Une remarque sur un théorème de la théorie des semi-groupes fortement continus d'opérateurs sur un espace de Banach

par J. P. Carvalho Dias (*)

Soit X un espace de BANACH de norme $\|\cdot\|$, $L(X)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans X et $\overline{R}_+ = \{t \in R \mid t \geq 0\}$. Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur X est une famille $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$, $S(t) \in L(X)$, telle que :

(1) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \cdot S(t_2)$, $\forall\, t_1, t_2 \in \overline{R}_+$.

(2) $S(0) = I$, application identité de X.

(3) $\lim_{t \to 0^+} S(t)x = x$, $\forall\, x \in X$.

Les semi-groupes ainsi définis sont particulièrement utilisés dans la théorie des équations d'évolution linéaires de la physique (cf., par exemple, [3]).

Le but de cette note est de démontrer directement le théorème suivant qui se présente habituellement de démonstration assez compliquée :

THÉORÈME. *Soit* $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$ *un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur* X. *Alors il existe des constantes* $M \geq 0$ *et* $\delta > 0$ *telles que*

(4) $\|S(t)\| \leq M$, $\forall\, t \in [0, \delta]$, *où*

$$\|S(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|S(t)x\|.$$

Ce théorème étant établi il en découle le :

COROLLAIRE. *Il existe une constante* $w \geq 0$ *telle que*

(5) $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall\, t \in \overline{R}_+$.

De plus, pour tout $x \in X$ *la fonction* $S(t)x$ *est continue de* $\overline{R}_+$ *dans* X.

Démonstration du corollaire :

Soit $t \in \overline{R}_+$. Il existe un entier $n \geq 0$ et un τ tel que $0 \leq \tau < \delta$ tels que $t = n\delta + \tau$ ce qui entraîne, par (1) et (4), $\|S(t)\| \leq \|S(\delta)\|^n \|S(\tau)\| \leq M^{n+1}$. Donc,

$$\|S(t)\| \leq Me^{wt} \text{ avec } w = \log M/\delta \text{ si } M \geq 1 \text{ et } w = 0 \text{ si } M < 1.$$

Soit maintenant $x \in X$. Il vient, si $t_2 \geq t_1 \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|S(t_2)x - S(t_1)x\| &\leq \\ \leq \|S(t_1)\| \, \|S(t_2 - t_1)x - x\| &\leq \\ \leq Me^{wt_1} \|S(t_2 - t_1)x - x\| &\to 0 \end{aligned}$$

quand $t_2 \to t_1$ ou $t_1 \to t_2$, d'où la continuité de $S(t)x$ en tout $t \in \overline{R}_+$.

Pour démontrer le théorème nous utilisons le lemme suivant qui est un cas particulier d'un théorème de G. MARINESCU (cf. [2], ch. III, § 5, n.º 1) :

(*) Boursier de la Fondation Calouste Gulbenkian.

LEMME. *Soit* B *un espace de* BAIRE (1) *et* $\{f_n\}$ *une suite de fonctions continues de* B *dans* $\overline{R}_+$ *telles que*

(6) $$\forall x \in B, \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) < +\infty.$$

Alors il existe un ouvert non vide A *de* B, *une constante* $M \geq 0$ *et un indice* p *tels que*

(7) $$\sup_{x \in A} f_n(x) \leq M, \forall n \geq p.$$

Démonstration du lemme:

Pour $m, n = 1, 2, \cdots, k = 0, 1, \cdots$, soient $A_{mk} = f_m^{-1}([0, k])$, $A_{nk} = \bigcap_{m \geq n} A_{mk}$. La continuité des f_n entraîne que A_{nk} est fermé dans B et, de plus, (6) implique que $B = \bigcup_{n,k} A_{nk}$. Puisque B est un espace de BAIRE il existe alors un $A_{n_0 k_0}$ dont l'intérieur A est non vide. Le lemme suit avec $M = k_0, p = n_0$.

Ceci étant nous allons démontrer la proposition suivante dont le théorème est un cas particulier:

PROPOSITION. *Soit* X *un espace de* BANACH *de norme* $\|\cdot\|$, $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$ *une famille d'éléments de* L(X) *telle que*

(8) $$\forall x \in X, \exists \lim_{t \to 0} {}_+ S(t)x.$$

Alors il existe des constantes $M \geq 0$ et $\delta > 0$ *telles que*

(9) $$\|S(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \delta].$$

(1) Un espace de BAIRE est un espace topologique où toute réunion dénombrable d'ensembles fermés d'intérieur vide est aussi d'intérieur vide.

Démonstration de la proposition:

Soit $t_n \geq 0$ une suite de limite 0 quand $n \to +\infty$. Posons

$$f_n(x) = \|S(t_n)x\|, n = 1, 2, \cdots.$$

Puisque X est un espace de BAIRE (cf., par exemple, [1], ch. IV, § 4, n.º 3) et on a (8) on peut appliquer le lemme antérieur. Donc, il existe un ouvert non vide A de X, une constante $M_1 \geq 0$ et un indice p tels que

(10) $$\sup_{x \in A} \|S(t_n)x\| \leq M_1, \forall n \geq p.$$

Soit $x_0 \in A$ et considérons l'ouvert $V = x_0 - A$ qui contient 0. (10) entraîne

(11) $$\sup_{x \in V} \|S(t_n)x\| \leq 2M_1, \forall n \geq p.$$

Soit maintenant $B(0, \rho)$ une boule fermée de centre dans l'origine et rayon $\rho > 0$ contenue dans V. Si $\|x\| \leq 1$ on a $\rho x \in B(0, \rho)$ d'où, par (11), on obtient

(12) $$\|S(t_n)\| \leq 2M_1/\rho, \forall n \geq p.$$

Considérons maintenant les intervalles $[0, 1/n], n = 1, 2, \cdots$, et supposons, pour tout n, $S(t)$ non borné dans $[0, 1/n]$. Ceci entraîne l'existence d'une suite $\{t'_n\}$ convergeant vers 0 et telle que $\lim_{n \to +\infty} \|S(t'_n)\| = +\infty$. Or cela est absurde par la première partie de la démonstration.

REFERENCES

[1] J. GARSOUX, *Espaces vectoriels topologiques et distributions.* (Dunod, Paris, 1963).

[2] G. MARINESCU, *Espaces vectoriels pseudo-topologiques et théorie des distributions.* (Berlin, 1963).

[3] K. YOSIDA, *Functional analysis.* (Springer, 1965).