Une remarque sur un théorème de la théorie des semi-groupes fortement continus d'opérateurs sur un espace de Banach

par J. P. Carvalho Dias (*)

Soit X un espace de BANACH de norme $\|\cdot\|$, $L(X)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans X et $\overline{R}_+ = \{t \in R \mid t \geqq 0\}$. Un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur X est une famille $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$, $S(t) \in L(X)$, telle que :

(1) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \cdot S(t_2)$, $\forall\, t_1, t_2 \in \overline{R}_+$.

(2) $S(0) = I$, application identité de X.

(3) $\lim\limits_{t \to 0^+} S(t)x = x$, $\forall\, x \in X$.

Les semi-groupes ainsi définis sont particulièrement utilisés dans la théorie des équations d'évolution linéaires de la physique (cf., par exemple, [3]).

Le but de cette note est de démontrer directement le théorème suivant qui se présente habituellement de démonstration assez compliquée :

THÉORÈME. *Soit* $\{S(t)\}_{t \in \overline{R}_+}$ *un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur* X. *Alors il existe des constantes* $M \geqq 0$ *et* $\delta > 0$ *telles que*

(4) $\|S(t)\| \leqq M$, $\forall\, t \in [0, \delta]$, *où*

$$\|S(t)\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} \|S(t)x\|.$$

Ce théorème étant établi il en découle le :

COROLLAIRE. *Il existe une constante* $w \geqq 0$ *telle que*

(5) $\|S(t)\| \leqq Me^{wt}$, $\forall\, t \in \overline{R}_+$.

De plus, pour tout $x \in X$ *la fonction* $S(t)x$ *est continue de* $\overline{R}_+$ *dans* X.

Démonstration du corollaire :

Soit $t \in \overline{R}_+$. Il existe un entier $n \geqq 0$ et un τ tel que $0 \leqq \tau < \delta$ tels que $t = n\delta + \tau$ ce qui entraîne, par (1) et (4), $\|S(t)\| \leqq \|S(\delta)\|^n \|S(\tau)\| \leqq M^{n+1}$. Donc,

$$\|S(t)\| \leqq Me^{wt} \text{ avec } w = \log M/\delta \text{ si } M \geqq 1 \text{ et } w = 0 \text{ si } M < 1.$$

Soit maintenant $x \in X$. Il vient, si $t_2 \geqq t_1 \geqq 0$,

$$\|S(t_2)x - S(t_1)x\| \leqq$$
$$\leqq \|S(t_1)\| \, \|S(t_2 - t_1)x - x\| \leqq$$
$$\leqq Me^{wt_1} \|S(t_2 - t_1)x - x\| \to 0$$

quand $t_2 \to t_1$ ou $t_1 \to t_2$, d'où la continuité de $S(t)x$ en tout $t \in \overline{R}_+$.

Pour démontrer le théorème nous utilisons le lemme suivant qui est un cas particulier d'un théorème de G. MARINESCU (cf. [2], ch. III, § 5, n.º 1) :

(*) Boursier de la Fondation Calouste Gulbenkian.