

A expressão (10) mostra que:

a) a área limitada pela circunferência ortóptica da elipse é igual à soma das áreas dos seus círculos maior e menor;

b) o raio da circunferência ortóptica da elipse é igual à semi-distância focal das hipérboles conjugadas que lhe estão associadas (fig. 1);

c) a ortóptica da cincunferência, caso de $a = b = r$, é uma circunferência de raio $r\sqrt{2}$ (fig. 2).

1.3 — No caso da hipérbole a excentricidade ε é dada por:

$$(11) \qquad \varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$

e a sua substituição em (7) conduz a:

$$(12) \qquad X^2 + Y^2 = a^2 - b^2 = r_{oh}^2$$

em que b é o semi-eixo conjugado da hipérbole (fig. 1).

A expressão (12) mostra que:

a) a circunferência ortóptica da hipérbole só é real para a hipérbole achatada (caso de $a > b$), reduzindo-se a um ponto, centro da cónica, para a hipérbole equilátera (fig. 2);

b) o raio de circunferência ortóptica da hipérbole achatada é igual à semi-distância focal da elipse que lhe está associada (fig. 1).

1.4 — A envolvente das cordas da cónica centrada (1) que subtendem ângulos rectos ao centro pode ser obtida a partir da intercepção de dois raios ortogonais:

$$(13) \qquad y = m x \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{m} x .$$

Assim, designando por $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ os dois pontos de intercepção, as suas coordenadas devem satisfazer as expressões (1) e (13), donde:

$$(14) \qquad x_1^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)+m^2}$$

$$\text{e} \quad x_2^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\, m^2}{(1-\varepsilon^2)\, m^2 + 1} .$$

A corda genérica $\overline{P_1 P_2}$ existe na recta cuja equação é dada pela expressão:

$$(15) \qquad m(x_1 - x_2) y - (m^2 x_1 + x_2) x + (1+m^2) x_1 x_2 = 0 .$$

A distância da recta à origem (15), tem por valor:

$$(16) \qquad r_e^2 = \frac{(1+m^2) x_1^2 x_2^2}{m^2 x_1^2 + x_2^2}$$

ou, atendendo a (14), e simplificando:

$$(17) \qquad r_e^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{2-\varepsilon^2}$$

que pode escrever-se:

$$(18) \qquad \left(\frac{r_e}{a}\right)^2 = \frac{1-\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2} .$$

A expressão (17) permite afirmar que a envolvente das cordas duma cónica centrada que subtendem ângulos rectos ao centro, é uma circunferência concêntrica de raio r_e e de equação:

$$(19) \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{2-\varepsilon^2}$$

real para:

$$\varepsilon < 1 \ \text{(elipse)}$$

$$\varepsilon > \sqrt{2} \ \text{(hipérbole alongada)}$$

degenerando na recta imprópria do plano, para:

$$\varepsilon = \sqrt{2} \ \text{(hipérbole equilátera)}$$

e imaginária para

$$\sqrt{2} > \varepsilon > 1 \ \text{(hipérbole achatada).}$$

Na fig. 2 encontra-se representada, a traço cheio, no sistema de eixos $\left(\frac{r_e}{a}, \varepsilon\right)$, a expressão (18) e indicada a natureza da envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro em função da natureza da cónica. O caso da parábola ($\varepsilon = 1$ e $a = \infty$) será tratado adiante, em separado.

1.5 — No caso da elipse, a expressão (17) atendendo a (9) e (10), pode tomar as formas:

$$(20) \qquad r_{ee} = \frac{a\, b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad r_{ee} \cdot r_{oe} = a \cdot b$$

o que permite afirmar:

a) ser o raio da circunferência envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro o quarto proporcional da semi-distância focal da hipérbole associada e dos semi-eixos da elipse dada;

b) ser o produto dos raios das circunferências ortóptica e envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, igual ao produto dos semi-eixos da elipse;

c) ter a elipse de semi-eixos r_{ee} e r_{oe} área igual à elipse dada, e quando co-axiais, interceptarem-se em quatro pontos de coordenadas

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{2-\varepsilon^2}{3-\varepsilon^2}}\,;\ \pm a\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{3-\varepsilon^2}}\right),$$

sendo a tangente do ângulo que os seus raios vectores fazem com os eixos maiores das elipses igual a $\pm\dfrac{b}{r_{oe}}$;

d) serem a ortóptica e a envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, duma circunferência, as circunferências circunscrita e inscrita aos quadrados respectivamente, circunscrito e inscrito à circunferência dada (fig. 2).

1. *6* — No caso das hipérboles conjugadas a expressão (17), atendendo a (11) e (12), toma as formas:

$$\text{para } a>b \quad r_{e\bar h}=\frac{a\,b}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad \text{e} \quad r_{oh}\cdot r_{e\bar h}=a\,b$$

(21)

$$\text{para } a<b \quad r_{eh}=\frac{a\,b}{\sqrt{b^2-a^2}} \quad \text{e} \quad r_{o\bar h}\cdot r_{eh}=a\,b$$

caracterizando $\bar h$ a hipérbole conjugada, que no presente artigo terá necessàriamente o eixo das ordenadas como eixo transverso. As expressões (21) permitem afirmar que:

a) o raio da circunferência envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro duma hipérbole é igual ao quarto proporcional da semi-distância focal da elipse associada e dos semi-eixos da hipérbole, sendo real sòmente para as hipérboles alongadas $(a<b)$;

b) o produto dos raios das circunferências ortóptica e envolvente das cordas que submetem ângulos rectos ao centro de duas hipérboles conjugadas, é igual ao produto dos semi-eixos comuns;

c) a hipérbole dada, desde que tenha excentricidade superior a $\sqrt{3}$, e a hipérbole de semi-eixos $r_{e\bar h}$ (semi-eixo conjugado — eixo das abcissas) e r_{eh} (semi-eixo transverso-eixo das ordenadas) interceptam-se em quatro pontos de coordenadas

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{\varepsilon^2-2}{\varepsilon^2-3}}\,;\ \pm a\sqrt{\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2-3}}\right),$$

sendo a tangente do ângulo dos seus raios vectores com o eixo das abcissas igual a $\pm\dfrac{b}{r_{o\bar h}}$. No caso particular da hipérbole dada ter a excentricidade de $\sqrt{3}$, as duas hipérboles são conjugadas e terão de comum os seus dois pontos impróprios;

d) a ortóptica e a envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, duma hipérbole equilátera são respectivamente, o seu centro e a recta imprópria do plano (fig. 2).

1. *7* — O lugar geométrico dos pontos de intercepção definidos em 1. 5 c) e 1. 6 c), quando referido ao sistema de eixos $\left(\dfrac{x}{a},\dfrac{y}{a}\right)$, é uma hipérbole de equação:

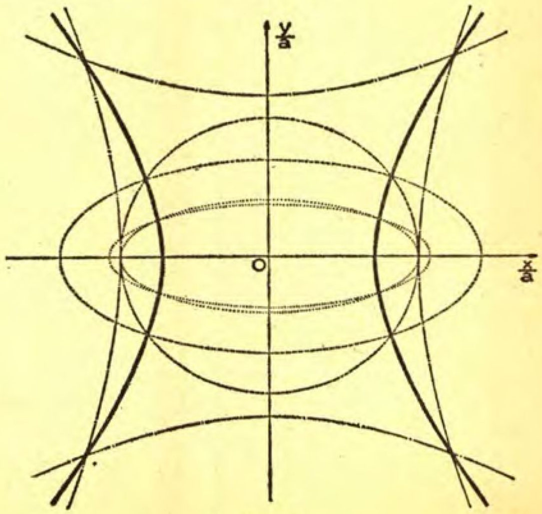

Fig. 3

(22) $$2\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

que se obtem eliminando a excentricidade ε entre as coordenadas dos pontos de intercepção (fig. 3). De notar que, neste sistema de eixos, todas as elipses e hipérboles alongadas dadas, têm o semi-eixo das abcissas unitário.

2 — Parábola

Seja:

(23) $$F(x, y, t) = y^2 - 4fxt = 0$$

a equação duma parábola, em coordenadas cartesianas homogéneas, passando pela origem, tendo como eixo o eixo dos x e sendo f a distância do foco e da directriz à origem.

2. 1 — As tangentes traçadas de um ponto P de coordenadas (X, Y, T) para a parábola, obedecem à equação genérica (2), a qual, atendendo a (23) pode tomar a forma ordenada em relação a y:

(24) $$Xy^2 - (X - x)Y + [f(X - x)^2 + Y^2 x] = 0$$

que, resolvida, permite escrever:

(25) $$y = \frac{(X + x) \pm (X - x)\sqrt{Y^2 - 4fX}}{2X}$$

A expressão (25) representa as duas rectas tangentes à parábola que passam por P, de coeficientes angulares:

(26) $$m_{1,2} = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4fX}}{2X}$$

pelo que, para que sejam ortogonais, deverá ser:

(27) $$X = -f$$

A expressão (27) mostra que a ortóptica duma parábola é uma recta coincidente com a sua directriz. Efectivamente a fig. 2 mostra que, para a parábola, a relação $\frac{r_o}{a}$ é igual à unidade (pois sendo a infinito, se-lo-á também r_o, raio da circunferência ortóptica), por serem r_o e a dois infinitamente grandes equivalentes.

2. 2 — A envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, não tem, relativamente à parábola, uma aplicação imediata, dado que a parábola não tem centro a distância finita; contudo, por extensão e com base na fig. 2, pode dizer-se que essa envolvente se reduz ao centro da parábola, isto é, ao ponto impróprio do seu eixo.

Resumo

Estuda-se neste artigo, em relação às cónicas, a ortóptica e a envolvente das cordas que subtendem ângulos rectos ao centro, e as suas propriedades mais importantes.

Résumé

On étudie dans cet article, a propos des coniques, la orthoptique et la envellope des cordes qui mènent des angles droits au centre, et leur propriétés les plus importantes.

Synopsis

A study has been made, for conics, of the orthoptic and the envelope of the chords subtending a right angle at the centre. Some important properties are also deduced for these curves.