Alguns aspectos do problema dos erros em Análise Numérica

por Fernanda Aleixo de Oliveira
Coimbra

1 — É nossa intenção focar algumas das possibilidades que a Análise intervalar (¹) fornece para controlar o problema dos erros em Análise Numérica.

Depois de ter sido elaborado um determinado processo numérico para resolver um certo tipo de problemas, poderemos encará-lo só como um modelo, pois a realidade dos cálculos afasta-se sempre do resultado exacto. Não só tomamos dados inexactos como ao longo dos cálculos o número de inexactidões vai aumentando. É realmente um facto que o rigor matemático é bastante enfraquecido quando o problema se reduz a um problema aritmético.

O uso de computadores torna o problema mais agudo, pois o estudo de propagação dos erros em processos numéricos de milhões de cálculos torna-se extremamente complicado.

A Análise Intervalar consegue resolver ao mesmo tempo e automàticamente, fazendo uso de subrotinas adequadas, os vários problemas de erros: de truncatura, de arredondamentos, de inexactidão dos dados iniciais de um problema e propagação dos vários erros ao longo do processo numérico.

Baseia-se essencialmente no conceito de Intervalo e numa Álgebra adequada.

A importância do conceito de Intervalo é imediata — ao calcular, por exemplo $\sqrt{2}$, por meio de um algoritmo qualquer que nos forneça a sucessão de números: 1, 1.4, 1.41, etc, e que nos permita concluir que cada elemento desta sucessão nos informa que o elemento seguinte será obtido acrescentando ao anterior mais um algarismo à sua direita, algarismo esse que vai estar entre 0 e 9, teremos: o elemento 1 diz-nos que $\sqrt{2}$ estará no intervalo $[1, 2]$, o elemento 1.4 leva-nos a considerar o intervalo $[1.4, 1.5]$, o elemento 1.41 conduz-nos ao intervalo $[1.41, 1.42]$, etc.

Cada intervalo considerado contém a solução exacta do nosso problema.

Ao descrever matemàticamente um problema físico, por exemplo o movimento de um corpo, seríamos mais exactos se, em vez de apresentar o problema nos termos usuais «o corpo A está no ponto X quando o tempo é T», o exprimíssemos fazendo uso de intervalos: «o corpo A está no intervalo $[x_1, x_2]$ quando o tempo está em $[t_1, t_2]$».

A truncatura de processos infinitos pode ser controlada por meio de Análise Intervalar com relativa facilidade, em muitos casos.

Faremos só uma breve introdução à Álgebra com Intervalos e apresentaremos uma aplicação da Análise Intervalar às equações diferenciais.

2 — Consideremos $\mathfrak{R}$ o corpo dos números reais munido da usual relação de ordem $<$.

(¹) Tradução da expressão inglesa «Interval Analysis».

Definição 1. Designaremos por intervalo $_{\ast}X_{\ast} = [x_1, x_2]$ o conjunto

$$\{x : x_1 \leq x \leq x_2, \quad x, x_1, x_2 \in \mathfrak{R}\}.$$

Usaremos a notação $_{\ast}X$ para designar x_1 (extremo inferior do intervalo) e $X_{\ast}$ para designar x_2 (extremo superior do intervalo).

No caso de $x_1 = x_2$ chamaremos a $_{\ast}X_{\ast}$ intervalo degenerado. Representaremos por $\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$ o conjunto formado por todos os $_{\ast}X_{\ast}$ definidos anteriormente e identificaremos cada real x com o intervalo degenerado $[x, x]$.

Com a notação $_{\ast}X_{\ast} \subset {_{\ast}Y_{\ast}}$ significaremos que para $_{\ast}X_{\ast} = [x_1, x_2]$ e $_{\ast}Y_{\ast} = [y_1, y_2]$ se tem

$$x_1 \geq y_1 \quad \text{e} \quad x_2 \leq y_2 .$$

Teorema 1: *O conjunto* $\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$ *formado por elementos* $_{\ast}X_{\ast}$ *é um conjunto parcialmente ordenado pela relação* $\subset$:

a) $_{\ast}X_{\ast} \subset {_{\ast}X_{\ast}}$

b) $_{\ast}X_{\ast} \subset {_{\ast}Y_{\ast}}$ *e* $_{\ast}Y_{\ast} \subset {_{\ast}Z_{\ast}} \Rightarrow {_{\ast}X_{\ast}} \subset {_{\ast}Z_{\ast}}$

c) $_{\ast}X_{\ast} \subset {_{\ast}Y_{\ast}}$ *e* $_{\ast}Y_{\ast} \subset {_{\ast}X_{\ast}} \Rightarrow {_{\ast}X_{\ast}} = {_{\ast}Y_{\ast}}$ $(x_1 = y_1$ *e* $x_2 = y_2)$.

A alínea *b*) tem importância fundamental no Cálculo Numérico.

Definamos em $\mathfrak{I}(\mathfrak{R})$ as operações aritméticas $+$, $-$, $\times$, $/$, usando o símbolo $\ast$ para indicar qualquer delas:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &_{\ast}X_{\ast} \ast {_{\ast}Y_{\ast}} = {_{\ast}Z_{\ast}} \\ &\text{com} \\ &_{\ast}Z_{\ast} := \{x \ast y : x \in {_{\ast}X_{\ast}} \wedge y \in {_{\ast}Y_{\ast}}\} \end{aligned}$$

com a condição de $0 \notin {_{\ast}Y_{\ast}}$ para a divisão.

De (1) fàcilmente se conclui que se $_{\ast}X_{\ast} \subset {_{\ast}T_{\ast}}$ e $_{\ast}Y_{\ast} \subset {_{\ast}R_{\ast}}$ então

$$(2) \qquad \begin{aligned} &_{\ast}X_{\ast} + {_{\ast}Y_{\ast}} \subset {_{\ast}T_{\ast}} + {_{\ast}R_{\ast}} \\ &_{\ast}X_{\ast} - {_{\ast}Y_{\ast}} \subset {_{\ast}T_{\ast}} - {_{\ast}R_{\ast}} \\ &_{\ast}X_{\ast} \times {_{\ast}Y_{\ast}} \subset {_{\ast}T_{\ast}} \times {_{\ast}R_{\ast}} \\ &_{\ast}X_{\ast} \,/\, {_{\ast}Y_{\ast}} \subset {_{\ast}T_{\ast}} \,/\, {_{\ast}R_{\ast}} \qquad (0 \notin {_{\ast}R_{\ast}}). \end{aligned}$$

Diremos que as operações aritméticas com intervalos gozam de *inclusão monotónica* por obedecerem às relações (2).

Um equivalente conjunto de definições de carácter algébrico, mas referidas aos extremos inferior e superior dos intervalos será:

1) $[x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$

2) $[x_1, x_2] - [y_1, y_2] = [x_1 - y_2, x_2 - y_1]$

3) $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2] = [z_1, z_2]$ com $z_1 = \min(x_1 \times y_1, x_1 \times y_2, x_2 \times y_1, x_2 \times y_2)$ e $z_2 = \max(x_1 \times y_1, x_1 \times y_2, x_2 \times y_1, x_2 \times y_2)$

4) $[x_1, x_2] / [y_1, y_2] = [x_1, x_2] \times [1/y_2, 1/y_1]$ supondo-se $0 \notin [y_1, y_2]$.

Teorema 2. *Se* $F(x_1, x_2, \cdots x_n)$ *designar uma função racional nos* x_i *segue-se:*

Dado $_{\ast}X_{1\ast}, \cdots, {_{\ast}X_{n\ast}}$, *se* $F({_{\ast}X_{1\ast}}, \cdots, {_{\ast}X_{n\ast}})$ *tem sentido e*

$$_{\ast}X'_{1\ast} \subset {_{\ast}X_{1\ast}}, \; {_{\ast}X'_{2\ast}} \subset {_{\ast}X_{2\ast}}, \; \cdots, \; {_{\ast}X'_{n\ast}} \subset {_{\ast}X_{n\ast}}$$

então

$$(3) \qquad \begin{aligned} &F({_{\ast}X'_{1\ast}}, {_{\ast}X'_{2\ast}}, \cdots, {_{\ast}X'_{n\ast}}) \subset \\ &\subset F({_{\ast}X_{1\ast}}, {_{\ast}X_{2\ast}}, \cdots {_{\ast}X_{n\ast}}). \end{aligned}$$

De (1) e das relações (2) se conclui (3).

Se em (3), $_{\ast}X'_{1\ast}, {_{\ast}X'_{2\ast}}, \cdots, {_{\ast}X'_{n\ast}}$ designarem intervalos degenerados, isto é, números reais, o valor de $F({_{\ast}X'_{1\ast}}, \cdots, {_{\ast}X'_{n\ast}})$ será um número real contido no intervalo $F({_{\ast}X_{1\ast}}, \cdots \cdots, {_{\ast}X_{n\ast}})$.

Chamaremos largura do intervalo $_{\ast}X_{\ast} = [x_1, x_2]$ ao número real $x_2 - x_1$ e designá-la-emos por $w({_{\ast}X_{\ast}})$.

Atendendo às definições acima apresentadas para as operações, poderemos organizar subrotinas para qualquer computador. Poderemos também fornecer ao computador subrotinas que o tornem apto a controlar os erros de arredondamento, levando-o a arredondar para a esquerda no extremo inferior e para a direita no extremo superior do intervalo, no fim de cada operação. Necessita ainda o computador de subrotinas adequadas para controlar os erros de arredondamento provenientes da mudança de números para diferentes bases de modo que o resultado final dum problema nos apareça sob a forma de um intervalo que contém a solução exacta do problema.

Para além de uma Aritmética com intervalos que nos fornece um controle automático dos erros em qualquer computador digital, a Análise Intervalar oferece diferentes possibilidades de atacar problemas como a resolução de sistemas de equações diferenciais, cálculo de integrais, cálculo de raízes de equações algébricas, resolução de equações integrais, inversão de matrizes, etc.

Alguns destes problemas foram já abordados, mas há ainda um vasto campo para investigação dentro do campo de aproximação numérica.

3 — Vejamos uma aplicação da Análise Intervalar às equações diferenciais.

Consideremos a equação diferencial

$$(4)\qquad \begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(a) &= y_0 \end{aligned}$$

com $f(x, y(x))$ definida e contínua em $A = A_1 \times B_1$ e $A_1 = [a_1, a_2]$,

$$B_1 = [b_1, b_2],\ a_i, b_i \in \mathfrak{R},\ i = 1, 2,$$

$$\text{e}\quad x \in A_1, y(x) \in B_1 .$$

Tomemos um polinómio

$$\langle P_n \rangle (x) = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i \rangle (x-a)^i$$

de grau n, cujos coeficientes sejam intervalos $\langle a_i \rangle$ e tal que

$$f(x, y(x)) \in \langle P_n \rangle (x) \quad \text{para} \quad x \in A_1 .$$

Há várias possibilidades de realização para $\langle P_n \rangle (x)$. Ver [4], [6].

Em geral toma-se um polinómio de grau zero ou grau 1.

É sabido que a solução de (4) se pode obter por meio da equação integral

$$(5)\qquad y(x) = y_0 + \int_a^x f(x, y(x))\, dx .$$

Usando $\langle P_n \rangle (x)$ teremos [4]

$$(6)\qquad y(x) \in \langle Y^{(0)} \rangle (x) = y_0 + \int_a^x \langle P_n \rangle (x)\, dx .$$

Notemos que

$$w(\langle Y \rangle^{(0)}(x)) \leq w(\langle P_n \rangle (x))\,(x-a)$$

desde que consideremos em (6) valores de $x \in A_2 \subset A_1$ para os quais $(x-a) < 1$.

Iremos em seguida melhorar $\langle Y \rangle^{(0)}(x)$.

Suponhamos que é possível obter uma função $F(x, \langle Y \rangle^{(0)}(x))$, [4], tal que para $x \in A_1$

(7)

a) $F(x, y(x)) \equiv f(x, y(x))$,

b) $F(x, \langle Y \rangle^{(0)}(x)) \supset f(x, y(x))$,

c) para $\langle Y' \rangle (x), \langle Y'' \rangle (x) \subset \langle Y \rangle (x)$ e $\langle Y' \rangle (x) \subset \langle Y'' \rangle (x)$ a função F satisfaça a inclusão monotónica, i. e.

$$F(x, \langle Y' \rangle (x)) \subset F(x, \langle Y'' \rangle (x)) .$$

Se $f(x, y(x))$ for uma função racional em x e y, obtem-se $F(x, \langle Y\rangle^{(0)}(x))$ pela simples substituição de y por $\langle Y\rangle^{(0)}(x)$ em $f(x, y(x))$. Substituindo em (6) teremos

$$(8) \qquad y(x) \in \langle Y\rangle^{(1)}(x) = y_0 + \int_a^x F(x, \langle Y\rangle^{(0)}(x))\, dx \qquad x \in A_1 .$$

Novamente

$$w(\langle Y\rangle^{(1)}(x)) \leq w(F(x, \langle Y\rangle^{(0)}(x))\,(x-a) .$$

$$\text{Se } \langle Y\rangle^{(1)}(x) \subset \langle Y\rangle^{(0)}(x)$$

de (7) — c) e (6) virá $w(\langle Y\rangle^{(2)}(x)) \leq w(\langle Y\rangle^{(1)}(x))$.

Poderemos assim obter uma sucessão de soluções intervalos $\langle Y\rangle^{(0)}(x)$, $\langle Y\rangle^{(1)}(x)$, $\cdots$ obedecendo a

a) $y(x) \in \langle Y\rangle^{(n)}(x)$

b) $w(\langle Y\rangle^{(n)}(x)) < w(\langle Y\rangle^{(n-1)}(x))$.

Suponhamos que $F(x, \langle Y\rangle^{(0)}(x))$ satisfaz à condição de Lipschitz com a constante L. Teremos

$$w(F(x, \langle Y\rangle^{(0)}(x)) < L\, w(\langle Y\rangle^{(n)}(x))$$

e em (8)

$$w(\langle Y\rangle^{(1)}(x)) < L(x-a)\, w(\langle Y\rangle^{(0)}(x)) .$$

Para n iterações teremos

$$w(\langle Y\rangle^{(n)}(x)) < (L(x-a))^n\, w(\langle Y\rangle^{(0)}(x)) .$$

O processo numérico será convergente para a solução de (4), desde que $L(x-a) < 1$.

Para o cálculo dos integrais deverão usar-se os métodos de aproximação numérica de Análise Intervalar para integrais e em todos os cálculos deverá utilizar-se Aritmética de Intervalos.

O presente trabalho foi escrito quando a autora era bolseira da Fundação Calouste Gulbenkian.

REFERÊNCIAS

[1] Hansen, E., *Interval arithmetic in matrix computations*, part I, J. Soc. Indust. Appl. Math., series B, 2 (1965), pag. (308-320).

[2] Krückeberg, F., *Numerische Intervallrechung und deren Anwendung*. II M, Bonn, 1966.

[3] ———, *Ordinary Differential Equations*, Vortrag, Oxford, 1968.

[4] Moore, R. E., *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.

[5] Nickel, *Über die Notwendigkeit einer Fehlerschrankenarithmetik für Rechenautomaten*. Numerische Mathematik, vol. 9, n.º 1, 1966.

[6] Schwanenberg, P., *Zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Anfangswertmengen*, Bonn, 1968.