Um teorema sobre a Teoria da Medida

por O. T. Alas

Seja X um espaço topológico de HAUSDORFF e indiquemos por $A(X)$ o anel gerado pela topologia sobre X.

DEFINIÇÃO. Uma medida positiva μ sobre $A(X)$ satisfaz a condição (H) se:

1) $\mu(\{x\}) = 0$, $\forall x \in X$;
2) $\mu(Z) > 0$, para todo aberto Z, não vazio;
3) $\mu(Y) = \inf\{\mu(Z) \mid Y \subset Z$ e Z é aberto$\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subset Y$ e K é compacto$\}$, para todo $Y \in A(X)$.

O objectivo desta nota é estudar em que condições existe uma medida μ sobre $A(X)$, verificando a condição (H), no caso em que X é um grupo topológico localmente compacto.

TEOREMA. *Seja* X *um espaço topológico regular. Se existe uma medida positiva sobre* A(X), *satisfazendo a condição* (H), *então todo o recobrimento aberto de* X, *localmente finito, admite um sub-recobrimento enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos, por absurdo, que existe $(Z_i)_{i \in I}$, recobrimento aberto de X, localmente finito, que não admite sub-recobrimento enumerável. Usando o teorema de ZORN, é fácil mostrar que existe uma família de abertos, $(V_j)_{j \in J}$, tal que

1) $J \subset I$ e $\phi \neq \overline{V}_j \subset Z_j$, $\forall j \in J$;
2) $\overline{V}_j \cap \overline{V}_k = \phi$, $\forall j, k \in J$, $j \neq k$;
3) o cardinal de J é maior ou igual a $\aleph_1$.

Fixemos um elemento $(x_j)_{j \in J}$ pertencente a $\prod_{j \in J} V_j$ e consideremos o conjunto $F = \{x_j \mid j \in J\}$. F é um subconjunto fechado de X; além disso, se $K \subset F$ e K é compacto, então K é finito.

Seja μ uma medida positiva sobre $A(X)$, verificando a condição (H). Temos que $\mu(F) = 0$. Por outro lado, se $F \subset Z$ e Z é aberto, então $\mu(Z) = \infty$, pois existe um número natural $m \geq 1$, tal que o conjunto $\{j \in J \mid \mu(Z \cap V_j) \geq 1/m\}$ não é enumerável. Mas, então verifica-se $0 = \mu(F) = \infty$, o que é absurdo. Fica assim demonstrado o teorema.

COROLÁRIO. *Seja* G *um grupo topológico localmente compacto, separado e não discreto. Então, existe uma medida positiva sobre* A(G), *verificando a condição* (H), *se e sòmente se* G *é σ-compacto.*

DEMONSTRAÇÃO. Se G é um grupo topológico localmente compacto, existe uma classe, D, de subespaços abertos, σ-compactos, dois a dois disjuntos, tal que $G = \bigcup_{Y \in D} Y$. ([2])

Ora, se existe uma medida positiva sobre $A(G)$, verificando a condição (H), pelo teorema anterior devemos ter que D é enumerável, donde G é σ-compacto.

Suponhamos, agora, que G é σ-compacto. Indiquemos por B o σ-anel sobre G gerado pela classe dos subconjuntos compactos de G. ANDRÉ WEIL [1] mostrou que existe sobre B uma medida (a medida de HAAR), tal que a sua restrição ao conjunto $A(G)$ verifica a condição (H). (Note-se que todo subconjunto fechado de G é reunião enumerável de subconjuntos compactos de G).

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRÉ WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Hermann-Paris, 1938.
[2] J. L. KELLEY, *Topologia general.* EUDEBA, 1962.
[3] P. R. HALMOS, *Measure theory.* Van Nostrand, 1964.