MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (1.ª chamada) — 14-3-1969.

I

5706 — 1) A partir da axiomática de corpo prove que, para qualquer corpo K,

a) $0 = -0$

b) $a \cdot b = a \cdot c \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$

c) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.

2) Demonstre que o lugar geométrico das imagens dos complexos z tais que

$$\forall \lambda \in R \text{ e } z_1, z_2 \in C \quad \frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda$$

é a recta corrente pelas imagens de z_1 e z_2.

R.: 1) a) *Como* $0 + 0 = 0$ *resulta logo* $0 = -0$.

b) *Como* $a \neq 0$ *existe* a^{-1} *e então de* $a \cdot b = a \cdot c$ *conclui-se que* $a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$ *ou* $(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c \cdot$ *Dado que* $a^{-1} \cdot a = 1$, *vem finalmente* $1 \cdot b = 1 \cdot c$ *ou* $b = c$.

c) *Supondo, por exemplo,* $b \neq 0$, *vem de* $a \cdot b = 0$ *a relação* $(a \cdot b) \cdot b^{-1} = 0$, *ou* $a \cdot 1 = 0$, *donde* $a = 0$. Mutatis mutandis *para* $a \neq 0$.

2) *Fazendo* $z = x + iy$, $z_1 = a + bi$ *e* $z_2 = c + di$, *a relação* $\frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda$ *pode escrever-se na forma*

$$\frac{(x - a) + (y - b)i}{(x - c) + (y - d)i} = \lambda,$$

ou

$$(x - a) + (y - b)i = \lambda[(x - c) + (y - d)i].$$

Vem então $\begin{cases} x - a = \lambda(x - c) \\ y - b = \lambda(y - d) \end{cases}$ *e, eliminando* λ, *vem* $\frac{x - a}{y - b} = \frac{x - c}{y - d}$ *que é a equação da recta que passa pelos pontos* (a, b) *e* (c, d).

II

5707 — 1) Seja

$$X = \{x : x = (-1)^n + 1/m \quad (m, n = 1, 2, \cdots)\}.$$

Justificando as respostas, indique os seguintes conjuntos: $\operatorname{int} X$, $\operatorname{ext} X$, $\operatorname{front} X$ e derivado de X. Indique também $\sup X$ e $\inf X$. O conjunto X é fechado? É aberto? Porquê?

2) Seja u_n o termo geral de uma sucessão que possui a propriedade seguinte: existe um número natural m e um número real k $(0 < k < 1)$ tais que, para todo o número natural $n \geqq m$, é $|u_{n+1}| \leqq k |u_n|$. Mostre que $\lim u_n = 0$.

Calcule $\lim \left(\sqrt[9]{1 + \frac{n^2}{e^n}} - 1\right) \frac{n}{\log n}$.

R.: 1)

$$\begin{aligned} &int\, X = \emptyset \\ &ext\, X = R - (X \cup \{-1, 1\}) \\ &front\, X = X \cup \{-1, 1\} \\ &X' = \{-1, 1\} \\ &sup\, X = 2 \\ &inf\, X = -1. \end{aligned}$$

O conjunto X *não é fechado porque não contém o seu derivado e também não é aberto porque* $X \neq int\, X$.

2) *De*

$$\begin{aligned} &|u_{m+1}| \leqq k |u_m| \\ &|u_{m+2}| \leqq k |u_{m+1}| \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|u_{m+p}| \leqq k |u_{m+p-1}|, \end{aligned}$$

vem

$$|u_{m+p}| \leqq k^p |u_m|, \text{ ou } |u_n| \leqq k^{n-m} |u_m| \quad (n = m + p).$$

Como $k^{n-m} \to 0$, *resulta imediatamente* $\lim u_n = 0$.

Notando que

$$\sqrt[9]{1 + \frac{n^2}{e^n}} - 1 = \frac{1}{9} \zeta \frac{n^2}{e^n} \; (\zeta \to 1),$$

vem

$$\lim \left(\sqrt[9]{1+\frac{n^2}{e^n}}-1\right)\frac{n}{\log n} =$$

$$=\frac{1}{9}\lim \zeta\,\frac{n^3}{e^n}\cdot\frac{1}{\log n}=0\,.$$

III

5708 – 1) Admitindo que Σu_n converge absolutamente, e tendo em conta a evanescência do termo geral, demonstre que cada uma das séries seguintes também converge absolutamente:

$a)$ Σu_n^2 $b)$ $\Sigma \dfrac{u_n}{1+u_n}$ $(u_n \neq -1)$ $c)$ $\Sigma \dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}$.

2) Supondo que $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$ e que $f(x)>0$ em certa vizinhança do ponto a, prove que $A \geqq 0$. Utilize esta proposição para demonstrar que, sendo $\lim\limits_{x=a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x=a} g(x)=B$ e $f(x)<g(x)$ em certa vizinhança do ponto a, então $A \leqq B$.

R.: 1) a) $\lim \dfrac{u_n^2}{|u_n|}=0$, *isto é, a partir de certa ordem é* $\dfrac{u_n^2}{|u_n|}<\varepsilon\ (\varepsilon>0)$ *ou* $u_n^2<\varepsilon\,|u_n|$. *Como* $\Sigma\,\varepsilon\,|u_n|$ *converge, também converge (absolutamente)* Σu_n^2.

b) $\lim\left|\dfrac{u_n}{1+u_n}\right|/|u_n|=1$ *o que implica que a série* $\Sigma\left|\dfrac{u_n}{1+u_n}\right|$ *é convergente.*

c) $\lim \dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}/u_n^2=1$ *e portanto, atendendo à alinea* a), *pode garantir-se que* $\Sigma\dfrac{u_n^2}{1+u_n^2}$ *converge (absolutamente).*

2) *Supondo* A *finito, se pudesse ser* $A<0$, *então, escolhido* $\delta<0$ *tal que* $A+\delta<0$, *existiria* $\varepsilon>0$ *tal que* $x \in V_\varepsilon(a) \wedge x\neq a \Rightarrow A-\delta<f(x)<A+\delta<0$ *e já não poderia ter-se* $f(x)>0$ *numa vizinhança do ponto* a. *Idêntico raciocínio para* A *infinito.*

A segunda parte tira-se imediatamente desta proposição, notando que $g(x)-f(x)>0$ *em certa vizinhança do ponto* a *e que* $\lim\limits_{x=a}[g(x)-f(x)]=B-A$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência (2.ª chamada) — 22-3-1969.

I

5709 – 1) A partir da axiomática de corpo prove que, em qualquer corpo K, são satisfeitas as propriedades seguintes:

$a)$ Se $a\neq 0$ então $a\cdot c=b$ se e só se $c=a^{-1}\cdot b$.
$b)$ $a\cdot 0=0\cdot a=0$.
$c)$ $a\cdot(-b)=(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

2) Designando x e y números reais, demonstre que

$a)$ $x>0 \wedge y>0 \Rightarrow x+y>0 \wedge x\cdot y>0$.
$b)$ $x<0 \wedge y>0 \Rightarrow x\cdot y<0$.

R.: 1) a) *Se* $a\neq 0$ *existe* a^{-1} *e, de acordo com a relação* $a\cdot c=b$, *vem* $a^{-1}\cdot(a\cdot c)=a^{-1}\cdot b$ *ou* $c=a^{-1}\cdot b$. *Reciprocamente, de* $c=a^{-1}\cdot b$ *vem* $a\cdot c=a\cdot(a^{-1}\cdot b)$ *ou* $a\cdot c=b$.

b) *Notando que* $a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$, *tem-se* $a\cdot 0=0\cdot a=0$.

c) *Basta observar que*

$$0=a\cdot 0=a\cdot[b+(-b)]=a\cdot b+a\cdot(-b)\,.$$

Desta relação se tira que $a\cdot(-b)=-(a\cdot b)$. *Anàlogamente se conclui que* $(-a)\cdot b=-(a\cdot b)$.

2) a) *Sendo* $x=[X_1,X_2]$ *e* $y=[Y_1,Y_2]$, *tem-se*

$$x>0 \Leftrightarrow 0 \in X_1$$
$$y>0 \Leftrightarrow 0 \in Y_1\,.$$

Ora $0\in X_1 \wedge 0\in Y_1 \Rightarrow 0 \in X_1+Y_1$ *o que prova que* $x+y>0$. *Designando* X_1Y_1 *o conjunto dos produtos inferiores* $x_1y_1\ (x_1>0 \wedge y_1>0)$ *é também evidente que a secção inferior de* xy *contém* 0 *e portanto* $xy>0$.

b) *Sendo* $x<0$ *é fácil mostrar que* $-x>0$ *e, por definição, vem* $xy=-[(-x)y]$. *O resultado anterior assegura que* $(-x)y>0$ *e portanto* $xy<0$.

II

5710 – 1) Sendo $A=\{a : a=(-1)^n(1+2/n)^n\ (n=1,2,\cdots)\}$ e $B=[-10,1]$, indique, justificando as respostas, o derivado de $A\cup B$, o fecho de $A\cup B$, $\operatorname{int}(A\cup B)$, $\operatorname{front}(A\cup B)$, $\sup(A\cup B)$ e $\inf(A\cup B)$.

2) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada que não possui um termo superior a todos os outros. Prove que $\sup(u_n)=\overline{\lim}\,u_n$. Verifique a proposição com $u_n=(-1)^n(1-1/n)$:

Determine a e b, sabendo que $a+b=1$ e que $\lim n\left(e^{a/n}-\frac{b}{n}-1\right)=2$.

R.: 1) $(A\cup B)'=[-10,1]\cup\{e^2\}$.
$\overline{A\cup B}=[-10,1]\cup$
$\cup\left\{a: a=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n (n=2,4,6,\cdots)\right\}\cup\{e^2\}$.
$int(A\cup B)=]-10,1[$.
$front(A\cup B)=\{-10,1,\ a=(-1)^n(1+2/n)^n$
$(n=1,2,\cdots),e^2\}$.
$sup(A\cup B)=e^2$.
$inf(A\cup B)=-10$.

2) *Como a sucessão é limitada e não possui um termo superior a todos os outros, pode garantir-se que* (u_n) *tem supremo finito e esse supremo terá de ser ponto de acumulação de* (u_n) *não pertencente a* (u_n). *Tal ponto de acumulação será o maior dos sublimites e portanto* $\overline{lim}\, u_n$.

A sucessão $u_n=(-1)^n(1-1/n)$ *é limitada* $(|u_n|<1)$ *e não possui um termo superior a todos os outros. O* $sup(u_n)=1$ *e* 1 *é* $\overline{lim}\, u_n$ *pois* $u_{2n}\to 1$ *e* $u_{2n-1}\to -1$.
Notando que

$$lim\ n\left(e^{a/n}-\frac{b}{n}-1\right)=lim\ n\left(\xi\frac{a}{n}-\frac{b}{n}\right)=$$
$$=lim(\xi a-b)=a-b,$$

vem $a-b=2$ *que, juntamente com a condição* $a+b=1$, *dá* $a=3/2$ *e* $b=-1/2$.

III

5711 — 1) Mostre que as séries de potências $\Sigma a_n x^n$, $\Sigma n a_n x^{n-1}$ e $\Sigma\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ possuem o mesmo intervalo de convergência absoluta $]-\lambda,\lambda[$. Tome $a_n=1/n$ para justificar que as três séries podem apresentar comportamentos diferentes para $x=\pm\lambda$.

2) Considere a função real de variável real

$$x\to f(x)=\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}.$$

Mostre que ela também pode ser definida do modo seguinte:

$$x\to f(x)=\begin{cases}1/x+1 & (x<-1)\\ 2 & (-1<x<1)\\ 1 & (x=1)\\ 1/x+1 & (x>1).\end{cases}$$

A função é contínua para $x=1$? Porquê?

R.: 1) *As três séries possuem o mesmo intervalo de convergência absoluta porque*
$\overline{lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{lim}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}=\overline{lim}\sqrt[n]{|a_{n-1}|/n}$.

Tomando $a_n=1/n$ *obtêm-se as séries* $\Sigma\frac{x^n}{n}$, Σx^{n-1} *e* $\Sigma\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ *para as quais o intervalo de convergência absoluta é* $]-1,1[$. *No entanto,* $\Sigma\frac{x^n}{n}$ *diverge para* $x=1$ *e converge para* $x=-1$; Σx^{n-1} *diverge para* $x=\pm1$; *e* $\Sigma\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ *converge para* $x=\pm1$.

2) *Com* $|x|>1$ *vem*

$$\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}=\lim_{n=\infty}\frac{1+2/x^n}{x+1+1/x^n}=\frac{1}{x+1}.$$

Para $|x|<1$ *é* $\lim_{n=\infty}\frac{x^n+2}{x^{n+1}+x^n+1}=2$ *e* $f(1)=1$.
Para $x=-1$ *a função não é definida porque não existe* $\lim_{n=\infty}\frac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}+(-1)^n+1}=\lim_{n=\infty}[(-1)^n+2]$.

A função não é contínua em $x=1$ *porque não existe* $\lim_{x=1} f(x)$. *De facto,* $f(1-0)=2$ *e* $f(1+0)=1/2$.
A função não apresenta continuidade lateral no ponto $x=1$ *porque* $f(1-0)\neq f(1+0)\neq f(1)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência — 1.ª chamada — Duração — 3 horas — 14-6-1969.

I

5712 — 1) Utilize a identidade $2\max(f,g)=|f-g|+f+g$ para demonstrar que, sendo f e g funções contínuas para $x=a$, também $\max(f,g)$ é função contínua para $x=a$. Mostre também que $\min(f,g)$ é contínua para $x=a$.

Estude a continuidade e extreme a função definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2\ (1\leq x<2)\\ 5\ (x=2)\\ -x\ (2<x\leq 3).\end{cases}$$

Indique os extremos absolutos (caso existam) e relativos. Justifique as respostas.

R.: *Basta notar que* $|f-g|$ *e* $f+g$ *são funções contínuas para* $x=a$. *Para a segunda parte observe-se que* $\min(f,g) = -\max(-f,-g)$.

A função $f(x)$ *é contínua em* $[1,2[\,\cup\,]2,3]$ *e descontínua para* $x=2$. *Tem-se*

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (1 \leq x < 2) \\ \pm\infty & (x=2) \\ -1 & (2 < x \leq 3) \end{cases}$$

o que permite concluir que os mínimos locais são $f(1)=1$ e $f(3)=-3$, *e o máximo local é* $f(2)=5$. *É claro que o máximo absoluto é* $f(2)=5$ *e o mínimo absoluto é* $f(3)=-3$.

2) Supondo que f admite primeira e segunda derivada em $[a,b]$ e que são cumpridas as condições $f(a)=f(b)=0$ e $f(c)>0$ $(a<c<b)$, demonstre que $\exists\, \xi \in\,]a,b[\, : f''(\xi)<0$.

R.: *A função* f *é regular. A aplicação do teorema de Lagrange dá*

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(c_1) > 0 \quad (a<c_1<c)$$

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(c_2) < 0 \quad (c<c_2<b)$$

$$\frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1} = f''(\xi) < 0 \quad (c_1<\xi<c_2)$$

o que prova a proposição.

3) Prove que o desenvolvimento em série de Mac-Laurin de $y = \dfrac{1}{(1-k^2x^2)^2}$ $(k>0)$ é

$$\sum_0^\infty (n+1)\, k^{2n} x^{2n}$$

para $|x|<1/k$.

R.: *A fórmula do binómio dá, para* $|x|<1/k$,

$$(1-k^2x^2)^{-2} =$$
$$= \sum_0^\infty \frac{-2(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-k^2x^2)^n$$
$$= \sum_0^\infty \frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!} k^{2n} x^{2n}$$
$$= \sum_0^\infty (n+1)\, k^{2n} x^{2n}.$$

4) Calcule $P\dfrac{1}{2+\cos x}$.

R.: *Fazendo a substituição* $tg\dfrac{x}{2} = t$, *vem*

$$P\frac{1+2\cos x}{1} = P\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} =$$

$$= 2P\frac{1}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, P\frac{1\sqrt{3}}{1+\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\left(\frac{tg\dfrac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

II

5713 — 1) Seja dada $A=[a_{ij}]\,(m\times n)$ e considerem-se as somas por colunas $\sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ $(j=1,2,\cdots,n)$. Define-se o módulo de A, $M(A)$, como

$$\max_j \left\{ \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (j=1,2,\cdots,n) \right\}.$$

Prove que

a) $M(I)=1$.

b) $M(\lambda A) = |\lambda|\, M(A)$ para qualquer escalar λ.

c) $M(A+B) \leq M(A)+M(B)$.

R.: a) *Para a matriz identidade* I *tem-se*

$$\sum_{i=1}^m |a_{ij}| = 1, \ \forall j.$$

Logo é $M(I)=1$.

b) *Como* $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ *e*

$$\sum_{i=1}^m |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_{i=1}^m |a_{ij}|,$$

tem-se imediatamente o resultado.

c) *Com* $A=[a_{ij}]$ *e* $B=[b_{ij}]$ *é* $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$

e $\sum_{i=1}^m |a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^m |a_{ij}| + \sum_{i=1}^m |b_{ij}|$, *relação que conduz fàcilmente ao resultado.*

2) Utilize a teoria dos determinantes para calcular os valores de a e b por forma que os sistemas de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = b \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 + a\,x_2 = b \\ x_1 + x_3 = b \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

sejam equivalentes. Mostre que para esses valores de a e b os sistemas são ambos possíveis determinados e ache a solução comum.

R.: *O primeiro sistema é possível determinado porque* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

A sua solução vem dada pela regra de Cramer:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - b$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = b - 1$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 1 .$$

Para que o segundo sistema também seja possível determinado é preciso que $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a + 1 \neq 0$ *ou* $a \neq -1$. *E, para que seja equivalente ao primeiro, a sua solução terá de ser* $x_1 = 3 - b$, $x_2 = b - 1$ *e* $x_3 = 1$, *isto é,*

$$\begin{cases} 3 - b + a(b - 1) = b \\ 3 - b + 1 = b \\ 3 - b - (b - 1) = 0 \end{cases}$$

sistema que dá $a = 1$ *e* $b = 2$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência — 2.ª chamada — Duração — 3 horas — 20-6-1969.

I

5714 — 1) Seja f contínua em $[a, b]$ e admita que x_1 e x_2 são maximizantes (minimizantes) de f que se supõe não constante entre x_1 e x_2. Prove, utilizando o teorema de Weierstrass, que existe um minimizante (maximizante) de f entre x_1 e x_2.

Indique, justificando, os pontos (próprios e impróprios) de continuidade) e de descontinuidade de $x \to f(x) = x\,e^{1/x}$.

R.: *Suponha-se que* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *são dois máximos de* $f(x)$. *Como* $f(x)$ *não é constante entre* x_1 *e* x_2, *seja* $f(x_3)$ *o mínimo absoluto em* $[x_1, x_2]$ *cuja existência é garantida pelo teorema de* Weierstrass. *Se* x_3 *não pertence a qualquer secção de invariabilidade,* $f(x_3)$ *é mínimo e não é máximo; se* x_3 *pertence a uma tal secção algum dos extremos desta cai entre* x_1 *e* x_2 *e ainda em tal ponto* $f(x)$ *tem ùnicamente mínimo.* Mutatis mutandis *para o caso de* $f(x_1)$ *e* $f(x_2)$ *serem dois mínimos.*

A função $x \to f(x)$ *é contínua em todos os pontos de* R *excepto* $x = -\infty$, $x = 0$, $x = +\infty$.

2) Utilize a função auxiliar definida por $g(x) = [f(x) - f(a)](x - b)$ para demonstrar que, sendo f regular em $[a, b]$, então $\exists\, c \in]a, b[$:

$$\frac{f(c) - f(a)}{b - c} = f'(c) .$$

R.: *A função* $g(x)$ *é regular e, como* $g(a) = g(b) = 0$, *o teorema de* Rolle *garante que* $g'(x) = f'(x)(x - b) + [f(x) - f(a)]$ *se anula para* $x = c$ $(a < c < b)$. *Então* $f'(c)(c - b) + [f(c) - f(a)] = 0$, *o que prova o teorema.*

3) Sabendo que $x \to f(x) = k\,x - \dfrac{x^3}{1 + x^2}$ é crescente $\forall\, x \in R$, mostre que $k \geq 9/8$.

R.: $f'(x) = K - \dfrac{x^4 + 3x^2}{(1 + x^2)^2} \geq 0, \forall\, x \in R$.

Tomando $g(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(1 + x^2)^3}$, *o seu máximo terá de ser inferior ou igual a* k. *Ora*

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 6x}{(1 + x^2)^3}$$

e $g'(0) = g'(\pm\sqrt{3}) = 0$. *Não é difícil reconhecer que* $\pm\sqrt{3}$ *são maximizantes e* $g(\pm\sqrt{3}) = 9/8$. *Logo,* $k \geq 9/8$.

4) Calcule $P \dfrac{e^x (1 + x \log x)}{x}$.

R.: $$P \frac{e^x (1 + x \log x)}{x} = P \frac{e^x}{x} + P\, e^x \log x = P \frac{e^x}{x} + e^x \log x - P \frac{e^x}{x} = e^x \log x .$$

II

5715 – 1) Sendo A e B matrizes quadradas tais que AB e BA existem, demonstre que a soma dos elementos principais de AB e BA é a mesma. Prove que matrizes diagonais da mesma ordem são permutáveis na multiplicação.

R.: *Fazendo* $P = AB$ *e* $Q = BA$ *vem* $p_{ij} = a_{i\alpha} b_{\alpha j}$ *e* $q_{ij} = b_{i\alpha} a_{\alpha j}$ *com* $\alpha\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$. *Então* $p_{ii} = a_{i\alpha} b_{\alpha i}$ *e* $q_{ii} = b_{i\alpha} a_{\alpha i}$ *com* $\alpha\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$. *Logo,* $\sum\limits_{i} p_{ii} = \sum\limits_{i} q_{ii} = a_{i\alpha} b_{\alpha i}$ *com* $\alpha\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$ *e* $i\,(mudo) = 1, 2, \cdots, n$.

Para a segunda proposição, supondo A *e* B *diagonais da mesma ordem, vem*

$$p_{ij} = a_{i\alpha} b_{\alpha j} = \begin{cases} a_{ii}\, b_{ii} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$q_{ij} = b_{i\alpha} a_{\alpha j} = \begin{cases} b_{ii}\, a_{ii} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

o que prova que $P = Q$.

2) Utilize a teoria dos determinantes para calcular os valores de a e b por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 - x_2 = b \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = a \end{cases}$$

seja possível. Ache nesse caso a solução do sistema.

R.: *A característica da matriz dos coeficientes é* 2 *pois, por exemplo,*

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. *Para que o sistema seja possível o teorema de* Rouché *exige que os determinantes característicos*

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + b + 3a$$

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a - b$$

sejam nulos, isto é

$$\begin{cases} -2 + b + 3a = 0 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

que dá $a = b = 1/2$. *O sistema dado é pois possível (determinado) para estes valores de* a *e* b *e é equivalente ao sistema constituído pelas equações principais* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1/2 \\ x_1 - x_2 = 1/2 \end{cases}$ *cuja solução é* $x_1 = 1/2$ *e* $x_2 = 0$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Julho — 1.ª chamada — Duração 3 horas — 5-7-1969.

I

5716 — 1) Seja A subconjunto do conjunto fundamental U. A aplicação φ_A de U em $\{0, 1\}$ definida por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

é a chamada *função característica* de A. Demonstre que

a) $\varphi_{\sim A}(x) = 1 - \varphi_A(x)$
b) $\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x)$
c) $\varphi_{A \cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A \cap B}(x)$.

R.: a) *Como*

$$\varphi_{\sim A}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \notin A \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0$$
$$\varphi_{\sim A}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in A \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1,$$

a igualdade é óbvia.

b) *Notando que*

$$\varphi_{A \cap B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 1$$

$$\varphi_{A \cap B}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin A \cap B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 0 \\ x \notin A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 1 \\ x \notin A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 0, \end{cases}$$

vem imediatamente

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) \cdot \varphi_B(x).$$

c) *Tem-se*

$$\varphi_{A \cup B}(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in A \cup B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \notin B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 0 \\ x \notin A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 1 \\ x \in A \wedge x \in B \Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 1 \wedge \varphi_B(x) = 1 \end{cases}$$

$$\varphi_{A \cup B}(x) = 0 \Longleftrightarrow x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin B \wedge x \notin B \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \varphi_A(x) = 0 \wedge \varphi_B(x) = 0$$

e, atendendo ao resultado da alinea b), *vem*

$$\varphi_{A\cup B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x) - \varphi_{A\cap B}(x).$$

2) Desenvolva $\log x$ segundo as potências de $y=(x-1)/(x+1)$. Para que valores de x é válido o desenvolvimento? Justifique.

R.: *De* $y=(x-1)/(x+1)$ *vem* $x=(1+y)/(1-y)$ *e portanto*

$$\log x = \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \log(1+y) - \log(1-y) =$$

$$= 2\sum_0^\infty \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = 2\sum_0^\infty \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

terá de ser $|y| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$, *donde resulta* $x>0$.

3) Calcule $P\,1/(\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x})$.

R.: *Fazendo* $5-x=t^4$, *vem*

$$P\frac{1}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}} = -P\frac{4t^3}{t+t^2} =$$

$$= -4P\frac{t^2}{t+1} = -4P\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right) =$$

$$= -4\frac{t^2}{2} + 4t - 4\log|t+1| =$$

$$= -2\sqrt{5-x} + 4\sqrt[4]{5-x} - 4\log|\sqrt[4]{5-x}+1|.$$

4) Estude a monotonia de $x \to f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $]0,\pi/2]$ e deduza desse estudo que $\forall x \in]0,\pi/2]$ $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq 2/\pi$ (a igualdade é verificada se e só se $x=\pi/2$).

R.: $f' = \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \cos x\,\frac{x - \operatorname{tg} x}{x^2}$ *e, como no intervalo indicado é* $\cos x > 0$ *e* $x - \operatorname{tg} x < 0$, *vem* $f' < 0$ *o que indica que a função é incessantemente decrescente em* $]0,\pi/2]$. *É claro que*

$$\forall x \in]0,\pi/2]\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \frac{\operatorname{sen} \pi/2}{\pi/2} = 2/\pi.$$

II

5717 — 1) Mostre que todas as matrizes permutáveis com $A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ têm a forma

$$B = \begin{bmatrix} \alpha&\beta&\gamma&\delta\\0&\alpha&\beta&\gamma\\0&0&\alpha&\beta\\0&0&0&\alpha\end{bmatrix}.$$

R.: *Fazendo* $B = \begin{bmatrix} a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\end{bmatrix}$, *vem*

$$AB = \begin{bmatrix} e&f&g&h\\i&j&k&l\\m&n&o&p\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad e \quad BA = \begin{bmatrix} 0&a&b&c\\0&e&f&g\\0&i&j&k\\0&m&n&o\end{bmatrix}$$

e a condição $AB = BA$ *implica*

$$\begin{cases} e=i=j=m=n=o=0\\ a=f=k=p\\ b=g=l\\ c=h\end{cases}$$

2) Prove que o determinante $|a_{ij}|$ não sofre alteração se se multiplica cada a_{ij} por p^{i-j}. Calcule

$$\begin{vmatrix} 1&1&1\cdots1\\-1&0&1\cdots1\\-1&-1&0\cdots1\\ \vdots&\vdots&\vdots\ \ \vdots\\-1&-1&-1\cdots0\end{vmatrix}.$$

R.: *Como qualquer termo da matriz* $[a_{ij}]$ *é da forma* $t = a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$, *multiplicando cada* a_{ij} *por* p^{i-j} *vem*

$$t' = p^{\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{\alpha_n\beta_n} = t$$

pois $\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i = 0$.

Adicionando a primeira linha do determinante dado a cada uma das restantes, vem o determinante triangular

$$\begin{vmatrix} 1&1&1\cdots1\\0&1&2\cdots2\\0&0&1\cdots2\\ \vdots&\vdots&\vdots\ \ \vdots\\0&0&0\ \ \ 1\end{vmatrix}$$

cujo valor é 1.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª Cadeira — Exame final — Epoca de Julho — 2.ª chamada — Duração 3 horas — 11-7-1969.

I

5718 – 1) Prove as seguintes proposições relativas a conjuntos:

a) $A \cap B = A - (A - B)$

b) $B \subseteq A \Longleftrightarrow B = A - (A - B)$.

R.: a) $A - (A - B) = A \cap (\widetilde{A - B}) = A \cap$ $\cap (\widetilde{A \cap \sim B}) = A \cap (\sim A \cup B) = (A \cap \sim A) \cup$ $\cup (A \cap B) = \varphi \cup (A \cap B) = A \cap B$.

b) $B \subseteq A \Longleftrightarrow A \cap B = B \Longleftrightarrow B = A - (A - B)$

2) Supondo que a função f é par (ímpar), mostre que, possuindo derivadas para $x = 0$, são nulas as derivadas de ordem ímpar (par).

Sejam f e g funções ímpares com derivadas contínuas de ordem $\leqq 3$. Admitindo que $g'''(0) \neq 0$, calcule $\lim\limits_{x=0} \dfrac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}$

R.: *Para função par tem-se*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ f'(x) &= -f'(-x) \\ f''(x) &= f''(-x) \\ f'''(x) &= -f'''(-x) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

o que implica $f'(0) = f'''(0) = \cdots = 0$. *Para função ímpar tem-se*

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ f'(x) &= f'(-x) \\ f''(x) &= -f''(-x) \\ f'''(x) &= f'''(-x) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

o que implica $f(0) = f''(0) = \cdots = 0$.

O limite apresentado conduz a uma indeterminação da forma $0/0$ *e a regra de Cauchy dá*

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f'(x) - 4f'(2x) + 3f'(3x)}{g'(x) - 4g'(2x) + 3g'(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f''(x) - 8f''(2x) + 9f''(3x)}{g''(x) - 8g''(2x) + 9g''(3x)} =$$

$$= \lim_{x=0} \frac{f'''(x) - 16f'''(2x) + 27f'''(3x)}{g'''(x) - 16g'''(2x) + 27g'''(3x)} = \frac{f'''(0)}{g'''(0)}.$$

3) Calcule $P\,\dfrac{1}{1 + 3\cos^2 x}$.

R.:

$$P\,\frac{1}{1 + 3\cos^2 x} = P\,\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 3} = P\,\frac{\sec^2 x}{4 + tg^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,P\,\frac{\frac{1}{2}\sec^2 x}{1 + \left(\frac{tg\,x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\,arctg\left(\frac{tg\,x}{2}\right).$$

4) Para que valores de a e b o ponto $P(1, 3)$ é ponto de inflexão da imagem de $x \to f(x) = a x^3 + b x^2$? Justifique.

Escreva a equação da tangente à curva no ponto de inflexão.

R.:
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

A condição $f(1) = 3$, *juntamente com* $f''(1) = 0$, *dá* $a = -3/2$ *e* $b = 9/2$.

A tangente de inflexão é $Y - 3 = \dfrac{9}{2}(X - 1)$.

II

5719 – 1) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, ache as matrizes X que satisfazem à equação matricial $AX = XA$.

R.: *Tomando* $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, *vem*

$$AX = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_3 & x_2 - 2x_4 \\ -3x_1 + 4x_3 & -3x_2 + 4x_4 \end{bmatrix}$$

e

$$XA = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 & -2x_1 + 4x_2 \\ x_3 - 3x_4 & -2x_3 + 4x_4 \end{bmatrix}.$$

A condição $AX = XA$ *conduz ao seguinte sistema homogéneo duplamente indeterminado:*

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Um sistema fundamental de soluções é dado por

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ *e portanto a solução geral é*

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \dfrac{2}{3}\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

para quaisquer valores dos parâmetros α *e* β. *Tem-se então*

$$X = \begin{bmatrix} \alpha + \beta & \dfrac{2}{3}\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

2) Prove as relaçõss:

a)
$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

b)
$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ b_1 & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ b_n & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c_1 \cdots c_n \\ 0 & a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

R.: a) *Basta desenvolver pelo teorema de Laplace o determinante no primeiro membro ao longo da primeira linha (coluna) e proceder de modo idêntico para o determinante no segundo membro para se obter o resultado.*

b) *Utilizando o teorema de Laplace para o segundo determinante ao longo da primeira linha e para o terceiro determinante ao longo da primeira coluna, obtém-se o primeiro.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro (1.ª chamada) — Prova escrita — 1-10-1969.

I

5720 — 1) Estude do ponto de vista da reflexividade, simetria e transitividade as relações binárias seguintes:

a) $x\,S\,y \iff x$ e y são primos entre si em N;
b) $x\,S\,y \iff x - y < 1$ em R;
c) $x\,S\,y \iff |x - y| < 3$ em R.

R.: a) *Não reflexiva, simétrica e não transitiva.*
b) *Reflexiva, não simétrica e não transitiva.*
c) *Reflexiva, simétrica e não transitiva.*

2) Utilizando os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin de sen x e cos x, determine a, b e c por forma que $\lim\limits_{x=0} \dfrac{x(a + b\cos x) - c \operatorname{sen} x}{x^5} = 1$.

R.: $$\frac{x(a + b\cos x) - c \operatorname{sen} x}{x^5} =$$

$$= \frac{x\left(a + b - \dfrac{bx^2}{2} + \dfrac{bx^4}{24} - \dfrac{bx^6}{6!} + \cdots\right) - cx + \dfrac{cx^3}{6} - \dfrac{cx^5}{120} + \cdots}{x^5} =$$

$$= \frac{(a + b - c)\,x + \left(\dfrac{c}{6} - \dfrac{b}{2}\right)x^3 + \left(\dfrac{b}{24} - \dfrac{c}{120}\right)x^5 + \cdots}{x^5}$$

Para que o limite seja 1 *é preciso que*

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ \dfrac{c}{6} - \dfrac{b}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{24} - \dfrac{c}{120} = 1 \end{cases}$$

sistema cuja solução é $\begin{cases} a = 120 \\ b = 60 \\ c = 180 \end{cases}$.

3) Calcule $P \dfrac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3}$.

R.: $$P \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3} = P \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(\log x) \frac{1}{x} =$$

$$= -\cos(\log x) \frac{1}{x^2} - 2P \cos(\log x) \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= -\cos(\log x) \frac{1}{x^2} - 2\left[\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^2} + 2P \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3}\right] =$$

$$= -\frac{\cos(\log x)}{x^2} - 2\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^2} - 4P\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3}$$

donde resulta

$$P \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^3} = \frac{1}{5}\left[-\frac{\cos(\log x)}{x^2} - 2\frac{\operatorname{sen}(\log x)}{x^2}\right].$$

4) Represente geomètricamente a função definida por $f(x) = 1 - e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}$.

R.: *Domínio:* $]-\infty, +\infty[$.

Continuidade: contínua em todos os pontos próprios e em $x = +\infty$; *descontínua para* $x = -\infty$.

Variação: $f'(x) = e^{-x}(1 - e^{-x})$ *e portanto a função é decrescente em* $]-\infty, 0]$ *e crescente em* $[0, +\infty[$; *possui o mínimo* $f(0) = 1/2$.

Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = e^{-x}(2e^{-x} - 1)$$

e portanto a concavidade está voltada para cima em $]-\infty, \log 2]$ *e para baixo em* $]\log 2, +\infty[$; *existe um ponto de inflexão para* $x = \log 2$.

Assíntotas: $Y = 1$.

II

5721 — 1) Discuta a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & m \\ 2 & -3 & 2 & n & -1 \end{bmatrix}$$

consoante os valores assumidos por m e n.

R.: *Condensando* A, *obtém-se*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & n+2 & 0 \end{bmatrix}$$

donde é fácil concluir a resposta:

$$m \neq 0 \begin{cases} n \neq -2 & r = 4 \\ n = -2 & r = 3 \end{cases}$$

$$m = 0 \begin{cases} n \neq -2 & r = 3 \\ n = -2 & r = 2 \end{cases}$$

2) Utilizando a teoria dos determinantes, calcule α e β por forma que o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = \alpha \\ x_1 \qquad + \beta x_3 = 0 \end{cases}$$

seja possível indeterminado.

R.: *Tomando a matriz dos coeficientes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

β *terá de ser determinado por forma que a característica de* A *seja inferior a* 3. *Basta tomar* $|A| = 0$ *para obter* $\beta = 1$. *É claro que a característica de* A *passa a ser* 2 *porque* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Para que o sistema seja possível é preciso que o característico $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *se anule o que acontece para* $\alpha = 2$.

Portanto, para $\alpha = 2$ *e* $\beta = 1$ *o sistema é possível e simplesmente indeterminado.*

I. S. C. E. F. — Matematicas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro (2.ª chamada) — 7-10-1969.

I

5722 — 1) Para quaisquer conjuntos A e B de U define-se a *soma simétrica* $A \oplus B$ do modo seguinte: $A \oplus B = A \cup B - (A \cap B)$. Prove que

a) $A \oplus B = B \oplus A$
b) $A \oplus A = \emptyset$
c) $(A \oplus B) \cap C = (A \cap C) \oplus (B \cap C)$

R: a) $A \oplus B = A \cup B - (A \cap B) =$
$= B \cup A - (B \cap A) = B \oplus A$

b) $A \oplus A = A \cup A - (A \cap A) = A - A = \emptyset$

c) $(A \oplus B) \cap C = [(A \cup B) - (A \cap B)] \cap C =$
$= [(A \cup B) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B})] \cap C =$
$= \{[(A \cup B) \cap \tilde{A}] \cup [(A \cup B) \cap \tilde{B}]\} \cap C =$
$= \{[(B \cap \sim A) \cup (A \cap \tilde{B})]\} \cap C =$
$= [(B \cap C) \cap \tilde{A}] \cup [(A \cap C) \cap \tilde{B}]$

$(A \cap C) \oplus (B \cap C) = [(A \cap C) \cup (B \cap C)] -$
$- [(A \cap C) \cap (B \cap C)] =$
$= [(A \cap C) \cup (B \cap C)] \cap [(\widetilde{A \cap C}) \cup (\widetilde{B \cap C})]$
$= [(A \cap C) \cap (\widetilde{B \cap C})] \cup [(B \cap C) \cap (\widetilde{A \cap C})]$
$= [(A \cap C) \cap \tilde{B}] \cup [(B \cap C) \cap \tilde{A}]$.

2) Prove que $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1 + \sum_1^\infty (4n^2 + 2) x^n$ para $|x| < 1$:

R:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = (1+x)^3(1-x)^{-3} =$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3)\sum_1^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n =$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3)(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots) =$$

$$= 1+6x+18x^2+38x^3+\cdots$$

para $|x|<1$.

Para obter o termo geral do desenvolvimento note-se que o coeficiente de x^n $(n \geqq 3)$ *é*

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}+3\frac{n(n+1)}{2}+3\frac{(n-1)n}{2}+$$

$$+\frac{(n-2)(n-1)}{2}=4n^2+2.$$

Tem-se então

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1+\sum_1^{\infty}(4n^2+2)x^n.$$

3) Calcule $P\left(\frac{\log x}{x}\right)^2$.

R:

$$P\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 = P\frac{1}{x^2}\log^2 x =$$

$$= -\frac{1}{x}\log^2 x + 2P\frac{\log x}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x}\log^2 x + 2\left(-\frac{1}{x}\log x + P\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x}\log^2 x - \frac{2}{x}\log x - \frac{2}{x}.$$

4) Determine os valores de a e b por forma que a função $x \to f(x) = a\log x + b x^2 + x$ tenha extremos para $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Mostre que com esses valores de a e b x_1 é minimizante e x_2 é maximizante.

R: $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ *e o sistema*

$$\begin{cases} a+2b+1=0 \\ \frac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases} \quad \text{dá} \quad \begin{cases} a=-2/3 \\ b=-1/6 \end{cases}$$

Para estes valores de a *e* b *vem* $f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$ *e, como* $f''(1) = \frac{1}{3} > 0$, $f''(2) = -\frac{1}{6} < 0$, $x_1 = 1$ *é minimizante e* $x_2 = 2$ *é maximizante.*

II

5723 — 1) Ache as matrizes X e Y tais que

$$2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & 5\end{bmatrix} \quad X-3Y=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

R: $$6X+3Y=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -12 & 15\end{bmatrix}$$

e

$$X-3Y=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

donde resulta

$$7X=\begin{bmatrix}0 & 7\\ -7 & 14\end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad X=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

De

$$2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & 5\end{bmatrix} \quad e \quad -2X+6Y=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -10 & 2\end{bmatrix}$$

vem

$$7Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -14 & 7\end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

2) Prove que $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1.$

Sugestão: Estabeleça préviamente a relação $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$.

R: *Desenvolvendo* D_n *pelo teorema de Laplace ao longo da primeira coluna, vem* $D_n = 2D_{n-1} - 1 \cdot D_{n-2}$ *ou* $D_n - D_{n-1} = D_{n-1} - D_{n-2}$. *Esta relação mostra que* $D_1\, D_2\, D_3 \dots$ *estão em progressão aritmética e, como* $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 3$, *a razão dessa progressão é* 1 *o que prova o resultado*: $D_n = n+1$.

Enunciados e soluções dos n.os 5706 a 5723 de Fernando de Jesus

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 15-1-1969.

5724 — 1) Uma aplicação $\varphi: A \to B$ diz-se constante sse $\underset{x,y \in A}{\forall}\ \varphi(x) = \varphi(y)$

a) Dadas duas aplicações $f: A \to B$ e $g: B \to C$, prove que a aplicação composta $h = g \circ f$ é constante sempre que pelo menos uma das aplicações f ou g o for.

b) Mostre por meio de um exemplo que $g \circ f$ pode ser constante não o sendo f nem g.

5725 — 2) Indique, justificando, se são

a) reflexivas *b*) simétricas *c*) transitivas

as relações F, G e H, no conjunto dos reais, determinadas pelas condições seguintes:

1.ª) $x\,F\,y \Longleftrightarrow |x-y| \leqq 1$

2.ª) $x\,G\,y \Longleftrightarrow x-y \in Z$

3.ª) $x\,H\,y \Longleftrightarrow \underset{k \in Z}{\exists} (x \in [k, k+1[\wedge y \in [k, k+1[)$

onde Z designa o conjunto dos inteiros.

Nos casos em que se trate de relações de equivalência descreva as classes de equivalência a que pertencem os números 0, $1/2$ e 1.

5726 — 3) Quando possível dê um exemplo de um conjunto X, majorado no conjunto ordenado **R** e cujo supremo seja:

a) ponto de acumulação de X

b) » isolado de X

c) » interior de X

d) » fronteiro de X

e) » exterior de X.

Nos casos em que não seja possível indicar um exemplo prove que efectivamente o não é.

5727 — 4) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada, verificando a condição

$$\underset{m, n \in N}{\forall} (n \neq m \Longrightarrow u_n \neq u_m)$$

e seja U o conjunto dos termos da sucessão:

Das proposições

a) U não é majorado

b) U tem elemento mínimo

c) u_n é convergente

d) o derivado de U não é vazio

indique as que são necessàriamente verdadeiras, as que são necessàriamente falsas e as que podem ser verdadeiras ou falsas consoante a sucessão u_n que seja escolhida.

Justifique cuidadosamente as suas respostas.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 15-1-1969.

5728 — 1) Represente A, sucessivamente, cada um dos conjuntos: $\{-1, 0\}$, $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ e Q (conjunto dos racionais). Diga quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:

a) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{x \in A}{\exists} \; x \in V_\varepsilon(-1)$

b) $\underset{\varepsilon > 0}{\exists} \; \underset{x \in A}{\forall} \; x \in V_\varepsilon(+\infty)$

c) $\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{x \in A}{\exists} \; x \in V_\varepsilon(\varepsilon)$

Justifique resumidamente.

5729 — 2) *a*) Seja A o subconjunto de **R** formado por todos os números x tais que $x \in \mathbf{R}$ e $x^2 < 4$. Prove que a intersecção dos derivados de A e de Q é igual ao derivado da intersecção de A e Q:

$$(A \cap Q)' = A' \cap Q'$$

b) Dê exemplos de dois conjuntos (por exemplo, dois intervalos abertos de **R**, escolhidos convenientemente) tais que a intersecção dos seus derivados não seja igual ao derivado da sua intersecção.

5730 — 3) *a*) Demonstre que sendo $A_1, A_2, \cdots, A_k$ $(k \in N)$ subconjuntos majorados de **R**, a sua reunião, $A = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_k\}$ é também um conjunto majorado.

b) Se em vez de um número finito considerarmos uma infinidade de conjuntos majorados. será ainda verdadeira a afirmação de que a sua reunião é necessàriamente um conjunto majorado? Justifique.

5731 — 4) Seja u_n o termo geral de uma sucessão limitada verificando a condição $\underset{n \in N}{\forall} u_n \in N$ e seja U o conjunto dos termos da sucessão.

Das proposições:

a) U é um conjunto finito

b) U é um conjunto fechado

c) u_n é estritamente monótona

d) u_n é convergente

indique as que são necessàriamente verdadeiras, as que são necessàriamente falsas e as que podem ser falsas ou verdadeiras consoante a sucessão u_n que seja escolhida. Justifique cuidadosamente as respostas.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 22-1-1969.

5732 — 1) Para cada $x \in R$, seja

$f(x) = \max \{k : k \in Z \wedge k \leqq x\}$ e $g(x) = x - f(x)$.

a) Determine os contradomínios das aplicações f e g (de R em R) e indique se elas são injectivas ou sobrejectivas.

b) Determine as aplicações compostas $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$, $g \circ f$. Justifique abreviadamente as respostas.

2) Indique, justificando, o derivado de cada um dos seguintes conjuntos:

$$A = \{x : x \in N \wedge \underset{y \in N}{\exists} \; x y = 100\}$$
$$B = \{x : x \in R \wedge 0 < |x - 1| \leqq 3\}$$
$$C = \left\{x : x \in R \wedge |x| < \min \{ |x-2|, |x+2| \}\right\}$$
$$D = \left\{x : x \in R \wedge \underset{m, n \in N}{\exists} \; x = \frac{m}{m+n}\right\}$$

3) Das proposições

$$\underset{X, Y \subset R}{\forall} \quad X \subset Y \Rightarrow \operatorname{int} X \subset \operatorname{int} Y$$
$$\underset{X, Y \subset R}{\forall} \quad X \subset Y \Rightarrow \operatorname{ext} X \subset \operatorname{ext} Z$$
$$\underset{X, Y \subset R}{\forall} \quad X \subset Y \Rightarrow \operatorname{front} X \subset \operatorname{front} Y$$

só uma é verdadeira. Demonstre-a e mostre, por meio de exemplos convenientes, que as outras duas são falsas.

4) Seja $X_1, X_2, X_n, \cdots$ uma sucessão crescente de conjuntos não vazios, todos contidos num mesmo conjunto X, limitado em R.

Para cada $n \in N$, seja ainda $a_n = \inf X_n$ e $b_n = \sup X_n$.

a) Prove que as sucessões de termos gerais a_n e b_n são convergentes e que

$$\lim a_n \leqq \lim b_n .$$

b) Em que caso se verifica a igualdade? Justifique.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 22-1-1969.

5733 — 1) Sejam A e B dois conjuntos totalmente ordenados (com relações de ordem que, em ambos os casos, serão designadas pelo sinal $<$) e φ uma aplicação de A em B tal que

$$\underset{x, y \in A}{\forall} \quad (x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)) .$$

Nestas condições:

a) prove que as proposições «φ é sobrejectiva» e «φ é bijectiva» são equivalentes;

b) prove que, se X é uma parte majorada de A, a imagem $\varphi(X)$ é uma parte majorada de B;

c) poderá haver partes não majoradas de A que tenham por imagem uma parte majorada de B? Justifique.

2) Sendo G a relação em R formada por todos os pares $(x, y) \in R^2$ que verificam a condição

$$x \in Z \wedge x \leqq y < x + 1 ,$$

a) indique o domínio e o contradomínio de G e da relação inversa G^{-1}. Algumas destas relações é uma função? Justifique.

b) Verifique se G é reflexiva, simétrica ou transitiva.

3) Sendo

$$A = \{x : x \in R \wedge x^2 - 1 < 0\}$$
$$B = \{x : x \in R \wedge 0 < x - 3 \leqq |x - 5|\}$$
$$C = \left\{x : \underset{n \in N}{\exists} \; x = 2 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, o derivado, o interior e o fecho do conjunto

$$X = A \cup B \cup C .$$

4) Segundo o princípio de encaixe, se $I_1, \cdots, I_n, \cdots$ é uma sucessão decrescente de intervalos limitados e fechados de R, de comprimentos $c_1, \cdots, c_n, \cdots$ tais que $\lim c_n = 0$, existe um e um só ponto comum a todos os intervalos I_n.

Mostre por meio de exemplos convenientes, que se obteriam proposições falsas se, no enunciado precedente, se suprimisse a hipótese de:

a) a sucessão de intervalos ser decrescente;

b) $\lim c_n = 0$;

c) os intervalos I_n serem fechados.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 16-4-1969.

5734 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} + (-1)^n \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2^n}}\right],$$

$$v_n = \frac{n^{n-1}}{2^{n^2-1}}$$

b) Sendo a_n o termo geral de uma sucessão de termos positivos, com limite $+\infty$, considere as séries:

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}, \sum \frac{1}{n^2+a_n}, \sum \frac{1}{e^{a_n}}$$

e indique, justificando, as que são necessàriamente convergentes ou necessàriamente divergentes e as que podem ser de uma ou outra natureza consoante a sucessão a_n considerada.

5735 — 2) *a*) Para cada $x \in R$, estude o $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos \pi x)^n$, (considere separadamente os valores de x não inteiros, inteiros pares e inteiros ímpares).

b) Sendo g a função definida pela fórmula:

$$g(x) = x + \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\cos \pi x)^n}{2+(\cos \pi x)^n},$$

no conjunto dos pontos x para os quais existe o limite indicado no segundo membro, determine os pontos em que g é contínua, descontínua ou prolongável por continuidade.

5736 — 3) Suponha que f é uma função com derivada contínua em R e que a equação $f'(x)=0$ não tem raízes reais. Enunciando os principais teoremas a que fizer referência prove que:

a) f é estritamente monótona;

b) a função inversa de f é contínua;

c) f é limitada em qualquer intervalo limitado;

d) o contradomínio de f é um intervalo aberto.

Mostre também, por meio de exemplos, que podem ser verdadeiras ou falsas as proposições:

e) a equação $f(x)=0$ tem uma e uma só raíz real;

f) f é limitada (em R).

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 16-4-1969.

5737 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais:

$$u_n = \frac{2^{2n}}{5^n+3}, \quad v_n = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$$

b) Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos, considere as séries:

$$\sum \left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right), \ \sum \frac{a_n}{b_n}, \ \sum a_n b_n,$$

e indique, justificando, as que são necessàriamente convergentes ou necessàriamente divergentes e as que podem ser de uma ou de outra natureza consoante as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ consideradas.

5738 — 2) *a*) Para cada $x \in R$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 \operatorname{sen} \pi x}$$

(considere separadamente valores de x inteiros e não inteiros).

b) Estude, quanto à continuidade lateral, em todos os pontos de R, a função definida pela fórmula:

$$g(x) = C(x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 \operatorname{sen} \pi x},$$

onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqslant x$. Esboce um gráfico aproximado de $g(x)$.

5739 — 3) Suponha que f é uma função contínua em R e que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

a) Justifique cuidadosamente as duas afirmações seguintes:

1.ª Existe um número $a>0$ tal que $|x|>a \Rightarrow f(x)>f(0)$;

2.ª No intervalo $[-a, a]$, f tem mínimo.

b) Utilizando as duas afirmações anteriores, prove que f tem mínimo absoluto (isto é, em todo o seu domínio, R) e, designando esse mínimo por b, indique, justificando, o contradomínio da função.

c) Dê exemplos de duas funções nas condições da função f deste enunciado, uma que atinja o seu mínimo num único ponto, no qual seja diferenciável, outra que atinja o mínimo em dois e só dois pontos, nos quais não seja diferenciável.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 23-4-1969.

5740 — 1) *a*) Determine os limites das sucessões de termos gerais u_n e v_n, sendo

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2}; \ u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{n+1}{n+2}, \quad \forall n \in N \\ v_n = \sqrt{4^n + 3^{2n} + 2^{3n}}. \end{cases}$$

b) Supondo $a_n > 0$, justifique que se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to r \in]0,1[$$

então $a_n \to 0$.

Dê exemplos de sucessões cujo termo geral a_n seja um infinitésimo e tais que:

$$1.^\circ\ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \quad 2.^\circ)\ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

$$3.^\circ)\ \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2.$$

5741 — 2) Seja φ a função definida pela fórmula:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

no conjunto dos pontos $x \in R$ nos quais a série que figura no 2.º membro é convergente.

a) Mostre que o domínio de φ é um intervalo e indique os extremos desse intervalo.

b) Mostre que φ é uma função ímpar e estritamente monótona.

c) Determine o máximo de φ.

d) Obtenha uma equação da tangente à curva $y = \varphi(x)$ no ponto de abcissa 0.

5742 — 3) Sendo I e J dois intervalos de R tais que $I \subset J$, diz-se que uma função f, definida e contínua em I, é contìnuamente prolongável a J, sse existe pelo menos uma função g definida e contínua em J e tal que:

$$f(x) = g(x), \ \forall\, x \in I.$$

Uma tal função g diz-se um prolongamento contínuo da função f ao intervalo J.

a) Das funções definidas no intervalo $]0,1[$, pelas expressões

$$\frac{1}{x-1},\ x - C(x),\ \cos^2\frac{\pi}{2x},\ (e^x - 1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{x},$$

(onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqq x$), indique, justificando, as que são contìnuamente prolongáveis ao intervalo $[0,1]$.

b) Supondo que f é uma função definida e contínua em $]a,b[$ e contìnuamente prolongável a $[a,b]$ prove que:

1.º f é limitada em $]a,b[$;

2.º o prolongamento contínuo de f a $[a,b]$ é único;

3.º f é também contìnuamente prolongável a R, admitindo, porém, uma infinidade de prolongamentos contínuos distintos.

c) Para uma das funções consideradas na alínea *a*) dê dois exemplos de prolongamentos contínuos a R, por forma que num desses exemplos o prolongamento seja uma função ilimitada mas com limite finito quando $x \to +\infty$ e no outro seja uma função limitada mas sem limite quando $x \to +\infty$.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 23-4-1969.

5743 — 1) *a*) Estude, quanto à convergência, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdots\frac{1}{2n} + \cdots$

b) Prove que, se Σa_n é uma série convergente de termos positivos, as séries $\Sigma(-1)^n \cdot a_n$ e Σa_n^2 também são convergentes. Mostre, por meio de exemplos, que qualquer destas duas séries pode ser divergente se Σa_n for uma série convergente, mas de termos não necessàriamente positivos.

5744 — 2) Considere a função φ definida em R pela fórmula:

$$\varphi(x) = [1 + C(x)] \cdot [2x - C(x)],$$

onde $C(x)$ designa o maior inteiro $\leqq x$.

a) Mostre que φ é contínua em R.

b) Mostre que φ não é diferenciável nos pontos $x \in Z$, mas que o é em todos os outros pontos de R, sendo precisamente:

$$\varphi'(x) = 2[1 + C(x)], \quad \forall\, x \notin Z.$$

c) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

Sugestão: para a resolução de algumas das questões anteriores, poderá ser-lhe útil observar que, sendo $k \in Z$, para todo o $x \in [k, k+1[$ se tem

$$\varphi(x) = (1+k)(2x - k).$$

5745 — 3) Sendo a um ponto de acumulação do domínio D de uma função f, diz-se que b é *sublimite* de f no ponto a sse existe uma sucessão x_n de termos em $D \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = b$.

a) Justifique que, se f tem limite (finito ou infinito) quando $x \to a$, esse limite é o único sublimite da função no ponto a.

b) Determine os sublimites no ponto 0, das funções:

$$\frac{|x|}{x}(1+x), \quad \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad D(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x \in Q \\ 0 & \text{se } x \in R \setminus Q.\end{cases}$$

c) Supondo que f é uma função monótona numa vizinhança do ponto a, indique, justificando, quais são os sublimites de f no mesmo ponto.

d Dê exemplos de funções que tenham como únicos sublimites finitos no ponto $a=+\infty$,

1.º — os números 0 e 2;

2.º — todos os números do intervalo $[0,4]$;

3.º — todos os números reais.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 2-6-1969

5746 — 1) Designe por I o intervalo $[0,1]$, no conjunto ordenado R.

a) Admitindo que $X \subset I$, indique, justificando, quais das condições seguintes são *equivalentes* à condição «o supremo de X é menor do que 1»:

1.ª — $1 \notin X$

2.ª — $\underset{x \in X}{\forall} \; \underset{y \in I \setminus X}{\exists} \; y > 2x$

3.ª — $\underset{y \in \operatorname{int} I}{\exists} \; \underset{x \in X}{\forall} \; x \leqq y$.

b) Prove que não é possível dar exemplos de funções f, definidas no intervalo I e verificando alguma das condições seguintes:

1.ª — f é contínua em I e $f\left(\frac{1}{n}\right)=n, \forall n \in N$;

2.ª — f é monótona mas não limitada em I;

3.ª — f é contínua e não constante em I e $f(x)$ é racional, $\forall x \in I$.

Se, em vez de ser $I=[0,1]$ fosse $I=]0,1[$, em quais dos casos anteriores seria possível dar exemplos? Justifique.

5747—2) *a*) Estude a função g, contínua em R e tal que:

$$g(x)=x^2 \cdot \log x^2, \quad \forall x \in R \setminus \{0\}.$$

Esboce o gráfico de g. *b*). É a função desenvolvível em série de Mac-Laurin? Justifique. Obtenha o desenvolvimento de $g(x)$ em série de potências de $x-1$ e indique o raio de convergência dessa série.

b) Determine a área limitada pelo gráfico da função g e pelas tangentes ao mesmo gráfico nos pontos (distintos da origem) em que ele intersecta o eixo das abcissas.

5748—3) *a*) Sendo $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ uma base do espaço vectorial E e φ e ψ duas aplicações lineares de E em si mesmo, prove que, para que φ e ψ sejam permutáveis — isto é, para que se tenha $\varphi[\psi(x)] = \psi[\varphi(x)], \forall x \in E$ — é necessário e suficiente que $\varphi[\psi(e_j)] = \psi[\varphi(e_j)]$, para $j=1,2,\cdots,n$.

Se forem A e B as matrizes correspondentes a φ e ψ (em relação à base referida, suposta ordenada) de que forma se traduz, na álgebra matricial, a permutabilidade de φ e ψ? Justifique.

b) Designe por $C(R)$ o espaço vectorial real formado pelas funções contínuas em R (com as operações usuais) e por θ a aplicacão de $C(R)$ em si mesmo que associa a cada função $f \in C(R)$ a função $g=\theta(f)$ definida pela fórmula:

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \in R.$$

Mostre que θ é uma aplicação linear, cujo contradomínio é o conjunto de todas as funções que têm derivada contínua em R e se anulam no ponto 0. Diga se θ é ou não injectiva e indique, justificando cuidadosamente as respostas, qual é o transformado por θ do subconjunto de $C(R)$ formado pelas funções f que verificam a condição:

$$f(x) \geqq 0, \qquad \forall x \in R.$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 21-7-69.

5749 — 1) Sendo $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ uma base ordenada do espaço vectorial E e k um número natural menor do que n, designe respectivamente por F e G os subespaços de E gerados pelos conjuntos de vectores $\{e_1, \cdots, e_k\}$ e $\{e_{k+1}, \cdots, e_n\}$. Nestas condições, demonstre que:

1.º — $F \cap G = \{0\}$;

2.º — Qualquer que seja $x \in E$ existe um e um só par (y, z), verificando as condições: $y \in F$, $z \in G$ e $x = y + z$.

5750 — 2) Determine os valores reais de a para os quais o sistema de equações:

$$\begin{cases} a x + y + z + a^4 u = 0 \\ x + a y + z + a^3 u = 0 \\ x + y + a z + a^2 u = 0 \\ x + y + z + a u = 0, \end{cases}$$

(nas incógnitas x, y, z e u) é indeterminado e, para cada um desses valores, indique, justificando, o grau de indeterminação do sistema.

5751 — 3) Seja g uma função crescente e limitada em R.

Escolhido arbitràriamente um número real c_1, ponha-se $g(c_1) = c_2$, e duma forma geral,

$$g(c_n) = c_{n+1}, \quad \forall n \in N.$$

Nestas condições:

1.º — Prove que a sucessão de termo geral c_n é convergente (considere separadamente as hipóteses $c_2 \geqslant c_1$ e $c_2 < c_1$).

2.º — Designando por c o limite de c_n prove que, se g é contínua no ponto c, a equação $g(x) = x$ tem pelo menos uma raíz real.

5752 — 4) Qual é o maior valor que pode assumir o volume de um cilindro circular recto inscrito numa superfície esférica de raio r? Prove que o valor encontrado é realmente o máximo.

5753 — 5) Seja f uma função definida e majorada no intervalo $I = [a, b]$ $(a, b \in R,\ a < b)$ e, para todo o $x \in I$, seja $\varphi(x)$ o supremo de f no intervalo $[a, x]$:

$$\varphi(x) = \sup_{t \in [a,x]} f(t), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Das proposições seguintes, prove as que são verdadeiras e mostre, por meio de exemplos, que as restantes são falsas:

1.º — Para que se tenha $\varphi = f$ é necessário e suficiente que f seja crescente em I.

2.º — φ é integrável em I, mesmo que f o não seja e, no caso de f ser integrável em I, tem-se: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx$.

3.º — Se φ é contínua em I, f também o é.

Indique ainda, justificando a resposta, uma condição (a impor a f) necessária e suficiente para que φ seja constante em I.

5754 — 6) Calcule o comprimento do arco de curva definido pelas relações:

$$y = 1 - \log \cos x$$

e

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 24-7-69.

5755 — 1) Sejam $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}$ vectores de um espaço vectorial E, tais que:

1.º) $u_1, u_2, \cdots, u_k$ são linearmente independentes;

2.º) $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_{k+1}$ são linearmente dependentes.

Nestas condições, prove que u_{k+1} pode exprimir-se, de forma única, como combinação linear de

$$u_1, u_2, \cdots, u_k.$$

Se φ for uma aplicação linear de E noutro espaço vectorial F, indique, justificando, qual das proposições seguintes é necessàriamente verdadeira:

1.ª — Os vectores $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_k)$ são linearmente independentes;

2.ª — Os vectores $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \cdots, \varphi(u_k), \varphi(u_{k+1})$ são linearmente dependentes.

5756 — 2) Sendo p um número natural, calcule a área limitada pelos gráficos das funções f e g, contínuas no intervalo $[0, +\infty[$ e tais que

$$f(x) = x^p \cdot \log x \ \text{ e } \ g(x) = x^{p+1} \cdot \log x, \qquad \forall x > 0.$$

5757 — 3) Prove que, se uma série de potências de x é absolutamente convergente no ponto $\alpha > 0$, converge também sbsolutamente em qualquer ponto x tal que $|x| \leqslant \alpha$. Admitindo apenas que a série é convergente no ponto α, para que valores de x poderá ainda garantir-se a convergência absoluta da série? Justifique.

Se as séries $\Sigma a_n x^n$ e $\Sigma b_n x^n$ tiverem o mesmo raio de convergência e se, num dos extremos do intervalo de convergência, uma das séries for convergente e a outra divergente, qual será o raio de convergência da série $\Sigma (a_n + b_n) x^n$? Justifique.

5758 — 4) Recorrendo ao desenvolvimento de MAC-LAURIN da função $\operatorname{sen} x$, calcule uma aproximação, a menos de $0,01$, do integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Indique, justificando, se se trata de uma aproximação por excesso ou por defeito.

5759 — 5) Seja f uma função definida em $I=[a,b]$ e $d=\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ uma decomposição deste intervalo; supondo $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, designa-se por variação de f, relativa à decomposição d, o número:

$$V_d = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Diz-se que f é uma função de variação limitada em I sse existe um número k tal que, qualquer que seja a decomposição d de I, se tem $V_d < k$.

1.° — Prove que qualquer função monótona em $I=[a,b]$ é uma função de variação limitada nesse intervalo.

2.° — Prove que, se f é diferenciável em $[a,b]$ e se f' é uma função limitada no mesmo intervalo, então f é uma fuução de variação limitada em $[a,b]$. (Utilize o teorema de LAGRANGE, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$).

5760 — 6) Mostre que o gráfico da função definida em $R\setminus\{0\}$ pela fórmula:

$$f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$$

tem uma assímptota e obtenha uma equação dessa assímptota.

Enunciados dos n.os 5724 a 5760 de J. Campos Ferreira

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — ANÁLISE INFINITESIMAL II — (1.ª chamada) — 11-6-69.

I

5761 — 1) Defina espaço compacto e prove que toda a bijecção contínua dum espaço compacto num espaça separado é um homeomorfismo.

2) Defina espaço métrico completo e prove que todo o espaço métrico compacto é completo.

3) *a*) Prove que um espaço topológico E é conexo sse toda a parte própria não vazia $A\subset E$ tem fronteira não vazia.

b) Mostre que os únicos conjuntos conexos da recta racional Q são o vazio e os conjuntos singulares.

II

5762 — 1) Zeros duma função holomorfa.

2) seja $\mathcal{H}$ o espaço das funções complexas definidas e holomorfas em $\mathbf{C}$ e ponhamos, para cada $f\in\mathcal{H}$,

$$\|f\| = \sup_{|z|=1} |f(z)|.$$

Prove que:

a) $\|\cdot\|$ é uma norma sobre $\mathcal{H}$.

b) Uma série $\Sigma a_n z^n$, $a_n \in \mathbf{C}$, converge no espaço normado $\mathcal{H}$ sse o seu raio de convergência é $+\infty$. Deduza daí que $\mathcal{H}$ não é completo.

3) Prove que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x(x^2+\lambda^2)} dx$ é absolutamente convergente para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ e calcule o seu valor em função de λ.

F. C. L. — ANÁLISE INFINITESIMAL II — (2.ª chamada) — 25-6-69.

I

5763 — 1) Continuidade uniforme em espaços métricos.

2) Considere um espaço métrico E em que toda a bola fechada é compacta.

Prove que:

a) E é completo;

b) todos os fechados e limitados são compactos.

3) Defina espaço conexo e conjunto conexo.

Prove que a união de dois conjuntos conexos de intersecção não vazia é um conjunto conexo. Generalize para uma família qualquer de conjuntos conexos.

II

5764 — 1) Série de Laurent. Pontos singulares de funções holomorfas.

2) Seja $f(z)$ uma função não identicamente nula definida e holomorfa em $\mathbf{C} - \{0\}$. Prove que, se para todo $\delta > 0$ existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tal que $0 < |z_0| < \delta$ e $f(z_0) = 0$, então a origem é uma singularidade essencial de $f(z)$.

3) Mostre que $\dfrac{\operatorname{sen} \lambda x}{x(1+x^2)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ é somável (como função de x) sobre $\mathbf{R}$ e calcule pelo método dos resíduos uma expressão de

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x(1+x^2)} dx .$$

Mostre, aproveitado o resultado anterior que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+x^2} dx = \pi e^{-(\lambda)}$$

F. C. L. — Análise Infinitesimal II — (2.ª chamada) — 21-7-69.

I

5765 — *a*) Defina seminorma sobre um espaço vectorial E (real ou complexo) e indique como pode definir uma topologia sobre E a partir de uma seminorma. Prove que tal topologia é separada sse a seminorma é uma norma.

b) Prove que, num espaço separado, a intervenção de um conjunto compacto com um conjunto fechado é um conjunto compacto. Mostre, com um exemplo, que a propriedade não é neceesàriamente verdadeira se o espaço não é separado.

c) Prove que num espaço métrico a distância entre um compacto e um fechado disjuntos é > 0.

II

5766 — *a*) Pontos singulares duma função holomorfa.

b) Prove que se $f(z)$ possui um pólo de ordem 1 na origem, $e^{f(z)}$ tem uma singularidade essencial neste ponto.

III

5767 — *a*) Prove, com base no critério de derivabilidade do integral paramétrico (Lebesgue) que a função

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x^2+\lambda^2} dx , \quad \lambda \in]0, +\infty[,$$

é diferenciável.

b) Calcule pelo método dos resíduos, $\varphi'(\lambda)$.

Enunciados de V. Ferreira

Université Libre de Bruxelles — Faculté des Sciences Appliquées — Algèbre Supérieure — **1969.**

5768 — 1. Soit N une matrice carrée nilpotente (c'—à—d il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $N^r = 0$). Si on pose $M = I + N + N^2 + N^3 + \cdots$.

1) Calculer $(I - N) M$.

2) En déduire que $I - N$ est inversible; que vaut $(I - N)^{-1}$?

3) Application.

On donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calculer A^{-1} (mettre A sous la forme $I - N$).

R: 1) $(I - N) M = (I - N)(I + N + N^2 + \cdots + N^{r-1})$
$= I + N + N^2 + \cdots + N^{r-1} -$
$- (N + N^2 + \cdots + N^{r-1})$
$= I .$

2) $(I - N)^{-1} = M .$

3) $A = I - N \quad \rightarrow N = I - A$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^4 = \begin{pmatrix} & & \\ & O & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (I - N)^{-1} = I + N + N^2 + N^3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & I & \\ & & \end{pmatrix}.$$

5769 — 2. Résoudre et discuter le système

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases} \quad \text{avec } a \in \mathbf{R}.$$

R.: 2 — *Th. Fontené-Rouché*

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a-1)^2.$$

1^er cas

$$(a+2)(a-1) \neq 0$$

$\rightarrow$ *Cramer* $\rightarrow$ *une solution*

$$\begin{cases} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} (a+2)(x+y+z) &= 3 \\ x+y+z &= \frac{3}{a+2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cdots\cdots = 1 \\ \cdots\cdots = 1 \\ \cdots\cdots = 1 \\ x+y+z = \dfrac{3}{a+2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a-1)\,x = 1 - \dfrac{3}{a+2} \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

$$\rightarrow (a-1)\,x = (a-1)\,y = (a-1)\,z = 1 - \frac{3}{a+2}$$

comme

$$(a-1) \neq 0 \rightarrow x = y = z = \frac{a+2-3}{(a-1)(a+2)} =$$

$$= \frac{a-1}{(a-1)(a+2)} = \frac{1}{a+2}.$$

2^ème cas

$$a = -2$$

$$\rightarrow \textit{système de rang } 2 \textit{ car} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -8 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 2 \neq 0$$

il y a un seul déterminant caractéristique

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

déterminant caractéristique non nul $\Longrightarrow$ *pas de solution.*

3^ème cas

$$a = 1$$

$\rightarrow$ *3 équations identiques* $x + y + z = 1$

$\rightarrow$ *on fixe arbitrairement les valeurs de deux inconnues (les non-principales) et on en déduit la valeur de l'inconnue principale*

$\rightarrow$ *remarque: le rang de la matrice est 1.*

5770 — 3. *a*) Démontrer que si deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont telles que pour tout n $a_n \leqslant b_n$ alors $\lim\limits_n a_n \leqslant \lim\limits_n b_n$ si ces deux limites existent.

b) Montrer qu'une suite $\{a_n\}$ converge vers 0 si et seulement si il existe une suite $b_n \geqslant 0$ telle que $|a_n| \leqslant b_n$ et $b_n \to 0$.

5771 — 4. Etant donné la fonction $f(x) = x^3 + \sin x$.

a) Ecrire le développement de Taylor d'ordre 2 de cette fonction au voisinage du point $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Développer $f(2x)$ en puissances successives de $(x-1)$, jusque et y compris $(x-1)^4$.

c) Calculer, à l'aide du développement de Mac Laurin $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{e^x}$.

R.: 4 — $f(x) = x^3 + \sin x$

a) $f'(x) = 3x^2 + \cos x$

$f''(x) = 6x - \sin x$

$f'''(x) = 6 - \cos x$

au point $x = \frac{\pi}{2}$

$\to = 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$

$\to = \frac{3\pi^2}{4}$

$\to = 6 - \frac{\pi}{2} - 1$

$\to = 0$.

5772 — 5. On considère la suite de fonctions $f_n(x) = e^{x-n}$ (n entier positif).

a) Montrer que sur tout intervalle compact $[a, b]$ $\{f_n\}$ converge uniformément vers 0.

b) La suite f_n converge-t-elle vers 0 uniformément sur $\mathbf{R}$?

R.: 5 — a) *Si* $x \in [a, b]$ *on a* $e^{x-n} < e^{b-n}$

— *ainsi la suite de fonctions* f_n *est majorée sur* $[a, b]$ *par une suite numérique qui converge vers* 0*; il en résulte que la suite de fonctions converge uniformément vers* 0

— *en effet à tout* $\varepsilon > 0$ *on peut associer* N *tel que*

$$n \geqslant N \Rightarrow e^{b-n} < \varepsilon$$

— *a fortiori on a alors* $\forall x \in [a, b] : e^{x-n} < \varepsilon$; *le nombre* N *est bien indépendant de* x, *il ne dépend que de* ε *et de* b.

b) — *Quel que soit* n *on a* $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} e^{x-n} = \infty$; *la suite* f_n *ne peut donc pas converger uniformément vers* 0 *sur* $\mathbf{R}$, *car sinon* $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)|$ *devrait être fini et tendre vers* 0.

Enunciados e resoluções de J. M. Teixeira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

178 — XIIe Congrès Internacional d'Histoire des Sciences — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard — Paris.

A União Internacional de História e de Filosofia da Ciência na sua assembleia geral de 1965 quando do XI Congresso Internacional de História da Ciência realizado na Polónia encarregou o Comité nacional francês de história e de filosofia da ciência de organizar o congresso seguinte.

Este realizou-se em Paris no Conservatório Nacional das Artes e Ofícios nos dias 25 a 31 de Agosto de 1968.

Os trabalhos dos congressistas foram distribuídos entre as sessões realizadas em onze secções.

Para uso dos congressistas já foi publicado pela *Revue de Synthese* um volume que reuniu todos os relatórios. Na edição A. Blanchard estes estão incluídos num único volume, o **Tomo 1A** das Actas do Congresso. O **Tomo 1B** contém os complementos destes relatórios, as discussões às quais eles deram lugar, o discurso de abertura feito pelo Prof. Jean Rostand, a síntese dos trabalhos do Congresso do Prof. Lucien Plantefol, as conferências plenárias dos Profs. Marcel Florkin e Alistain Crombie, e a lista dos congressistas.