Introdução à álgebra exterior

por J. J. Dionísio
Faculdade de Ciências, Lisboa

SERGE LANG, no prefácio do seu livro sobre variedades diferenciáveis (ver Bibl. [7], p. VI-VII) exprime a seguinte opinião ao referir-se a textos sobre cálculo diferencial exterior: «The orgy of multilinear algebra in standard treatises arises from unnecessary double dualization and abusive use of the tensor product». O objecto do presente trabalho — subordinado ao tema geral da *simetria* — é precisamente expor os elementos de álgebra exterior necessários a quem deseje iniciar-se no estudo das formas diferenciais. Em consequência, adoptamos uma perspectiva elementar, ainda que sóbria, a pressupor apenas rudimentos relativos a espaços vectoriais e euclidianos, assim como ao grupo simétrico. Em particular, não focamos a universalidade da construção de álgebras exteriores sobre módulos, a qual poderá ver-se, por exemplo, em BIRKHOFF-MAC LANE [1] ou em HU [5]. Não pressupomos a teoria dos determinantes pois em verdade julgamos que o seu lugar natural se insere — ainda de um ponto de vista pedagógico — no desenvolvimento da álgebra exterior, tal como o esboçamos no § 5, aliás seguindo parcialmente neste ponto o excelente texto de DIXMIER [3].

Todo o estudo será feito em relação a um espaço vectorial L *de dimensão finita* n *sobre o corpo real* R.

1. Tensores covariantes.

Designe p um inteiro $\geqq 1$. *Tensor covariante de ordem* p sobre L é qualquer aplicação

$$T : L^p \to R$$

que seja R-p-linear, isto é, que depende R-linearmente de cada um dos seus p argumentos.

Os tensores covariantes de ordem $p=1$, ou sejam os elementos do espaço dual L^* de L, chamam-se também *covectores* de L. Os elementos de R — os números reais — consideram-se como tensores covariantes de ordem zero.

A colecção dos tensores covariantes de ordem $p \geqq 0$ sobre L será denotada por $\mathcal{T}_p(L)$. Em particular,

$$\mathcal{T}_0(L) = R, \quad \mathcal{T}_1(L) = L^*.$$

Tomemos uma base $\{B_1, \cdots, B_n\}$ de L. Posto, para um vector $A \in L$,

$$A = \sum_{i=1}^{n} A^i B_i \quad \text{ou} \quad A = A^i B_i$$

(subentendendo o sinal de soma, de harmonia com a convenção de EINSTEIN) a p-linearidade de um tensor $T \in \mathcal{T}_p(L)$ dá logo

$$T(A_1, \cdots, A_p) = T(A_1^{i_1} B_{i_1}, \cdots, A_p^{i_p} B_{i_p}) =$$
$$= A_1^{i_1} \cdots A_p^{i_p} \cdot T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p})$$

pelo que vem a seguinte

PROPOSIÇÃO I. *Seja* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *uma base de* L. *Se* $T \in \mathcal{T}_p(L)$, $p \geqq 1$, *então tem-se*

$$T(A_1, \cdots, A_p) = T_{i_1 \ldots i_p} \cdot A_1^{i_1} \cdots A_p^{i_p}$$

onde A_j^i *é a componente número* i *do vector* A_j *e*

$$T_{i_1 \dots i_p} = T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p})$$

é o valor do tensor T *na sequência* $\{B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}\}$ *de* p *vectores daquela base.*

Os n^p números reais $T_{i_1 \dots i_p}$ são as *componentes* do tensor T na base referida; elas determinam unìvocamente T e podem tomar valores arbitrários em R.

A colecção $\mathcal{T}_p(L)$ possue uma estrutura natural de espaço vectorial sobre R dada pelas operações

$$T+T' : (A_1, \cdots, A_p) \to T(A_1, \cdots, A_p) + \\ + T'(A_1, \cdots, A_p)$$

$$\lambda \cdot T : (A_1, \cdots, A_p) \to \lambda \cdot T(A_1, \cdots, A_p)$$

onde $A_1, \cdots, A_p \in L$ e $\lambda \in R$. Este espaço vectorial, por ser isomorfo a R^{n^p}, tem a dimensão n^p, isto é,

$$\dim \mathcal{T}_p(L) = (\dim L)^p.$$

Proposição II. *Sejam* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ e $\{B'_1, \cdots, B'_n\}$ *duas bases de* L *e designe* $S = [S_j^i]$ *a matriz (de ordem* n *e não-singular) que exprime os vectores da segunda base nos vectores da primeira, isto é,*

$$B'_i = S_i^j B_j \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

Então, as componentes $T'_{i_1 \dots i_p}$ *do tensor* $T \in \mathcal{T}_p(L)$ *na base* $\{B'_1, \cdots, B'_n\}$ *exprimem-se nas componentes na base* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *por intermédio da fórmula*

$$T'_{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_p} \cdot S_{i_1}^{j_1} \cdots S_{i_p}^{j_p}.$$

Dem. Temos sucessivamente

$$T'_{i_1 \dots i_p} = T(B'_{i_1}, \cdots B'_{i_p}) =$$

$$= T(S_{i_1}^{j_1} B_{j_1}, \cdots, S_{i_p}^{j_p} B_{j_p} =$$

$$= S_{i_1}^{j_1} \cdots S_{i_p}^{j_p} \cdot T(B_{j_1}, \cdots, B_{j_p}) =$$

$$= S_{i_1}^{j_1} \cdots S_{i_p}^{j_p} \cdot T_{j_1 \dots j_p}.$$

Introduzamos agora a *multiplicação tensorial* de tensores covariantes. É a operação

$$\otimes : \mathcal{T}_p(L) \times \mathcal{T}_q(L) \to \mathcal{T}_{p+q}(L)$$

(onde $p > 0$ e $q > 0$) definida pela regra

$$(T \otimes T')(A_1, \cdots, A_{p+q}) = T(A_1 \cdots, A_p) \cdot \\ \cdot T'(A_{p+1}, \cdots, A_{p+q}).$$

Estende-se a definição ao caso $p = 0$, $q \geq 0$ pondo $\lambda \otimes T' = \lambda T'$ e ao caso $p > 0$, $q = 0$ pondo $T \otimes \lambda = \lambda T$; para todo $\lambda \in R = \mathcal{T}_0(L)$.

A operação $(T, T') \to T \otimes T'$ que acabamos de definir é *R-bilinear* e *associativa,* mas não é comutativa.

O tensor $T \otimes T'$ diz-se *produto tensorial* dos tensores T e T'. A sua ordem é a soma das ordens dos factores.

Proposição III. *Seja* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *uma base para* L *e* $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ *a base dual dessa para o espaço dual* L^*. *Para todo o tensor* $T \in \mathcal{T}_p(L), p \geq 1$, *tem-se então*

$$T = T_{i_1 \dots i_p} \cdot \beta^{i_1} \otimes \dots \otimes \beta^{i_p}.$$

Por conseguinte, os n^p *tensores* $\beta^{i_1} \otimes \dots \otimes \beta^{i_p}$ *constituem uma base do espaço vectorial* $\mathcal{T}_p(L)$.

Para estabelecer esta Proposição, bastará verificar que as componentes do tensor T', definido pelo segundo membro da fórmula acima, coincidem com as componentes homólogas do tensor dado T:

$$T'_{i_1 \dots i_p} = T'(B_{i_1 \dots i_p}) = T_{j_1 \dots j_p} \cdot \beta^{j_1} \otimes \dots \otimes \beta^{j_p}$$

$$(B_{i_1} \cdots B_{i_p}) = T_{j_1 \dots j_p} \cdot \beta^{j_1}(B_{i_1}) \cdots \beta^{j_p}(B_{i_p}) =$$

$$= T_{j_1 \dots j_p} \cdot \delta_{i_1}^{j_1} \cdots \delta_{i_p}^{j_p} = T_{i_1 \dots i_p}.$$

2. Tensores alternados.

Conforme advertimos na nota preliminar, supomos o leitor familiarizado com as propriedades elementares do grupo simétrico de grau p, ou seja, o grupo S_p das permutações do conjunto $\{1, \cdots, p\}$.

Há todavia um conceito que desejamos destacar, o de *signum de uma permutação* $\varphi \in S_p$: é o número real $\operatorname{sg}\varphi$ calculado pela fórmula (Hu [5], p. 58)

$$\operatorname{sg}\varphi = \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\varphi(j) - \varphi(i)}{j - i}.$$

Utilizando esta fórmula é fácil reconhecer que

(1) $\operatorname{sg}\varphi = -1$ se φ é uma transposição.

Por outro lado, se φ e ψ são dois elementos quaisquer de S_p, tem-se

(2) $$\operatorname{sg}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{sg}\psi \cdot \operatorname{sg}\varphi$$

visto que

$$\operatorname{sg}(\psi \circ \varphi) = \prod_{i<j} \frac{(\psi \circ \varphi)(j) - (\psi \circ \varphi)(i)}{j - i} =$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\psi(\varphi(j)) - \psi(\varphi(i))}{\varphi(j) - \varphi(i)} \cdot \frac{\varphi(j) - \varphi(i)}{j - i}$$

$$= \prod_{\varphi(i) < \varphi(j)} \frac{\psi(\varphi(j)) - \psi(\varphi(i))}{\varphi(j) - \varphi(i)} \cdot$$

$$\cdot \prod_{i<j} \frac{\varphi(j) - \varphi(i)}{j - i} = \operatorname{sg}\psi \cdot \operatorname{sg}\varphi.$$

Ora, como toda a permutação é decomponível em produto de transposições, infere-se de (1) e (2) termos um *morfismo*

$$\operatorname{sg} : S_p \to \{1, -1\}$$

do grupo simétrico S_p para o grupo multiplicativo $\{1, -1\}$.

Infere-se também que o número de transposições em que uma dada permutação é decomponível sai sempre par ou sempre ímpar.

Posto isto, dado um tensor $T \in \mathfrak{T}_p(L), p \geq 1$, e dada uma permutação $\sigma \in S_p$, é claro que a regra

$$(\sigma T)(A_1, \cdots, A_p) = T(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)})$$

define um tensor $\sigma T \in \mathfrak{T}_p(L)$. Provemos o seguinte

Lema. *Para quaisquer* $T \in \mathfrak{T}_p(L), p \geq 1$, *e* $\sigma, \nu \in S_p$ *tem-se*

$$(\nu \circ \sigma) T = \nu(\sigma T)$$

Dem. Fazendo $\sigma T = T'$ e $A_{\nu(i)} = B_i$ vem $(\nu(\sigma T))(A_1, \cdots, A_p) = (\nu T')(A_1, \cdots, A_p) = T'(A_{\nu(1)}, \cdots, A_{\nu(p)}) = T'(B_1, \cdots, B_p) = \sigma T(B_1, \cdots, B_p) = T(B_{\sigma(1)}, \cdots, B_{\sigma(p)}) = T(A_{\nu(\sigma(1))}, \cdots, A_{\nu(\sigma(p))}) = T(A_{(\nu \circ \sigma)(1)}, \cdots, A_{(\nu \circ \sigma)(p)}) = ((\nu \circ \sigma) T)(A_1, \cdots, A_p)$, o que estabelece o Lema.

Definição. Um tensor $T \in \mathfrak{T}_p(L), p > 1$, diz-se *tensor alternado de ordem* p se resulta

$$T(A_1, \cdots, A_p) = 0$$

todas as vezes que dois dos vectores $A_1, \cdots, A_p$ sejam iguais.

Os covectores, elementos de $\mathfrak{T}_1(L) = L^*$ consideram-se como tensores alternados de ordem 1; e os escalares, elementos de $\mathfrak{T}_0(L) = R$, como tensores alternados de ordem 0.

Reconhece-se imediatamente que, se a sequência $\{A_1, \cdots, A_p\}$ é linearmente dependente, e se $T \in \mathfrak{T}_p(L)$ é alternado, então $T(A_1, \cdots, A_p) = 0$.

Em particular, todo o tensor alternado de ordem $p > n = \dim L$ é nulo.

PROPOSIÇÃO I. *Se* T *é tensor alternado de ordem* $p \geq 1$, *então tem-se, para toda a permutação* $\sigma \in S_p$,

(3) $$\sigma T = \operatorname{sg} \sigma \cdot T$$

isto é,

$$T(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)}) = \operatorname{sg} \sigma \cdot T(A_1, \cdots, A_p).$$

DEM. Porque toda a permutação é produto de transposições o Lema anterior e o morfismo $\operatorname{sg}: S_p \to \{1, -1\}$ permitem reduzir a demonstração ao caso em que σ é uma transposição (ver Nota (1)).

Seja, em primeiro lugar, $p=2$ (o caso $p=1$ é trivial). Temos na verdade $T(A_2, A_1) = -T(A_1, A_2)$ visto ser

$$0 = T(A_1 + A_2, A_1 + A_2) = T(A_1, A_1) + T(A_1, A_2) + T(A_2, A_1) + T(A_2, A_2) = T(A_1, A_2) + T(A_2, A_1).$$

Seja agora $p>2$ e $\sigma=(i_0, j_0)$ com $i_0<j_0$. Fixados $p-2$ vectores

$$A_1, \cdots, \hat{A}_{i_0}, \cdots, \hat{A}_{j_0}, \cdots, A_p$$

(o sinal $\wedge$ indicando omissão do elemento que encima), defina-se $T' \in \mathcal{T}_2(L)$ mediante a regra

$$T'(A, B) = T(A_1, \cdots A_{i_0}, \cdots, A_{j_0}, \cdots, A_p)$$

com $A_{i_0} = A$ e $A_{j_0} = B$. Porque T' é tensor alternado de ordem 2, tem-se $T'(B, A) = -T'(A, B)$, donde

$$T(A_1, \cdots, A_{i_0}, \cdots, A_{j_0}, \cdots, A_p) = -T(A_1, \cdots, A_{j_0}, \cdots, A_{i_0}, \cdots, A_p)$$

e daí $\sigma T = -T = \operatorname{sg} \sigma \cdot T$ como desejávamos.

OBSERVAÇÃO. Recordemos que toda a permutação é decomponível em produto de transposições de inteiros consecutivos (por exemplo, $(2, 4) = (2, 3) \circ (3, 4) \circ (2, 3)$). Sendo assim, a fórmula (3) mantém-se válida (mesma demonstração, com $j_0 = i_0 + 1$) se o tensor $T \in \mathcal{T}_p(L)$ satisfaz apenas à condição mais fraca: $T(A_1, \cdots, A_p) = 0$ todas as vezes que dois vectores *consecutivos* sejam iguais. Por conseguinte, esta condição mais fraca, por implicar a fórmula (3), implica em particular $\sigma T = -T$ para qualquer transposição σ; e isto por sua vez implica logo que o tensor T é alternado: $T: (A_1, \cdots, A_p) = 0$ se dois vectores (consecutivos ou não) são iguais. (Ver Nota (2)).

PROPOSIÇÃO II. *O tensor covariante* $T \in \mathcal{T}_p(L)$, $p > 1$, *é alternado se e só se em alguma base* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *de* L *as suas componentes saem anti-simétricas, isto é,*

$$T_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = -T_{i_1 \ldots i_p}$$

para toda a transposição $\sigma \in S_p$.

DEM. Se T é alternado temos, pela Prop. I,

$$T_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} = T(B_{i_{\sigma(1)}}, \cdots, B_{i_{\sigma(p)}}) = \operatorname{seg} \sigma \cdot T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}) = -T_{i_1 \ldots i_p}.$$

Para provarmos a recíproca, tomemos p vectores $A_1, \cdots, A_p$ e suponhamos que é $A_u = A_v$ $(1 \leq u < v \leq p)$. Na base $\{B_1, \cdots, B_n\}$ em que, por hipótese, as componentes saem anti-simétricas virá na verdade, usando a Prop. I do § 1,

$$T(A_1, \cdots, A_p) = T_{i_1 \ldots i_p} A_1^{i_1} \cdots A_p^{i_p} = T_{i_1 \ldots i_u \ldots i_v \ldots i_p} \cdot A_1^{i_1} \cdots A_u^{i_u} \cdots A_v^{i_v} \cdots A_p^{i_p} = 0$$

porquanto se tem

$$T_{i_1 \ldots i_u \ldots i_v \ldots i_p} = -T_{i_1 \ldots i_v \ldots i_u \ldots i_p}$$

e

$$A_u^j = A_v^j \quad (j = 1, \cdots, n).$$

Vimos na Prop. III do § 1 que, sendo $\{B_1, \cdots, B_n\}$ base de L e $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ a base dual para L^*, então ter-se-á para todo $T \in \mathcal{T}_p(L)$, $p \geqq 1$,

$$T = T(B_{j_1}, \cdots, B_{j_p}) \cdot \beta^{j_1} \otimes \ldots \otimes \beta^{j_p}.$$

Se T é alternado, este somatório pode ser reordenado na forma

$$T = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \sum_{\sigma \in S_p} T(B_{i_{\sigma(1)}}, \cdots, B_{i_{\sigma(p)}}) \cdot \\ \cdot \beta^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_{\sigma(p)}}$$

como fàcilmente se reconhece; ou seja, usando a Prop. I deste §,

$$T = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sg} \sigma \cdot T(B_{i_1}, \cdots, B_{i_p}) \cdot \\ \cdot \beta^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_{\sigma(p)}},$$

donde a seguinte

Proposição III. *Seja* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *base de* L *e* $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ *a sua dual. Então, todo o tensor alternado de ordem* $p \geqq 1$, *sobre* L, *é representável na forma*

$$\text{(4)} \qquad T = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} T_{i_1 \ldots i_p} \cdot \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sg} \sigma \cdot \\ \cdot \beta^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \beta^{i_{\sigma(p)}}.$$

Mostra a fórmula (4) que as $\binom{n}{p}$ componentes $T_{i_1 \ldots i_p}$ com $1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq n$, uma vez arbitràriamente fixadas (cf. Prop. II), determinam unìvocamente um tensor alternado T de ordem p $(1 \leqq p \leqq n)$.

Por conseguinte, a colecção $\operatorname{Alt}_p(L)$ dos tensores alternados de ordem p sobre L possue uma estrutura de espaço vectorial sobre R — subespaço de $\mathcal{T}_p(L)$ — cuja dimensão é

$$\dim \operatorname{Alt}_p(L) = \binom{\dim L}{p}.$$

Em particular tem-se $\dim \operatorname{Alt}_n(L) = 1$; $\dim \operatorname{Alt}_p(L) = 0$ se $p > n = \dim L$; e $\dim \operatorname{Alt}_p(L) = \dim \operatorname{Alt}_{n-p}(L)$ $(1 \leqq p \leqq n)$.

3. Anti-simetrização. Produto exterior.

Fixemos s números naturais $p_1, \cdots p_s$ e tomemos uma permutação $\sigma \in S_{p_1 + \ldots + p_s}$. Esta dir-se-á $(p_1, \cdots, p_s)$-admissível se e só se forem satisfeitas as seguintes s cadeias de desigualdades

$$\begin{aligned}
&\sigma(1) < \cdots < \sigma(p_1) && (\text{se } p_1 > 1) \\
&\sigma(p_1 + 1) < \cdots < \sigma(p_1 + p_2) && (\text{se } p_2 > 1) \\
&\sigma(p_1 + p_2 + 1) < \cdots < \\
&\quad < \sigma(p_1 + p_2 + p_3) && (\text{se } p_3 > 1) \\
&\qquad \cdots \\
&\sigma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{s-1} + 1) < \cdots < \\
&\quad < \sigma(p_1 + p_2 + \cdots + p_{s-1} + p_s) && (\text{se } p_s > 1).
\end{aligned}$$

Proposição I. *Consideremos a aplicação*

$$A_{p_1, \ldots, p_s} : Alt_{p_1}(L) \times \cdots \times Alt_{p_s}(L) \to \\ \to \mathcal{T}_{p_1 + \ldots + p_s}(L)$$

definida pela regra

$$A_{p_1, \ldots, p_s}(T_1, \cdots, T_s) = \\ = \sum_{\substack{\sigma \\ (p_1, \cdots, p_s)-ad}} \operatorname{sg} \sigma \cdot \sigma(T_1 \otimes \ldots \otimes T_s).$$

Então tem-se

$$A_{p_1,\ldots,p_s}(T_1,\cdots,T_s)\in Alt_{p_1+\ldots+p_s}(L),$$

isto é,

$$\mathrm{Im}\,A_{p_1,\ldots,p_s}\subset Alt_{p_1+\ldots+p_s}(L).$$

A Prop. I justifica que se denomine *operador de anti-simetrização relativo às ordens* $p_1,\cdots,p_s$ a aplicação $A_{p_1,\ldots,p_s}$. O tensor alternado, de ordem $p_1+\cdots+p_s$, nela construído, indica-se com a notação $T_1\wedge\cdots\wedge T_s$, abreviável para $\bigwedge\limits_{i=1}^{s} T_i$; e chama-se *produto exterior* dos tensores alternados $T_1,\cdots,T_s$ (ver Nota (3)):

$$(1)\quad T_1\wedge\cdots\wedge T_s=\sum_{\sigma-\mathrm{ad}}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot\sigma(T_1\otimes\cdots\otimes T_s).$$

Dem. da Prop. I. Fixados $p_1+\cdots+p_s$ vectores $A_1,\cdots,A_{p_1+\ldots+p_s}$, teremos, sempre com $\sigma\in S_{p_1+\ldots+p_s}$ e $(p_1,\cdots,p_s)$-admissível,

$$\begin{aligned}(A_{p_1,\ldots,p_s}(T_1,\cdots,T_s))(A_1,\cdots,A_{p_1+\ldots+p_s})&=\\=\sum_{\sigma-\mathrm{ad}}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot\sigma(T_1\otimes\cdots\otimes T_s)(A_1,\cdots,A_{p_1+\ldots+p_s})&\\=\sum_{\sigma-\mathrm{ad}}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot(T_1\otimes\cdots\otimes T_s)(A_{\sigma(1)},\cdots,A_{\sigma(p_1+\ldots+p_s)})&\\=\sum_{\sigma-\mathrm{ad}}\mathrm{sg}\,\sigma\cdot T_1(A_{\sigma(1)},\cdots,A_{\sigma(p_1)})\cdots&\\T_s(A_{\sigma(p_1+\ldots+p_{s-1}+1)},\cdots,A_{\sigma(p_1+\ldots+p_s)}).&\end{aligned}$$

Devemos mostrar que este último somatório sai nulo sempre que dois vectores consecutivos entre os $p_1+\cdots+p_s$ vectores $A_1,\cdots,A_{p_1+\ldots+p_s}$ sejam iguais — tendo em conta a Obs. feita no § 2. Suponhamos pois que é $A_i=A_{i+1}$ para certo i $(1\leqq i<p_1+\cdots+p_s)$.

Consideremos o termo do referido somatório relativo à permutação admissível σ. Se tivermos

$$i,i+1\in\{\sigma(1),\cdots,\sigma(p_1)\}$$

sairá nulo o valor de T_1 e portanto nulo tal termo. Anàlogamente, se tivermos

$$i,i+1\in\{\sigma(p_1+1),\cdots,\sigma(p_1+p_2)\}$$

sairá nulo o valor de T_2 e portanto nulo o mesmo termo. E assim por diante, até à hipótese

$$i,i+1\in\{\sigma(p_1+\cdots+p_{s-1}+1),\cdots,\sigma(p_1+\cdots+p_s)\}.$$

Suponhamos agora que se tem, por exemplo,

$$\sigma(1)<\cdots<i<\cdots<\sigma(p_1)$$

e

$$\sigma(p_1+1)<\cdots<i+1<\cdots<\sigma(p_1+p_2).$$

Então também se terá, apenas trocando entre si i e $i+1$,

$$\sigma(1)<\cdots<i+1<\cdots<\sigma(p_1)$$

e

$$\sigma(p_1+1)<\cdots<i<\cdots<\sigma(p_1+p_2).$$

Por conseguinte, da admissibilidade da permutação σ resulta a admissibilidade da permutação $\sigma'=\tau\circ\sigma$, onde τ é a transposição $\tau=(i,i+1)$. Ora, como $A_i=A_{i+1}$, o termo relativo à permutação admissível σ' resulta simétrico do termo considerado, relativo a σ: estes dois termos dão pois soma nula.

Porque o caso que acabamos de analisar é típico dos restantes casos possíveis, a demonstração está concluída.

Como exemplo, construamos o *produto exterior de s covertores*. Se $s=2$ e $\alpha, \beta \in \mathrm{Alt}_1(L) = L^*$, teremos $\alpha \wedge \beta \in \mathrm{Alt}_2(L)$ com

$$(\alpha \wedge \beta)(A, B) = \alpha(A) \cdot \beta(B) - \alpha(B) \cdot \beta(A).$$

No caso geral será

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = \bigwedge_{i=1}^{s} \alpha^i \in \mathrm{Alt}_s(L)$$

com

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s)(A_1, \cdots, A_s) = \sum_{\sigma \in S_s} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot$$
$$\cdot (\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^s)(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(s)})$$

(ver Nota (4)), já que toda a permutação $\sigma \in S_s$ é trivialmente $(1, \cdots, 1)$-admissível; ou ainda

$$(2) \quad (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s)(A_1, \cdots, A_s) = \sum_{\sigma \in S_s} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot$$
$$\cdot \alpha^1(A_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^s(A_{\sigma(s)}).$$

(Ver Nota (5)). Façamos $\sigma(i) = i'$, donde $i = \sigma^{-1}(i') = \nu(i')$ posto $\sigma^{-1} = \nu$; fica

$$\alpha^i(A_{\sigma(i)}) = \alpha^{\nu(i')}(A_{i'}) \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

o que dá, por ser $\mathrm{sg}\,\sigma = \mathrm{sg}\,\sigma^{-1} = \mathrm{sg}\,\nu$, e reordenando factores,

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s)(A_1, \cdots, A_s) = \sum_{\nu \in S_s} \mathrm{sg}\,\nu \cdot$$
$$\cdot \alpha^{\nu(1)}(A_1) \cdots \alpha^{\nu(s)}(A_s).$$

Em consequência, não só temos por definição

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = \sum_{\sigma \in S_s} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot \sigma(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^s)$$

como também agora inferimos ter-se

$$(3) \quad \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s = \sum_{\sigma \in S_s} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot \alpha^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\sigma(s)}.$$

(Ver Nota (6)).

Nesta fórmula (3) mudemos s para p e tomemos

$$\alpha^j = \beta^{i_j} \qquad (j = 1, \cdots, p);$$

vem

$$\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p} = \sum_{\sigma \in S_p} \mathrm{sg}\,\sigma \cdot \beta^{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes \beta^{i_{\sigma(p)}}$$

o que, introduzido na fórmula (4) do § 2 dá a seguinte

Proposição II. *Se* $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ *é a dual de uma base* $\{B_1, \cdots, B_n\}$ *de* L, *então todo o tensor alternado* T *sobre* L, *de ordem* $p\,(1 \leqq p \leqq n)$ *é representável na forma*

$$(4) \quad T = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} T_{i_1 \ldots i_p} \cdot \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p}.$$

Este resultado diz-nos em particular que, suposto $1 \leqq p \leqq n$, os $\binom{n}{p}$ tensores alternados de ordem p

$$\beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_p} \qquad (1 \leqq i_1 < \cdots < i_p \leqq n)$$

constituem uma base do espaço vectorial $\mathrm{Alt}_p(L)$, cuja dimensão já vimos, no final do § 2, ser $\binom{n}{p}$.

4. Propriedades da multiplicação exterior.

Na Prop. I do § 3 tomemos em particular $s = 2$, $p_1 = p$ e $p_2 = q$, para o fim de considerarmos a multiplicação exterior

$$\wedge_{p,q}: \mathrm{Alt}_p(L) \times \mathrm{Alt}_q(L) \to \mathrm{Alt}_{p+q}(L)$$

com

$$\wedge_{p,p}(T, T') = T \wedge T' \qquad (= A_{p,q}(T, T')) .$$

Estendemos a operação aos casos $p = 0$ e $q = 0$ pondo $\lambda \wedge T' = \lambda T'$ e $T \wedge \lambda = \lambda T$ ($\lambda \in R$), respectivamente.

As propriedades desta operação fundamental constam do seguinte

TEOREMA. *A multiplicação exterior é*

(1) R-bilinear:

$$(\mathrm{T} + \mathrm{T}') \wedge \mathrm{T}'' = \mathrm{T} \wedge \mathrm{T}'' + \mathrm{T}' \wedge \mathrm{T}'' ,$$

$$(\lambda \mathrm{T}) \wedge \mathrm{T}' = \lambda (\mathrm{T} \wedge \mathrm{T}') ,$$

$$\mathrm{T} \wedge (\mathrm{T}' + \mathrm{T}'') = \mathrm{T} \wedge \mathrm{T}' + \mathrm{T} \wedge \mathrm{T}'' ,$$

$$\mathrm{T} \wedge (\lambda \mathrm{T}') = \lambda (\mathrm{T} \wedge \mathrm{T}') ;$$

(2) associativa:

$$\mathrm{T} \wedge (\mathrm{T}' \wedge \mathrm{T}'') = (\mathrm{T} \wedge \mathrm{T}') \wedge \mathrm{T}'' ;$$

(3) anti-comutativa, *significando que*

$$\mathrm{T} \wedge \mathrm{T}' = (-1)^{\mathrm{pq}} \cdot \mathrm{T}' \wedge \mathrm{T}$$

onde p *e* q *são as ordens respectivas de* T *e* T'.

Por consequência, a multiplicação exterior introduz na soma directa de espaços vectoriais

$$\mathrm{Alt}(L) = \bigoplus_{p=0}^{n} \mathrm{Alt}_p(L) \qquad (n = \dim L)$$

uma estrutura de *R-álgebra graduada associativa e anti-comutativa: a álgebra exterior do espaço vectorial* L. (Para a definição de álgebra graduada, ver HU [5], p. 173).

DEM. DO TEOREMA. A R-bilinearidade é imediata.

Para provarmos a associatividade, mostra a Prop. II do § 3 que bastará estabelecermos a identidade

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \wedge (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q}) = \\ = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q}$$

relativa a $p+q$ covectores $\alpha^1, \cdots, \alpha^{p+q}$.

Tomando $p+q$ vectores $A_1, \cdots, A_{p+q}$ teremos

$$[(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \wedge (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})]$$

$$(A_1, \cdots, A_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \\ (p,q)\text{-ad}}} \mathrm{sg}\, \sigma \cdot \sigma [(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \otimes$$

$$\otimes (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})] (A_1, \cdots, A_{p+q}) =$$

$$= \sum_{\sigma-\text{ad}} \mathrm{sg}\, \sigma \cdot (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) (A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)}) \cdot$$

$$\cdot (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q}) (A_{\sigma(p+1)}, \cdots, A_{\sigma(p+q)}) .$$

Mas temos

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) (A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(p)}) = \\ = \sum_{\nu} \mathrm{sg}\, \nu \cdot \alpha^1 (A_{\nu(\sigma(1))}) \cdots \alpha^p (A_{\nu(\sigma(p))})$$

e anàlogamente

$$(\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q}) (A_{\sigma(p+1)}, \cdots, A_{\sigma(p+q)}) =$$

$$= \sum \mathrm{sg}\, \pi \cdot \alpha^{p+1} (A_{\pi(\sigma(p+1))}) \cdots \alpha^{p+q} (A_{\pi(\sigma(p+q))})$$

o que substituído acima dá

$$[(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \wedge (\alpha^{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})]$$

$$(A_1, \cdots, A_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma \\ (p,q)\text{-ad}}} \sum_{\nu} \sum_{\pi} \mathrm{sg}\, \sigma \cdot \mathrm{sg}\, \nu \cdot \mathrm{sg}\, \pi \cdot$$

$$\cdot \alpha^1 (A_{(\nu \circ \sigma)(1)}) \cdots \alpha^p (A_{(\nu \circ \sigma)(p)}) \cdot$$

$$\cdot \alpha^{p+1} (A_{(\pi \circ \sigma)(p+1)}) \cdots \alpha^{p+q} (A_{(\pi \circ \sigma)(p+q)}) \cdot$$

Atendendo a que os conjuntos

$$\operatorname{dom} \nu = \{\sigma(1), \cdots, \sigma(p)\}, \quad \operatorname{dom} \pi = \\ = \{\sigma(p+1), \cdots, \sigma(p+q)\}$$

são disjuntos, poderemos dar ao triplo somatório a forma (com ν e π trivialmente prolongadas a $\{1, \cdots, p+q\}$)

$$\sum_{\substack{\nu \circ \pi \circ \sigma \\ \sigma\text{-ad}}} \operatorname{sg}(\nu \circ \pi \circ \sigma) \cdot \alpha^1 (A_{(\nu \circ \pi \circ \sigma)(1)}) \cdots \\ \cdots \alpha^{p+q} (A_{(\nu \circ \pi \circ \sigma)(p+q)}) .$$

E atendendo a que toda a permutação $\varphi \in S_{p+q}$ é manifestamente decomponível na forma $\varphi = \nu \circ \pi \circ \sigma$ com σ, ν e π nas condições anteriores, obtém-se para o mesmo somatório a expressão

$$\sum_{\varphi \in S_{p+q}} \operatorname{sg} \varphi \cdot [\varphi(\alpha^1 \otimes \ldots \otimes \alpha^{p+q})](A_1, \cdots, A_{p+q})$$

ou seja $(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^{p+q})(A_1, \cdots, A_{p+q})$, que é o resultado desejado.

Passemos à prova da anti-comutatividade. Uma vez mais usando a Prop. II do § 3, bastará provar a identidade em covectores

$$(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) \wedge (\gamma^1 \wedge \cdots \wedge \gamma^q) = (-1)^{pq} \cdot \\ \cdot (\gamma^1 \wedge \cdots \wedge \gamma^q) \wedge (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p) .$$

Mas esta fàcilmente decorre da associatividade e da relação imediata $\alpha \wedge \gamma = -\gamma \wedge \alpha$ para covectores α e γ.

5. Determinantes.

Recordemos que é $\dim \operatorname{Alt}_n(L) = 1$ (com $n = \dim L$). Fixemos uma base $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_n\}$ de L e seja $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ a base dual. Para $T \in \operatorname{Alt}_n(L)$, a fórmula (4) do § 3 dá

$$T = \lambda_\beta \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n$$

sendo

$$\lambda_\beta = T_{12\ldots n} = T(B_1, B_2, \cdots, B_n) .$$

O caso particular em que é $\lambda_\beta = 1$ vem considerado na seguinte

DEFINIÇÃO I. O tensor alternado de ordem n

$$\det_{\mathcal{B}} := \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n$$

denomina-se *determinante relativo à base* $\mathcal{B}$ *do espaço vectorial* L.

E o seu valor na sequência $A_1, \cdots, A_n$ de vectores de L

$$\det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n)$$

diz-se *determinante relativo à base* $\mathcal{B}$ *da sequência de vectores* $\{A_1, \cdots, A_n\}$. (Ver Nota (7)).

PROPOSIÇÃO I. *Tem-se, na base* $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_n\}$,

$$(1) \quad det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sg\, \sigma \cdot A_1^{\sigma(1)} \ldots A_n^{\sigma(n)}$$

posto

$$A_i = A_i^j B_j \qquad (i = 1, \cdots, n) .$$

E se $\mathcal{B}'$ *é outra base de* L, *então*

$$(2) \qquad det_{\mathcal{B}'}(A_1, \cdots, A_n) = \\ = det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n) \cdot det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$$

donde

$$det_{\mathcal{B}'} = det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \cdot det_{\mathcal{B}} .$$

DEM. Temos

$$\det_{\mathcal{B}'}(A_1, \cdots, A_n) = \det(A_1^{i_1} B_{i_1}, \cdots, A_n^{i_n} B_{i_n}) = \\ = A_1^{i_1} \cdots A_n^{i_n} \cdot \det_{\mathcal{B}'}(B_{i_1}, \cdots, B_{i_n}),$$

somatório em que basta reter os termos nos quais é $\{i_1, \cdots, i_n\}$ uma permutação σ de $\{1, \cdots, n\}$, já que os restantes termos são nulos; vindo então

$$\det_{\mathscr{B}'}(A_1, \cdots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} A_1^{\sigma(1)} \cdots A_n^{\sigma(n)} \cdot$$
$$\cdot \det_{\mathscr{B}'}(B_{\sigma(1)}, \cdots, B_{\sigma(n)}) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} A_1^{\sigma(1)} \cdots A_n^{\sigma(n)} \cdot \operatorname{sg}\sigma \cdot \det_{\mathscr{B}'}(B_1, \cdots, B_n)$$

donde

$$\det_{\mathscr{B}'}(A_1, \cdots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sg}\sigma \cdot$$
$$A_1^{\sigma(1)} \cdots A_n^{\sigma(n)} \cdot \det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}.$$

Este resultado dá-nos primeiramente a fórmula (1), ao tomarmos $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$, visto que é (ver Nota (5))

$$\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B} = (\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n)(B_1, \cdots, B_n) = 1.$$

Depois, introduzindo (1), o mesmo resultado dá-nos (2).

Proposição II. *Designe* $\Phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ *um endomorfismo do espaço vectorial* L. *Então existe um e um só escalar,* $\det \Phi$, *que satisfaz à igualdade*

$$(3) \qquad \det_{\mathscr{B}}(\Phi(\mathrm{A}_1), \cdots, \Phi(\mathrm{A}_n)) = \det \Phi \cdot \det_{\mathscr{B}}(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n)$$

qualquer que seja a base $\mathscr{B}$ *de* L *e qualquer que seja a sequência de vectores* $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n$.

Definição II. O escalar $\det \Phi$ denomina-se *determinante do endomorfismo* $\Phi : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$. (Ver Nota (8)).

Dem. da Prop. II. Começaremos fixando uma base $\mathscr{B}$. A aplicação T dada pela correspondência

$$(A_1, \cdots, A_n) \to \det_{\mathscr{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n))$$

é uma composição

$$(A_1, \cdots, A_n) \to (\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) \to$$
$$\to \det_{\mathscr{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n))$$

por onde se vê que $T : L^n \to R$ é n-linear. E se dois dos vectores $A_1, \cdots, A_n$ são iguais, o valor de T sai nulo, pois que $\det_{\mathscr{B}}$ é tensor alternado. Logo, $T \in \mathrm{Alt}_n(L)$ e existe por isso um escalar $\lambda_{\mathscr{B}}$ tal que $T = \lambda_{\mathscr{B}} \det_{\mathscr{B}}$, donde

$$\det_{\mathscr{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) = T(A_1, \cdots, A_n) =$$
$$= \lambda_{\mathscr{B}} \det_{\mathscr{B}}(A_1, \cdots, A_n).$$

Em segunda base $\mathscr{B}'$ teremos, usando (2),

$$\det_{\mathscr{B}'}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) =$$
$$= \det_{\mathscr{B}}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) \cdot \det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B} =$$
$$= \lambda_{\mathscr{B}} \det_{\mathscr{B}}(A_1, \cdots, A_n) \cdot \det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B} =$$
$$= \lambda_{\mathscr{B}} \det_{\mathscr{B}'}(A_1, \cdots, A_n).$$

Por consequência, existe um escalar $\lambda_{\mathscr{B}}$ tal que para toda a base $\mathscr{B}'$ e para qualquer sequência de vectores $A_1, \cdots, A_n$ se tem

$$\det_{\mathscr{B}'}(\Phi(A_1), \cdots, \Phi(A_n)) =$$
$$= \lambda_{\mathscr{B}} \det_{\mathscr{B}'}(A_1, \cdots, A_n).$$

Tomando nesta igualdade $A_i = B'_i \in \mathscr{B}'$ $(i = 1, \cdots, n)$ sai

$$\det_{\mathscr{B}'}(\Phi(B'_1), \cdots, \Phi(B'_n)) = \lambda_{\mathscr{B}}$$

(visto ser $\det_{\mathscr{B}'} \mathscr{B}' = 1$), o que prova a unicidade do escalar $\lambda_{\mathscr{B}}$. Resta pôr $\lambda_{\mathscr{B}} = \det \Phi$.

DEFINIÇÃO III. Designe

$$\mathcal{A} = [A^i_j] \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

uma matriz real, quadrada e de ordem n. Denomina-se *determinante da matriz* $\mathcal{A}$ o número real

$$\det \mathcal{A} := \det_K (A_1, \cdots, A_n)$$

onde K é a base canónica do espaço vectorial R^n, constituída pelas matrizes-colunas

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \quad K_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

e os vectores $A_1, \cdots, A_n$ de R^n são as matrizes-colunas de $\mathcal{A}$:

$$A_j = \begin{bmatrix} A^1_j \\ A^2_j \\ \vdots \\ A^n_j \end{bmatrix} \quad (j = 1, \cdots, n).$$

(Ver Nota (9)).

OBSERVAÇÃO. Equivalentemente, poderemos definir $\det \mathcal{A} := \det \Phi$ com $\Phi : R^n \to R^n$ o endomorfismo de R^n representado pela matriz $\mathcal{A}$ na base canónica K (visto ser $A_j = \Phi(K_j)$, $j = 1, \cdots, n$ e tendo em conta a fórmula (3) com $\mathcal{B} = K$). (Ver Nota (10)).

6. Produto mixto. Produto vectorial.

No decurso deste § suporemos L *espaço euclidiano orientado*. (Ver Nota (11)). O produto escalar dos vectores A e B será indicado por $< A, B >$ e a norma do vector A por $\| A \|$.

Designaremos por $\mathcal{B}^+_{\text{ort}}$ uma base ortonormada de L fixando a orientação (base ortonormada positiva). Se $\mathcal{B}'^+_{\text{ort}}$ é outra base ortonormada positiva, tem-se

$$\det_{\mathcal{B}'^+_{\text{ort}}} \mathcal{B}^+_{\text{ort}} = 1$$

atendendo a que o primeiro membro é o determinante de uma matriz ortogonal (cf. (1), § 5). De (2), § 5 resulta então

$$\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n = \det_{\mathcal{B}^+_{\text{ort}}} = \det_{\mathcal{B}'^+_{\text{ort}}} =$$
$$= \beta'^1 \wedge \cdots \wedge \beta'^n .$$

É portanto lícita a seguinte

DEFINIÇÃO I. O tensor alternado de ordem n

$$\mu = \det_{\mathcal{B}^+_{\text{ort}}} = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^n$$

(independente da base ortonormada positiva $\mathcal{B}^+_{\text{ort}}$) denomina-se *produto mixto sobre o espaço euclidiano orientado* L.

PROPOSIÇÃO I. *Seja* L *um espaço euclidiano orientado de dimensão* n. *A aplicação*

$$\varphi : \mathrm{L} \to Alt_{n-1}(\mathrm{L})$$

definida pela regra

$$(\varphi(\mathrm{A}))(\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_{n-1}) = \mu(\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_{n-1})$$

é um isomorfismo de espaços vectoriais.

E se $\{\beta^1, \cdots, \beta^n\}$ *é a dual de uma base ortonormada positiva* $\mathcal{B}^+_{ort} = \{\mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n\}$, *então tem-se para cada* $\mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{n}$:

$$(1) \quad \varphi(B_i) = (-1)^{i-1} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta^i} \wedge \cdots \wedge \beta^n$$

(o sinal $\frown$ indicando omissão do elemento que encima).

DEM. É claro que φ é um morfismo de espaços vectoriais.

É $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$. Com efeito, dado um vector $A \neq 0$, pode construir-se uma base ortonormada positiva da forma

$$\mathcal{B}^+_{\text{ort}} = \left\{ \frac{1}{\|A\|} A , A_2 , \cdots , A_n \right\}$$

donde

$$\frac{1}{\|A\|} \varphi(A)(A_2, \cdots, A_{n-1}) =$$

$$= \mu\left(\frac{1}{\|A\|} A , A_2 , \cdots , A_{n-1} \right) = \det_{\mathcal{B}^+_{\text{ort}}} \mathcal{B}^+_{\text{ort}} = 1$$

o que exige $\varphi(A) \neq 0$; provando que $\varphi(A) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Sendo φ monomorfismo, tem-se $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim L = n$. E porque $\dim \operatorname{Alt}_{n-1}(L) = n$, conclue-se que φ é na verdade um isomorfismo.

A fórmula (1) estabelece-se fàcilmente verificando a igualdade das componentes homólogas (valores nas n sequências de vectores $B_1, \cdots, \widehat{B}_j, \cdots, B_n; j = 1, \cdots, n$) dos tensores alternados de ordem $n-1$ que são $\varphi(B_i)$ e $(-1)^{i-1} \cdot \beta^1 \wedge \cdots \widehat{\beta^i} \wedge \cdots \wedge \beta^n$.

Da fórmula para a mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$:

$$B'_i = S^j_i B_j$$

deduz-se

$$\beta'^i = (S^{-1})^i_j \cdot \beta^j .$$

Sendo $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases ortonormadas do espaço euclidiano L, a matriz $S = [S^i_j]$, da mudança de base, sai ortogonal:

$$(S^{-1})^i_j = S^j_i \qquad (i, j = 1, \cdots, n).$$

Daí decorre fàcilmente que a aplicação

$$\psi : L \to L^*$$

dada pela correspondência

$$A = A^i B_i \longmapsto \alpha = \sum_{i=1}^{n} A^i \beta^i$$

é um isomorfismo independente da base ortonormada $\mathcal{B}$. É o *isomorfismo canónico* $L \to L^*$ *relativo ao espaço euclidiano* L.

Definição II. Designe L um espaço euclidiano orientado. Chama-se *multiplicação vectorial sobre* L a aplicação

$$\wedge : L^{n-1} \to L$$

definida pela regra

$$\wedge (A_1, \cdots, A_{n-1}) = A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} :$$
$$= \varphi^{-1}(\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1}))$$

onde $\psi : L \to L^*$ e $\varphi : L \to \operatorname{Alt}_{n-1}(L)$ são os isomorfismos acima considerados.

O vector de L que é $A = A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}$ diz-se *produto vectorial* (ou externo) dos vectores $A_1, \cdots, A_{n-1}$.

A operação $\wedge : L^{n-1} \to L$ reduz-se no caso $L = R^3$ ao produto vectorial usual sobre R^3 (ver Nota (12)) como se infere da seguinte

Proposição II. *O vector* $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{A}_{n-1}$ *tem por componente número* i *numa base* $\mathcal{B}^+_{\text{ort}} = \{\mathrm{B}_1, \cdots, \mathrm{B}_n\}$ *o produto de* $(-1)^{i-1}$ *pelo determinante da matriz obtida suprimindo a linha número* i *da matriz* $\mathrm{n} \times (\mathrm{n}-1)$ *formada pelas componentes dos vectores* $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_{n-1}$:

$$(2) \qquad [\mathrm{A}^i_j]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n-1}}$$

Dem. Temos em primeiro lugar

$$\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1}) =$$

$$= \sum_{j_1} A^{j_1}_1 \beta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{j_{n-1}} A^{j_{n-1}}_{n-1} \beta^{j_{n-1}} =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq n} \left(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sg} \sigma \cdot A_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots A_{n-1}^{i_{\sigma(n-1)}} \right) \cdot$$

$$\cdot \beta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \beta^{i_{n-1}}$$

como fàcilmente se reconhece (cf. fórmula da Nota (6), *a*)). Usando a fórmula (1) da Prop. I vem portanto

$$\varphi^{-1}(\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Big(\sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sg} \sigma \cdot A_1^{i_{\sigma(1)}} \cdots A_{n-1}^{i_{\sigma(n-1)}} \Big) \cdot B_i$$

com $i_1, \cdots, i_{n-1}$ designando os inteiros, por ordem natural, do conjunto $\{1, \cdots, \hat{i}, \cdots, n\}$; o que estabelece a Prop. II.

PROPOSIÇÃO III. *Tem-se*

$$< A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}, A_i > = 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1),$$

quer dizer: o produto vectorial de $n-1$ *vectores é ortogonal a qualquer deles.*

DEM. Ampliar a matriz (2) à esquerda com a matriz-coluna das componentes do vector A_i e desenvolver o determinante da matriz quadrada obtida segundo a primeira coluna.

PROPOSIÇÃO IV. *A sequência dos* $n-1$ *vectores* $A_1, \cdots, A_{n-1}$ *é linearmente independente, se e só se o seu produto vectorial é diferente de zero. E a sequência*

$$\{A_1, \cdots, A_{n-1}, (-1)^{n-1} A_1, \wedge \cdots \wedge A_{n-1}\}$$

é então uma base de L *com a orientação de* L.

DEM. A independência linear de $\{A_1, \cdots \cdots, A_{n-1}\}$ equivale à de $\{\psi(A_1), \cdots, \psi(A_{n-1})\}$, ou seja a $\psi(A_1) \wedge \cdots \wedge \psi(A_{n-1}) \neq 0$ (ver Nota (6), b)) e portanto a $\varphi^{-1}(\psi(A_1) \wedge \cdots \cdots \wedge \psi(A_{n-1})) \neq 0$, isto é $A_1 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} \neq 0$.

Para estabelecer a segunda parte, ampliar a matriz (2) à direita com a matriz-coluna das componentes do vector $(-1)^{n-1} \cdot A_1 \wedge \wedge \cdots \wedge A_{n-1}$ (dadas pela Prop. II) e desenvolver o determinante da matriz quadrada obtida segundo a última coluna: obtem-se um número real > 0.

NOTAS

(1) Tensor alternado é, portanto, o mesmo que tensor covariante *anti-simétrico;* $\sigma T = -T$ para toda a transposição σ. Esta anti-simetria equivale à anti-simetria das componentes, em conformidade com a Prop. II a seguir.

Sobre as simetrias dos tensores covariantes, consultar SOURIAU [8], p. 198-202.

(2) Tensor alternado é, portanto, o mesmo que tensor covariante com o valor zero sempre que dois vectores consecutivos sejam iguais. É a definição que dá CARTAN [2], p. 11.

(3) Com a fórmula (1) exprimimos o produto exterior de tensores alternados em termos do seu produto tensorial, o que não é usual salientar-se.

CARTAN [2], p. 14 e DIXMIER [3], vol. 2, p. 66 definem o operador de anti-simetrização apenas para $s = 2$.

A generalização ao caso $s > 2$ é imediata e tem a vantagem de conduzir-nos directamente à importante representação (4) dos tensores alternados em termos de covectores.

(4) Pode definir-se um outro operador de anti-simetrização $\mathcal{T}_p(L) \to \operatorname{Alt}_p(L)$ mediante a regra

$$T \to \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sg} \sigma \cdot \sigma T.$$

Aplicado ao produto tensorial de p covectores, $\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^p$, estamos vendo que este operador igualmente nos dá o produto exterior $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^p$.

(5) Se a sequência de s covectores $\{\beta^1, \cdots, \beta^s\}$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ é linearmente independente, ela pode ser ampliada a uma base $\{\beta^1, \cdots, \beta^s, \beta^{s+1}, \cdots, \beta^n\}$ de L^*. Seja $\{B_1, \cdots, B_n\}$ a base dual para L. Então, a fórmula (2) dá-nos logo

$$(\beta^s \wedge \cdots \wedge \beta^s)(B_1, \cdots, B_s) = 1.$$

(6) Da fórmula (3) vem fàcilmente o seguinte:

a) para toda a permutação $\sigma \in S_s$.

$$\alpha^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha^{\sigma(s)} = \operatorname{sg} \sigma \cdot \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^s;$$

b) para que s covectores $\alpha^1, \cdots, \alpha^s$ sejam linearmente independentes é condição necessária e suficiente que o seu produto exterior seja diferente de zero (cf. Nota (5)).

(7) Tem-se $\det_{\mathcal{B}}(A_1, \cdots, A_n) = 0$ se e só se os vectores $A_1, \cdots, A_n$ são linearmente dependentes. (Observar que

$$\{T, T' \in \operatorname{Alt}_n(L),\ T \neq 0,\ T(A_1, \cdots, A_n) = 0\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow T'(A_1, \cdots, A_n) = 0.)$$

(8) Se Φ e Ψ são endomorfismos $L \to L$, conclue-se que é $\det(\Psi \circ \Phi) = \det \Psi \cdot \det \Phi$.

(9) O desenvolvimento de Laplace de um determinante por menores complementares estabelecer-se-ia nesta altura com um simples cálculo exterior; ver Flanders [4], p. 10.

(10) Na sequência da Nota (8) deduz-se imediatamente a regra para o determinante do produto de duas matrizes quadradas da mesma ordem.

(11) A fórmula $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \cdot \det_{\mathcal{B}}$ da Prop. I do § 5 permite definir uma relação de equivalência: $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ se e só se $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$. Então, fixar uma orientação de L é fixar uma das duas classes desta relação de equivalência.

Posto $B'_i = S^j_i B_j$, notemos que é $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \det [S^j_i]$.

(12) Para um estudo do produto vectorial em R^3 ver o Cap. IV de Nickerson-Spencer-Steenrod [6].

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Birkhoff-S. Mac Lane, *Algebra* (Mac Millan, 1968).

[2] H. Cartan, *Formes différentielles* (Hermann, 1967).

[3] J. Dixmier, *Cours de Mathématiques du premier cycle* (Gauthiers-Villars, dois tomos: première année, 1969; deuxième année, 1968).

[4] H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, 1963).

[5] S.-T. Hu, *Elements of Modern Algebra* (Holden Day, 1965).

[6] H. K. Nickerson-D. C. Spencer-N. E. Steenrod, *Advanced Calculus* (Van Nostrand, 1959).

[7] S. Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds* (J. Wiley, 1966).

[8] J.-M. Souriau, *Géométrie et Relativité* (Hermann, 1964).