Cardinalidade de um conjunto de anéis

por ***O. T. Alas***
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil

O objectivo desta nota é responder a uma questão que nos foi proposta pelo Professor NEWTON C. A. da COSTA do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. *Questão:* Sendo E um conjunto infinito, qual a cardinalidade do conjunto dos anéis sobre E e qual a cardinalidade do conjunto dos grupos sobre E? Demonstraremos que a resposta de ambas as perguntas é $2^{|E|}$.

Nesta Nota as operações de adição e multiplicação dos vários anéis considerados serão sempre indicadas, respectivamente, por $+$ *e* $\cdot$, o que não acarretará confusão pois em cada caso precisaremos quais as operações em questão.

1. Seja E um conjunto infinito e $|E|$ o seu número cardinal. Seja E_1, $E_1=(E,+,\cdot)$, um anel sobre E. Em $E\times E$ consideremos as operações de adição (denotada com o sinal $+$) e de multiplicação (denotada com o sinal $\cdot$) definidas do seguinte modo: para quaisquer $x,y,r,s \in E$

$$(1)\qquad \begin{aligned}(x,r)+(y,s)&=(x+y,r+s)\\ (x,r)\cdot(y,s)&=(x\cdot y,r\cdot s)\end{aligned}$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ que aparecem nos segundos membros das igualdades (1) designam, respectivamente, a adição e a multiplicação em E_1. Posto isto, designaremos por A o anel $(E\times E,+,\cdot)$, cujas operações estão definidas em (1).

Denotemos por 0 o elemento neutro da adição em E_1 e sejam a e b dois elementos de E, tais que $0\neq a\neq b\neq 0\neq a+b$ (onde $+$ designa a adição em E_1).

A seguir vamos definir $2^{|E|}$ funções injetoras de $E\times E$ sobre $E\times E$. Para cada subconjunto X de E, com $0\in X$, ponhamos

$$(2)\qquad \begin{aligned}f_X: E\times E &\to E\times E\\ (x,0)&\to(x,0)\\ (x,a)&\to(x,b)\\ (x,b)&\to(x,a)\\ (y,0)&\to(y,a)\\ (y,a)&\to(y,b)\\ (y,b)&\to(y,0)\\ (z,r)&\to(z,r)\end{aligned}$$

para quaisquer $x\in X$ $y\notin X$, $z\in E$ e $r\in E$, $r\notin\{0,a,b\}$.

Para cada X nas condições acima, indiquemos por $A(X)$ o anel sôbre $E\times E$ cujas operações de adição (denotada por $+$) e de multiplicação (denotada por $\cdot$) definimos abaixo: para quaisquer $x,y,r,s\in E$

$$(3)\qquad \begin{aligned}(x,r)+(y,s)&=f_X(f_X^{-1}((x,r))+f_X^{-1}((y,s)))\\ (x,r)\cdot(y,s)&=f_X(f_X^{-1}((x,r))\cdot f_X^{-1}((y,s))),\end{aligned}$$

onde os sinais $+$ e $\cdot$ que aparecem nos segundos membros das igualdades (3) designam, respectivamente, a adição e a multiplicação em A.

PROPOSIÇÃO 1. *Sejam* X *e* Y *dois subconjuntos de* E *tais que* $0\in X\cap Y$, $X\neq Y$. *Nestas condições, os anéis* A(X) *e* A(Y) *são distintos.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que existe $x \in X$ tal que $x \notin Y$. Se os anéis $A(X)$ e $A(Y)$ fôssem iguais, teríamos, em particular, que as operações de adição e multiplicação seriam as mesmas para os dois anéis. Logo, deveríamos ter, em virtude de (3),

$$f_X(f_X^{-1}((x,0)) + f_X^{-1}((x,a))) =$$
$$= f_Y(f_Y^{-1}((x,0)) + f_Y^{-1}((x,a))),$$

o que não se verifica, pois

$$f_X(f_X^{-1}((x,0)) + f_X^{-1}((x,a))) =$$
$$= f_X((x,0) + (x,b)) = f_X((x+x, b))$$

e

$$f_Y(f_Y^{-1}((x,0)) + f_Y^{-1}((x,a))) =$$
$$= f_Y((x,a) + (x,b)) = f_Y((x+x, a+b)).$$

E está demonstrada a proposição.

Observações. I) Se o anel E_1 fôr comutativo com elemento unidade, os anéis $A(X)$ também serão comutativos e terão elemento unidade.

II) Se o anel E_1 fôr de Boole, os anéis $A(X)$ também serão de Boole.

III) Na proposição 1 ficou demonstrado que os grupos aditivos de $A(X)$ e $A(Y)$ são distintos.

IV) Como E é um conjunto infinito temos, em virtude do Axioma da Escolha, que $|E \times E| = |E|$. Por outro lado, como os anéis sôbre E ficam caracterizados pelas suas operações de adição e multiplicação (que são particulares funções de $E \times E$ em E), segue-se que a cardinalidade do conjunto dos anéis sôbre E é menor ou igual a $2^{|E|}$.

Proposição 2. *Sendo* E *um conjunto infinito, o conjunto dos anéis sôbre* E, *bem como o conjunto dos grupos sôbre* E, *tem cardinalidade igual a* $2^{|E|}$.

Demonstração. A demonstração é consequência imediata das considerações anteriores e do fato bem conhecido de que sôbre todo conjunto infinito é possível introduzir uma estrutura de anel que não é de Boole e uma estrutura de anel de Boole. (Dêste fato daremos uma demonstração muito simples a seguir).

2. Seja E um conjunto infinito e designemos por Q o anel habitual dos números racionais. Indiquemos por B o conjunto das funções $f: E \to Q$ quasi-constantes (isto é, constantes exceto num subconjunto finito de E) e indiquemos por D o conjunto das funções $f: E \to \{0,1\}$ quasi-constantes. Os conjuntos B e D tem cardinalidade igual a $|E|$.

Em B consideremos as operações de adição (denotada por $+$) e de multiplicação (denotada por $\cdot$) definidas abaixo: sendo $f, g \in B$

$$f+g: E \to Q \quad \text{e} \quad f \cdot g: E \to Q$$
$$t \to f(t) + g(t) \qquad t \to f(t)\, g(t)$$

onde em Q consideramos as operações usuais de adição e multiplicação.

Nestas condições, $(B, +, \cdot)$ é um anel comutativo com elemento unidade, que não é um anel de Boole.

Em D consideremos as operações de adição (indicada por $+$) e de multiplicação (indicada por $\cdot$) definidas do seguinte modo: sendo $f, g \in D$

$$f+g: E \to \{0,1\} \quad \text{e} \quad f \cdot g: E \to \{0,1\}$$
$$t \to f(t) + g(t) \qquad t \to f(t)\, g(t),$$

onde $0+0 = 1+1 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$, $00 = 01 = 10 = 0$ e $11 = 1$.

Nestas condições, $(D, +, \cdot)$ é um anel de Boole.