Cardinalidade de alguns conjuntos de topologias compactas

por O. T. Alas
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil

Seja E um conjunto infinito. Quantas topologias compactas T_1 há sobre E? Compactas T_2? Metrizáveis e localmente compactas? O objectivo desta Nota é responder a essas perguntas, bem como a outras semelhantes. Provàvelmente estes resultados já sejam conhecidos, entretanto desconhecemos publicação a respeito.

No que se segue, diremos que uma topologia τ sobre E satisfaz uma certa propriedade se o espaço topológico (E, τ) a satisfizer. (Por exemplo, τ é compacta T_1 se o espaço topológico (E, τ) for compacto T_1).

Sendo Z um conjunto qualquer, $p(Z)$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de Z e $|Z|$ denota o número cardinal de Z.

1. É bem conhecido o facto de que o conjuntodas topologias T_2 sobre E tem cardinalidade igual a $2^{2^{|E|}}$ (consequência de [1], página 150, exercício 6).

Seja X o espaço topológico produto $\{0,1\}^{p(E)}$, onde sobre $\{0,1\}$ consideramos a topologia discreta. Sabemos que há um subconjunto B de X, tal que $|B| = |E|$ e, além disso, B é totalmente denso.

O conjunto $X-B$ tem cardinalidade igual a $|X|$. Para cada $y \in X - B$ consideremos o conjunto $F(y) = \{V \cap B \mid V \in V(y)\}$, onde $V(y)$ é o filtro das vizinhanças de y em X. Ora, $F(y)$ é filtro sobre B e a intersecção de seus elementos é vazia. Por outro lado, a aplicação de $X - B$ no conjunto de todos os filtros sobre B, que a cada y associa $F(y)$ é injectora. Concluímos, pois, que o conjunto dos filtros sobre E, cuja intersecção de todos os seus elementos é vazia, tem cardinalidade igual a $2^{2^{|E|}}$ (pois $|E| = |B|$ e $|X| = 2^{2^{|E|}}$).

Indiquemos por A o conjunto dos filtros sobre E cuja intersecção de todos os seus elementos é vazia.

Teorema 1. *O conjunto das topologias compactas* T_1 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{2^{|E|}}$.

Demonstração. Sejam a e b dois elementos distintos não pertencentes a E. Ponhamos $Y = E \cup \{a, b\}$ (note-se que $|Y| = |E|$). Para cada $F \in A$, seja $\tau(F)$ a topologia sobre Y tal que:

1) $\{x\}$ é aberto para todo $x \in E$;
2) $\{Z \cup \{b\} \mid Z \in F\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de b;
3) $\{T \cup \{a\} \mid T \subset E$ e $E - T$ é finito$\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a.

A topologia $\tau(F)$ é compacta T_1. Por outro lado, se $F' \in A$ e $F' \neq F$, então $\tau(F) \neq \tau(F')$. Segue-se, pois, a tese.

Teorema 2. *O conjunto das topologias compactas* T_4 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{2^{|E|}}$.

Demonstração. Sejam a e b dois elementos distintos não pertencentes a E. Ponhamos, como no teorema anterior, $Y = E \cup$

$\cup \{a, b\}$. Para cada $F \in A$, seja $\tau(F)$ a topologia sobre Y tal que:

1) $\{x\}$ é aberto para todo $x \in E$;
2) $\{Z \cup \{b\} \mid Z \in F\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de b;
3) $\{T \cup \{a, b\} \mid T \subset E$ e $E - T$ é finito$\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de a.

A topologia $\tau(F)$ é compacta T_4. Por outro lado, se $F' \in A$ e $F' \neq F$, então $\tau(F) \neq \tau(F')$. Segue-se, pois, a tese.

2. Agora vamos estudar o que acontece com o conjunto das topologias compactas T_3 sobre E. Para isso, vamos demonstrar alguns lemas.

Lema 1. *Seja* m *um número cardinal infinito,* m $\leqq |\mathrm{E}|$. *O conjunto* H *das topologias sobre* E, *tais que todo o ponto de* E *admite um sistema fundamental de vizinhanças de cardinalidade menor ou igual a* m, *tem cardinalidade igual a* $2^{|\mathrm{E}|}$.

Demonstração. Seja τ pertencente a H. Então, para cada $x \in E$, fixemos um sistema fundamental de vizinhanças de x, $V(x)$, tal que $|V(x)| \leqq m$. A τ associemos a família $(V(x))_{x \in E}$ construída da forma acima. Ora, para cada $x \in E$, $V(x)$ é um subconjunto de $p(E)$ de cardinalidade menor ou igual a m. (Em $p(E)$ há $|p(E)|^m$ conjuntos nessas condições, e $|p(E)|^m = 2^{|E|}$). Mostramos assim que $|H| \leqq 2^{|E|}$ (pois uma topologia fica caracterizada pelos sistemas fundamentais de vizinhanças de cada um dos pontos de E). Falta mostrar que vale o sinal de igualdade.

Primeiramente, mostremos que H tem pelo menos dois elementos (evidentemente a topologia discreta sobre E pertence a H). Ponhamos $S = \{0\} \cup \{1/n \mid n \geqq 1\}$ e consideremos o espaço topológico produto $S \times E$, onde S é subespaço da recta real e, em E consideramos a topologia discreta. (Note se que $|S \times E| = |E|$ e $S \times E$ não é discreto). Logo, $|H| \geqq 2$.

Seja M o conjunto das topologias sobre $E \times E$, tais que todo o ponto de $E \times E$ admite um sistema fundamental de vizinhanças de cardinalidade menor ou igual a m. Como $|E \times E| = |E|$, então $|M| = |H|$.

Consideremos a aplicação de H^E em M que associa a cada família $(\tau_x)_{x \in E}$ a topologia sobre $E \times E$ que tem por base de abertos o conjunto $\{\{x\} \times Z \mid Z \in \tau_x, x \in E\}$. Esta aplicação é injectora, logo $|H|^{|E|} = |H|$ ou, ainda, $|H| = 2^{|E|}$.

Semelhantemente se demonstra o

Corolário. *O conjunto das topologias sobre* E *que são metrizáveis tem cardinalidade igual a* $2^{|\mathrm{E}|}$.

Lema 2. *Se* E *é um espaço topológico compacto* T_3, *então todo o ponto admite um sistema fundamental de vizinhanças de cardinalidade menor ou igual a* $|\mathrm{E}|$.

Demonstração. Fixemos $x \in E$. Seja $V(x)$ o conjunto de todas as vizinhanças de x. Ponhamos $D = \bigcap \{Z \mid Z \in V(x)\}$; por ser T_3 $D = \bigcap \{\overline{Z} \mid Z \in V(x)\}$, onde $\overline{Z}$ denota a aderência de Z. Existe $W(x) \subset V(x)$, com $|W(x)| \leqq |E - D|$ tal que $D = \bigcap \{\overline{Z} \mid Z \in W(x)\}$. O conjunto T das intersecções finitas de conjuntos de $\{\overline{Z} \mid Z \in W(x)\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x nas condições desejadas. Com efeito, por absurdo suponhamos que exista uma vizinhança aberta U de x que não contém nenhum elemento de T. Neste caso, o conjunto $\{Y - U \mid Y \in T\}$ é base de filtro sobre E, donde, como E é compacto, tem um ponto aderente que, necessàriamente, pertence a $D - U = \emptyset$. Está demonstrado o lema.

Este lema no caso particular em que E é compacto T_2 está demonstrado em [2], página 105.

TEOREMA 3. *O conjunto das topologias compactas* T_3 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

DEMONSTRAÇÃO. Em consequência dos lemas 1 e 2 resulta que a cardinalidade desse conjunto é menor ou igual a $2^{|E|}$. Como toda a topologia compacta T_2 é, também, compacta T_3, este teorema decorre do teorema 4 que demonstraremos mais adiante.

LEMA 3. *O conjunto das topologias compactas* T_2 *sobre* E *é equipotente ao conjunto das topologias localmente compactas* T_2 *sobre* E.

DEMONSTRAÇÃO. Denotemos por M o conjunto das topologias localmente compactas T_2 sobre E e por K, o das topologias compactas T_2 sobre E. Como $K \subset M$, em virtude do teorema de BERNSTEIN-CANTOR, basta mostrar que há uma função injectora de M em K. Seja $w \notin E$ e ponhamos $Y = E \cup \{w\}$. (Note-se que $|Y| = |E|$). A cada $\tau \in M$ associemos a topologia compactificada de ALEXANDROFF sobre Y. Como esta associação é injectora, daí decorre fàcilmente a tese.

TEOREMA 4. *O conjunto das topologias compactas* T_2 *sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

DEMONSTRAÇÃO. Em vista do lema 3 e do facto de que $|E \times E| = |E|$, basta mostrar que o conjunto das topologias metrizáveis localmente compactas sobre $E \times E$ tem cardinalidade igual a $2^{|E|}$. Designemos este conjunto por M. Indiquemos por P o conjunto das topologias metrizáveis localmente compactas sobre E. Consideremos a função injectora de P^E em M que associa a cada família $(\tau_x)_{x \in E}$ a topologia sobre $E \times E$ que tem por base de abertos o conjunto

$$\{\{x\} \times Z \mid Z \in \tau_x, x \in E\}.$$

Como $|P| \geq 2$ e em vista dos lemas 1 e 2, segue-se a tese.

COROLÁRIO. *O conjunto das topologias metrizáveis localmente compactas sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

OBSERVAÇÃO. Se existe uma topologia compacta metrizável sobre E, então necessàriamente $|E| \leq 2^{\aleph_0}$. Por outro lado, se $|E| = \aleph_0$, então toda a topologia compacta T_2 é metrizável ([2], página 179; lema 1).

TEOREMA 5. *Se* $|E| = 2^{\aleph_0}$, *o conjunto das topologias metrizáveis compactas sobre* E *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

DEMONSTRAÇÃO. O conjunto $[0,1]$, que é equipotente a E, com τ, topologia habitual, é metrizável e compacto. Para cada partição $\{X_1, X_2\}$ de E em dois conjuntos (não vazios e disjuntos), fixemos duas funções bijectoras, $f_1 : [0,1] \to E \times X_1$ e $f_2 : [0,1] \to E \times X_2$. Em $E \times E$ consideremos a topologia que tem por base de abertos o conjunto $\{f_1(Z) \mid Z \in \tau\} \cup \{f_2(Z) \mid Z \in \tau\}$. (Esta topologia é metrizável compacta. Além disso, os conjuntos $E \times X_1$ e $E \times X_2$ são abertos-fechados, conexos).

O resto da demonstração segue fàcilmente, bastando recordar que o conjunto das partições nas condições acima tem cardinalidade igual a $2^{|E|}$ ([3]).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique,* livro 3, cap. 1 e 2, (1965), Hermann, Paris.

[2] R. ENGELKING, *Outline of General Topology,* (1968), North Holland Publishing Co., Amsterdam.

[3] E. FARAH, *Number of equivalence relations on a set,* Ciência e Cultura **18** (1966), n.º 4, pág. 437.