Partições de um conjunto formadas por conjuntos de cardinalidade dada

por Edison Farah
Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo ; São Paulo, Brasil

1. Nesta pequena Nota apresentamos uma solução do seguinte problema, que nos foi proposto pelo Prof. NEWTON C. A. da COSTA, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo:

Dado um conjunto M, *de número cardinal* $\alpha \geq 2$, *e sendo* β *um número cardinal verificando* $2 \leq \beta \leq \alpha$, *calcular o número cardinal do conjunto das partições de* M, *formadas, cada uma, por conjuntos de mesmo cardinal* β.

Calculemos, primeiramente, o número $P(n,r)$ de partições de um conjunto *finito* com nr elementos $n \geq 2$, $r \geq 1$ formadas por conjuntos possuindo o mesmo número n de elementos. Deixando de lado o caso trivial $r=1$ (é óbvio que $P(n,1)=1$), consideremos um conjunto A, com nr elementos e fixemos um subconjunto B, de n elementos, de A. É claro que o número de partições de A, formadas, cada uma, por conjuntos com o mesmo número n de elementos, e ainda, em cada uma das quais figura o conjunto B, é $P(n,r-1)$, donde

$$P(n,r) = \binom{nr}{n} P(n,r-1);$$

e o leitor poderá, fàcilmente, verificar que, nesse cômputo, não houve omissão nem repetição de partições. Da fórmula acima se tira, sem dificuldade,

$$P(n,r) = \binom{n}{n}\binom{2n}{n}\cdots\binom{rn}{n},$$

que se aplica, também, para $r=1$.

Suponhamos, agora, M infinito e, para cada conjunto X, ponhamos $\overline{\overline{X}}=$ número cardinal de X. Observemos, primeiramente, que, dado um conjunto *infinito*, qualquer, A, de cardinal α, e considerando-se o número cardinal β, $2 \leq \beta \leq \alpha$, existem ao menos duas partições de A formadas, cada uma, por conjuntos de mesmo cardinal β. Com efeito, sendo B um subconjunto de A, de cardinal β, e atendendo-se a que o produto cartesiano $B \times A$ é equipotente a A (o que decorre do Axioma da Escolha) por uma bijeção, digamos f, de $B \times A$ sôbre A, então, pondo-se, para cada $x \in A$, $B_x = f(B \times \{x\})$, os B_x formarão uma partição de A, com $\overline{\overline{B_x}}=\beta$, $\forall x \in A$; fixando-se, nessa partição, dois conjuntos diferentes e, em cada um dêstes, um elemento, então, trocando-se entre si êsses dois elementos, obtém-se, evidentemente, uma nova partição nas condições desejadas, donde a veracidade de nossa afirmação. Notemos também, que se γ é o número cardinal de um conjunto *infinito*, C, então o conjunto de tôdas as partições de C tem número cardinal inferior ou igual a 2^γ; com efeito, o referido conjunto de partições é equipotente ao conjunto das relações de equivalência sôbre C, e portanto, equipotente a uma parte do conjunto das partes do produto cartesiano $C \times C$, donde, por ser $\overline{\overline{C \times C}} = \overline{\overline{C}} = \gamma$, resulta o que se afirmou.

Consideremos, agora, uma partição de M formada pelos conjuntos M_x, $x \in M$, ($M_x \cap M_y = \phi$ para $x \neq y$), partição essa, cuja existência se pode assegurar, em virtude da primeira das observações acima; e, para cada $x \in M$, seja P_x o conjunto das partições de M_x, cada uma formada por conjuntos de mesmo cardinal β. Então, pelas observações de há pouco, tem-se:

$$2 \leqq \overline{\overline{\mathsf{P}}}_x \leqq 2^\alpha, \qquad \forall\, x \in M,$$

donde, pondo-se

$$\mathsf{H} = \prod_{x \in M} \mathsf{P}_x$$

(produto cartesiano da família $(P_x)_{x \in M}$ de conjuntos P_x de partições), resulta $\overline{\overline{\mathsf{H}}} \leqq 2^\alpha$. Consideremos, agora, para cada $\lambda \in \mathsf{H}$, a reunião

$$\mathsf{H}_\lambda = \bigcup_{x \in M} P_x .$$

onde $\lambda = (P_x)_{x \in M}$ (e portanto, para cada $x \in M$, $P_x \in \mathsf{P}_x$). Ora, é óbvio que H_λ é uma partição de M, formada por conjuntos de mesmo número cardinal β; por outro lado, se $\mu \neq \lambda$, $\mu \in \mathsf{H}$, então $\mathsf{H}_\lambda \neq \mathsf{H}_\mu$. Logo, *o número cardinal do conjunto das partições de* M, *cada uma formada por conjuntos de mesmo número cardinal* β, *é* 2^α.

2. Número de partições de um conjunto. Do que se constatou no n.º precedente, resulta, imediatamente, que: *se* α *é o número cardinal de um conjunto infinito,* M, *então o número cardinal do conjunto de tôdas as partições de* M *é* 2^α. Êste resultado, aliás, foi obtido diretamente, em [1], mostrando-se que *o número cardinal do conjunto das partições binárias do conjunto infinito* M *é* 2^α, o que, por sua vez, decorre do fato de que, fixando-se um elemento $a \in M$, a função

$$X \rightarrow \{X, M - X\},$$

definida no conjunto das partes não vazias de $M - \{a\}$, é biunívoca (e, naturalmente, também do fato, já observado no n.º 1 desta Nota, de que o número cardinal do conjunto de todas as partições de M é inferior ou igual a 2^α). Quando M é finito, o cálculo do número de partições de M se torna menos trivial. Acolhendo uma sugestão do Prof. Newton C. A. da Costa, reproduziremos, a seguir, a solução apresentada em [1].

Seja m o número de elementos do conjunto finito $M \neq \phi$. Designando-se por x_r $(1 \leqq r \leqq m)$ o número de partições de M, cada uma com r conjuntos, e por $S_{m,r}$ o número de aplicações de M *sôbre* o conjunto $\{1, \cdots, r\}$, tem-se:

$$r!\, x_r = S_{m,r} .$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa igualdade por $\binom{p}{r}$ $(1 \leqq p \leqq m)$ e somando-se em relação a r, vem

$$\sum_{r=1}^{p} r! \binom{p}{r} x_r = \sum_{r=1}^{p} \binom{p}{r} S_{m,r} .$$

Como somatório da direita é, precisamente, o número das aplicações de M *no* conjunto $\{1, \cdots, r\}$, ter-se-á

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{p} a_{p,r}\, x_r = p^m ,$$

onde, por comodidade, puzemos $a_{p,r} = n! \binom{p}{r}$ (para $p < r$, poremos $a_{p,r} = 0$). Tomando-se $p = 1, \cdots, n$ $(n \leqq m)$ obteremos, a partir de (1), um sistema de n equações lineares nas incógnitas $x_1, \cdots, x_n$. Ora, sendo $P_{m,n}$ o número de partições de M, cada uma possuindo no máximo n conjuntos, ter-se-á $P_{m,n} = x_1 + \cdots + x_n$. Pondo-se, então, $b_{p,r} = a_{p,r} + p^m$ $(1 \leqq p \leqq n,\ 1 \leqq r \leqq n)$ e sendo D_n o determinante da matriz $((b_{p,r}))$, obtém-se, efectuando-se os cálculos:

$$P_{m,n} = \frac{D_n}{1!\,2!\cdots n!} - 1\,,$$

donde o número de partições de M é

$$P_{m,m} = \frac{D_m}{1!\,2!\cdots m!} - 1\,.$$

Observação. A noção de conjunto finito é aqui considerada no sentido aritmético habitual (um conjunto A é *finito* se existe um número natural n tal que A é equipotente ao conjunto dos naturais estritamente inferiores a n); e um conjunto será *infinito* se não fôr finito. No caso em que M é infinito, pressupuzemos, na solução do problema, o Axioma da Escolha, notadamente ao considerarmos a equipotência entre M e $M \times M$ (ver [2], págs. 148-150).

BIBLIOGRAFIA

[1] Edison Farah, «*Number of equivalence relations on a set*» (Ciência e Cultura, Vol 18, n.º 4, 1966).

[2] A. Tarski, «*Sur quelques théorèmes qui equivalent à l'axiome du choix*» (Fundamenta Mathematicae, Vol. 5, 1924).