O que é a Análise Não-Standard? (I)

por A. J. Franco de Oliveira (*)

1. Introdução.

A *Análise Não-Standard* (ANS, daqui em diante (1)) é essencialmente um *método* matemático, método novo com características originais, baseado em alguns resultados fundamentais da *Teoria dos Modelos*, ramo recente (uma vintena de anos) da Lógica Matemática, em pleno florescimento. As suas raízes, e também a sua motivação, mergulham, contudo, no passado.

São conhecidas as tentativas (infrutíferas) de fundar o Cálculo Diferencial numa teoria coerente dos Infinitamente Pequenos (Infinitésimos, ou Infinitesimais) e Infinitamente Grandes por LEIBNIZ, NEWTON e sucessores, incluindo o próprio CAUCHY. A Teoria dos Limites, impulsionada por WEIERSTRASS, acabou, porém, por ser preferida à primeira (2). Pois bem, a ANS, inicialmente orientada para esse fim, permite, entre outras coisas, uma formulação consistente e satisfatória do *método dos infinitesimais* (3), e, tal como outras grandes descobertas, são já em grande número e variedade os resultados estabelecidos via ANS, para os quais ainda não tinha sido encontrada solução por métodos «standard». Por outro lado, muitos resultados e teorias clássicas ganharam novo alcance e significação quando interpretados ou reformulados à luz da ANS (4). Na verdade, o método é extensivo a toda a Análise, clássica ou funcional, e poderá ser de grande utilidade em Geometria Diferencial, em disciplinas como Mecânica Analítica, Quântica, e, em geral, na formulação de diversos conceitos da Física. Julgamos não exagerar ao antever uma nova Pedagogia no ensino das noções fundamentais do Cálculo, apoiada nos infinitesimais...

Convém observar desde já, porém, que não há grande novidade nos instrumentos matemáticos (ou Lógicos) em jogo: não há necessidade de nenhum axioma novo da Matemática. Apenas se fez um uso criterioso de resultados conhecidos. Esses resultados é que são extraordinários, em si próprios, e certamente impensáveis na época recuada dos fundadores da Análise moderna. Existe mesmo um processo geral para transcrever toda a demonstração na ANS numa demonstração clássica, «standard». As razões do interesse que tem o novo método são outras: a sua feição intuitiva marcada indica-o particularmente como *método de descoberta*, o que justifica algumas das nossas observações anteriores.

O objectivo deste primeiro artigo é despertar interesse pelo assunto, criar um ambiente de receptividade, indicar algumas leituras básicas indispensáveis. Porque, efectivamente, ainda há (muito) quem olhe com desconfiança estas coisas da Lógica Matemática, da Metamatemática, dos próprios Fundamentos, etc., e outros há que julgam as teorias apenas em função dos seus resultados práticos... Em consequência, a discussão é relativamente informal, para as demonstrações remetemos às notas bibliográficas. Num segundo artigo, desenvolvemos o método e fazemos algumas aplicações. Esperamos igualmente, em artigos de outra índole, proceder à divulgação de alguns conceitos e resultados essenciais da Lógica Matemática, nomea-

(*) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura.

damente da Teoria dos Modelos, que servem de base às investigações e desenvolvimentos actuais.

2. Linguagens formais.

Pressupomos alguma familiariedade com o Cálculo de Predicados Elementar, nos aspectos descritivo-semântico e sintático-axiomático. Para facilitar a leitura, recordamos alguns conceitos e notações, e enunciamos alguns resultados porventura menos conhecidos mas de importância decisiva na formulação do que segue ([5]).

Os sistemas lógicos adoptados hoje em dia para a descrição e formalização das teorias matemáticas são *linguagens formais*, no sentido abaixo indicado, de que é exemplo o Cálculo de Predicados Restringido (ou de 1.ª ordem, por se quantificarem apenas as variáveis). Outro exemplo bastante completo é fornecido por Bourbaki na sua «Théorie des Ensembles». De momento, interessa fixar a noção de *linguagem* (ou *teoria*) *formal de Primeira Ordem,* L, o que se faz comumente especificando as seguintes condições:

A) são dados certos símbolos, chamados *símbolos de* L: (símbolos de) *variáveis* individuais $x_1, x_2, x_3, \cdots$ em quantidade infinita numerável; (símbolos de objectos individuais, ou-) *constantes* individuais $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_\alpha, \cdots$ em quantidade finita ou transfinita; símbolos (de relações, ou-) *relacionais* $A_j^k(,\cdots,)$, $j=1,2,3,\cdots$ (índice de numeração dos símbolos), $k=0,1,2,\cdots$ (índice que indica o número de argumentos); símbolos (de funções, ou-) *funcionais* $f_j^k(,\cdots,)$, $j,k=1,2,3,\cdots$; (símbolos dos) *conectivos* lógicos $\sim$ (negação), $\vee$ (disjunção), $\wedge$ (conjunção), $\Rightarrow$ (implicação), $\Leftrightarrow$ (equivalência); e, finalmente, dos *quantificadores* lógicos $(\forall\ )$ (universal), $(\exists\ )$ (existencial).

Podem ainda considerar-se como símbolos de L os parênteses [e] que desempenham um papel de pontuação.

B) *Regras de formação de termos:* as variáveis e as constantes individuais são termos e, se $\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k$ são termos e $f_j^k(,\cdots,)$ é um símbolo funcional, $f_j^k(\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k)$ é um termo. Não há outros termos além dos determinados por estas regras.

C) *Regras de formação de fórmulas:* se $\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k$ são termos e $A_j^k(,\cdots,)$ é um símbolo relacional, $A_j^k(\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k)$ é uma fórmula, dita *atómica*. Se A é uma fórmula ([6]), $[\sim \mathsf{A}]$ é uma fórmula, e se A e B são fórmulas, $[\mathsf{A} \vee \mathsf{B}]$, $[\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}]$, $[\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}]$, $[\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}]$ são também fórmulas. Se A é uma fórmula em que não ocorrem as expressões «$(\forall \mathsf{x})$», «$(\exists \mathsf{x})$», então $[(\forall \mathsf{x})\mathsf{A}]$ e $[(\exists \mathsf{x})\mathsf{A}]$ são fórmulas. Não há outras fórmulas além destas.

Supomos intuitivamente claro o que se entende por ««$(\forall \mathsf{x})$» ocorre em A», «B ocorre em A», etc. Igualmente supomos conhecida a distinção entre *ocorrência livre* (i. e. não quantificada) e *ocorrência muda* ou *aparente* (i. e. quantificada) de uma variável numa fórmula. Para indicar que numa fórmula A pode ocorrer livre a variável x usamos a notação $\mathsf{A}(\mathsf{x})$. Representamos então por $\mathsf{A}(\mathsf{a})$ o resultado de substituir em toda a parte x por a em $\mathsf{A}(\mathsf{x})$. Anàlogamente para duas ou mais variáveis. Na fórmula

$$[(\forall(\mathsf{x})[[(\exists y)\mathsf{A}(\mathsf{x},\mathsf{y})] \Rightarrow \mathsf{A}(\mathsf{x},\mathsf{z})]]$$

as variáveis x e y ocorrem mudas, enquanto z ocorre livre. Adoptamos as convenções usuais para simplificação da escrita suprimindo parêntesis, desde que essa supressão não comprometa a legibilidade das fórmulas. A fórmula acima escrever-se-á simplesmente $(\forall \mathsf{x})[(\exists \mathsf{y})\mathsf{A}(\mathsf{x},\mathsf{y}) \Rightarrow \mathsf{A}(\mathsf{x},\mathsf{z})]$.

Uma fórmula sem variáveis livres (quer dizer, sem ocorrências livres de variáveis) diz-se *fechada*. A terminologia introduzida encontra a sua justificação ao pretendermos *interpretar* a nossa linguagem formal num determinado domínio matemático, como se verá no parágrafo seguinte.

D) Juntamente com os símbolos e as regras anteriores, é costume especificar um certo número de regras que determinam a classe dos *Teoremas* de L. Algumas destas regras estabelecem que certas fórmulas, são teoremas; estas fórmulas dizem-se então *axiomas* de L. Outras, são *regras de inferência,* a mais importante das quais é a clássica *modus ponens:* se A e $[\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}]$ são teoremas então B é um teorema. Há que distinguir os *axiomas lógicos,* comuns a todas as teorias formais (de 1.ª ordem), dos *axiomas próprios,* que variam de teoria para teoria. As regras de inferência são também, geralmente, comuns a todas as teorias. É para nós indiferente o sistema de axiomas (lógicos) e de regras de inferência a adoptar (7).

Supomos portanto definida, para cada linguagem ou teoria formal L, a classe dos teoremas de L, por um qualquer dos processos usuais.

Indica-se que uma fórmula A é um teorema de L escrevendo

$$\vdash_L \mathsf{A},$$

ou simplesmente $\vdash \mathsf{A}$, se não houver possibilidade de confusão. Dado um conjunto K de fórmulas de L, dizemos que A é *dedutível* de K, e escreve-se $K \vdash_L \mathsf{A}$ (ou simplesmente $K \vdash \mathsf{A}$) se A for um teorema da teoria que se obtém juntando aos axiomas de L as fórmulas de K.

Em geral, uma teoria L' diz-se uma *extensão* de uma teoria L se todos os símbolos de L forem símbolos de L' e todo o teorema de L for um teorema de L' (basta para tanto que todo o axioma próprio de L seja um teorema de L').

EXEMPLOS. I *Teoria (de 1.ª ordem) dos sistemas parcialmente ordenados.* A linguagem formal dos sistemas parcialmente ordenados tem dois símbolos relacionais $A_1^2(,)$, $A_2^2(,)$, não tem constantes nem símbolos funcionais. Escrevemos $x_i = x_j$ e $x_i \leqq x_j$ em vez de $A_1^2(x_i, x_j)$ e $A_2^2(x_i, x_j)$ respectivamente, para usar a notação comum. Nesta teoria são axiomas próprios as fórmulas:

(1) $$(\forall x_1)[x_1 = x_1]$$

(2) $$(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1]$$

(3) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_1 = x_2 \Rightarrow \Rightarrow [x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3]]$$

(4) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\forall x_4)[x_1 = x_3 \wedge \wedge x_2 = x_4 \wedge x_1 \leqq x_2 \Rightarrow x_3 \leqq x_4]$$

(5) $$(\forall x_1)[x_1 \leqq x_1]$$

(6) $$(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 \leqq x_2 \wedge \wedge x_2 \leqq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2]$$

(7) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_1 \leqq x_2 \wedge \wedge x_2 \leqq x_3 \Rightarrow x_1 \leqq x_3]$$

II *Teoria (de 1.ª ordem) dos grupos.* A linguagem formal dos grupos tem um símbolo relacional $A_1^2(,)$, um símbolo funcional $f_1^2(,)$ e uma constante a_1. Escrevemos mais uma vez $x_i = x_j$ em vez de $A_1^2(x_i, x_j)$ e, para usar a notação aditiva, pomos $x_i + x_j$ em vez de $f_1^2(x_i, x_j)$ e 0 em vez de a_1. São axiomas próprios os três primeiros axiomas do exemplo anterior e ainda os seguintes:

(8) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_2 = x_3 \Rightarrow \Rightarrow [x_1 + x_2 = x_1 + x_3 \wedge x_2 + x_1 = x_3 + x_1]]$$

(9) $$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)[x_1 + (x_2 + x_3) = = (x_1 + x_2) + x_3]$$

(10) $$(\forall x_1)[0 + x_1 = x_1]$$

(11) $$(\forall x_1)(\exists x_2)[x_2 + x_1 = 0].$$

A *teoria dos grupos abelianos*, em que também é axioma próprio a fórmula

$$(\forall x_1)(\forall x_2)[x_1 + x_2 = x_2 + x_1],$$

é uma extensão da teoria dos grupos.

OBSERVAÇÃO. Há evidentemente outras formulações equivalentes destas teorias. Em particular, pode formular-se a teoria (de 1.ª ordem) dos grupos com símbolos relacionais sòmente, utilizando, por exemplo, um só símbolo relacional, $A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ no lugar de $x_1 + x_2 = x_3$. Os axiomas teriam de ser formulados em conformidade. Estas observações estendem-se naturalmente a todas as teorias formais com símbolos funcionais e *com igualdade*, i. e. com um símbolo relacional $A_1^2(\,,\,)$ tal que são axiomas próprios as fórmulas (1), (2), (3) e um ou mais *axiomas de substitutividade* (que exprimem que «objectos iguais devem ter as mesmas propriedades», (4) e (8)) conforme os símbolos relacionais e funcionais em presença, de modo que estes são *teòricamente* dispensáveis.

Uma linguagem (ou teoria) formal L diz-se *(formalmente) consistente* se não existir em L uma fórmula A tal que A e $[\sim \mathsf{A}]$ são teoremas de L(8). Mais geralmente, um conjunto K de fórmulas de L diz-se (formalmente) consistente se, juntando as fórmulas de K aos axiomas de L, a teoria L' assim obtida é consistente. Caso contrário, K (em particular, $\{\mathsf{A}\}$) diz-se *contraditória.* Como se sabe, numa teoria contraditória, toda a fórmula é um teorema.

Chamamos *vocabulário* de um conjunto K de fórmulas de L ao conjunto de todos os símbolos (relacionais, funcionais, constantes, etc.) que ocorrem nas fórmulas de K.

3. Estruturas, interpretações, modelos.

As linguagens formais de 1.ª ordem são suficientes para definir e descrever muitas propriedades das estruturas matemáticas correntes, nomeadamente muitas estruturas algébricas.

Recordemos que uma estrutura (de 1.ª ordem) é um par $<M, \mathcal{R}>$ constituído por um conjunto não vazio M e um sistema $\mathcal{R}$ de relações unárias, binárias, etc., definidas em M (uma relação de ordem zero em M identifica-se com um elemento de M(9)). Por abuso de linguagem, chamamos estrutura ao próprio conjunto M (que é apenas o *suporte* da estrutura), quando não haja necessidade de especificar as relações da estrutura em causa.

Para descrever uma estrutura M por meio de uma linguagem formal L é necessário, pois, interpretar esta em M. Uma *interpretação de uma linguagem* (de 1.ª ordem) L *numa estrutura* (de 1.ª ordem) M é uma correspondência (unívoca) que a cada constante de um subconjunto do conjunto das constantes de L associa um elemento de M, e a cada símbolo relacional $A_j^k(\,,\cdots,)$ de um subconjunto do conjunto dos símbolos relacionais de L associa uma relação k-ária em M(10). Podemos desde já supor que L contém símbolos em quantidade igual ou superior à dos elementos ou relações correspondentes em M. Dada M, se esta condição não se verificasse, considerávamos uma extensão L' de L conveniente; vê-se fàcilmente que as considerações seguintes não dependem significativamente da extensão particular que se tome.

Uma fórmula A de L diz-se *interpretada em M* se todas as constantes ou símbolos relacionais de A têm correspondente em M (com respeito à interpretação dada). Por outro lado, as variáveis livres de A têm como «domínio de variação» o conjunto M. A definição estende-se imediatamente a um conjunto de fórmulas de L.

Suponhamos fixada uma interpretação de L numa estrutura M, e consideremos uma fórmula qualquer A, fechada, interpretada em M. Definiremos em seguida a noção semântica de *fórmula verdadeira em* M (com respeito à interpretação dada) (11):

(*i*) Se A é uma fórmula atómica,

$$\mathsf{A} = A_j^k(\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k)\,(^{12}),$$

sendo $\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k$ interpretados nos elementos $t'_1, \cdots, t'_k$ de M, então A é verdadeira (em M, com respeito ···) se e só se o sistema $(t'_1, \cdots, t'_k)$ verifica a relação R_j^k em M correspondente ao símbolo relacional $A_j^k(, \cdots ,)$, na interpretação dada (por outras palavras, $(t'_1, \cdots, t'_k)$ pertence ao subconjunto R_j^k de M^k).

(*ii*) Se $\mathsf{A} = [\sim \mathsf{B}]$, então A é verdadeira sse (abreviatura de «se e só se») B é falsa (ver nota (11)); se $\mathsf{A} = [\mathsf{B} \vee \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse B é verdadeira ou C é verdadeira; se $\mathsf{A} = [\mathsf{A} \wedge \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse B e C são ambas verdadeiras; se $\mathsf{A} = [\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse C é verdadeira ou B e C são ambas verdadeiras; finalmente, se $\mathsf{A} = [\mathsf{B} \Leftrightarrow \mathsf{C}]$, A é verdadeira sse B e C são ambas verdeiras ou ambas falsas.

(*iii*) Se $\mathsf{A} = [(\exists\, \mathsf{x})\, \mathsf{B}(\mathsf{x})]$, A é verdadeira em M sse existe uma constante a de L tal que $\mathsf{B}(\mathsf{a})$ é verdadeira em M (a corresponde necessàriamente a um elemento a' de M por meio da interpretação dada). Se x não ocorre em B, deve entender-se que A é verdadeira sse B o for. Se

$$\mathsf{A} = [(\forall\, \mathsf{x})\, \mathsf{B}(\mathsf{x})],$$

A é verdadeira em M sse para toda a constante a de L com elemento correspondente a' de M (por meio de interpretação dada), $\mathsf{B}(\mathsf{a})$ é verdadeira em M.

As condições anteriores determinam, para toda a fórmula fechada de L, se ela é verdadeira ou falsa em M (com respeito à interpretação dada). Note-se que a verdade ou falsidade de uma fórmula fechada A interpretada numa estrutura M, depende apenas da interpretação das constantes e símbolos relacionais que ocorrem em A (i. e., da correspondência entre esses símbolos e os correspondentes elementos e relações de M). Estas observações estendem-se de maneira óbvia a um conjunto qualquer de fórmulas de L.

Seja K um conjunto de fórmulas fechadas de L, M uma estrutura, e $\Phi(L;M)$ (ou simplesmente Φ) uma interpretação de L em M tal que todas as fórmulas de K estão interpretadas em M. Se todas as fórmulas de K são Φ-verdadeiras (quer dizer, são verdadeiras em M com respeito a Φ), dizemos que M é um *modelo* de K (com respeito a Φ). Em particular, se uma fórmula (fechada) A é Φ-verdadeira, M é um modelo de A. Um modelo da classe dos teoremas de uma teoria formal L diz-se um modelo de L. Basta, para tanto, que seja modelo do conjunto dos axiomas de L (15).

Exemplos. I′ Um modelo da teoria formal dos sistemas parcialmente ordenados (Exemplo I) diz-se um *sistema (ou conjunto) parcialmente ordenado*. Para qualquer conjunto E, a estrutura $< \mathscr{P}(E), \subseteq >$ é um modelo da referida teoria com respeito à interpretação que associa o símbolo relacional $\leqq$ à relação de inclusão em $\mathscr{P}(E)$.

II′ Chama-se *grupo* a todo o modelo da teoria formal dos grupos (Exemplo II). Deixamos ao cuidado do leitor a concretização destes modelos.

Um conjunto K de fórmulas fechadas de L diz-se (semânticamente) *consistente* se possuir um modelo. No caso contrário, diz-se (semânticamente) *contraditório*. O leitor definirá, por analogia, os conceitos correspondentes para uma fórmula (fechada) e para uma teoria formal L.

Se uma fórmula fechada A é verdadeira em todo o modelo de um conjunto de fórmulas fechadas K (onde $K \cup \{\mathsf{A}\}$ seja interpretado), A diz-se *consequência* (semântica) *de* K; escreve-se então $K \models \mathsf{A}$. Se A

fôr verdadeira em toda a estrutura onde seja interpretada, então A dir-se-à *universalmente* (ou *lógicamente*) *válida*, e nesse caso escreveremos $\models$A. Veremos no parágrafo seguinte algumas relações entre estes conceitos semânticos e os correspondentes conceitos formais (ou sintáticos, fim do parágrafo anterior).

Duas estruturas $< M, \mathfrak{R} >$ e $< M', \mathfrak{R}' >$ dizem-se *semelhantes* se $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$, i. e. se tiverem as mesmas relações. Dadas duas estruturas semelhantes M e M', M diz-se uma *subestrutura* de M', e M' uma *extensão* de M, quando e só quando $M \subseteq M'$ e para toda a relação n-ária R de M e M' e todo o sistema de n elementos de $M, b = (b_1, \cdots, b_n)$, b verifica R em M sse b verifica R em M'.

Sejam M, M' duas estruturas semelhantes tais que M' é extensão de M; consideremos uma interpretação de L em M' (que induz, naturalmente, uma interpretação de L em M). M' diz-se uma *extensão elementar* de M se, para toda a fórmula fechada A interpretada em M e M' cujas constantes são todas interpretados em M, A é verdadeira em M e M' ou não é verdadeira numa nem noutra (com respeito à interpretação dada), ([14]).

Intuitivamente, se M' é extensão elementar de M, M' e M têm *as mesmas propriedades* formais expressas por fórmulas de L nas condições indicadas (ver notas ([1]) e ([3])).

4. Teorema da Compacidade, Modelos Não-Standard, Infinitesimais.

Neste parágrafo designamos por L_1 um Cálculo de Predicados Restringido (ou de 1.ª Ordem), que é uma linguagem formal sem axiomas próprios.

Começamos por mencionar, sem demonstração, alguns resultados centrais da Lógica Matemática e da Teoria dos Modelos, conhecidos pela designação geral de *Metateoremas* ([15]).

É sabido que todo o teorema de L_1 é universalmente válido. Inversamente, toda a fórmula fechada de L_1 lògicamente válida é um teorema de L_1 ([16]). Em resumo, para toda a fórmula fechada A de L_1,

$$\models \mathsf{A} \quad \text{sse} \quad \vdash_{L_1} \mathsf{A}.$$

Outro resultado fundamental mas não tão conhecido é o chamado

TEOREMA DA COMPACIDADE. *Se toda a parte finita de um conjunto* K *de fórmulas fechadas de* L_1 *possui um modelo, então* K *possui um modelo.*

A demonstração faz apelo a um poderoso método da Teoria dos Modelos, de natureza algébrica, baseado na construção de *ultraprodutos de estruturas* ([17]), cujas aplicações têm crescido de maneira espectacular nos últimos anos. De momento, assinalemos apenas que ele também pode servir para a construção de modelos não-standard da análise, no sentido abaixo indicado.

Consideremos a estrutura (de 1.ª ordem) dos números reais **R**; seja K o conjunto das fórmulas fechadas de L_1 interpretadas em **R**, i. e. em que ocorrem constantes correspondentes (com respeito a certa interpretação, que supomos fixa, até nova ordem) aos elementos de **R**, e símbolos relacionais correspondentes a todas as relações de todas as ordens definíveis em **R**. Seja $K_{\mathbf{R}}$ o subconjunto de K formado pelas fórmulas fechadas de K que são *verdadeiras* em **R**. Note-se que apesar de não ocorrerem símbolos funcionais, algumas fórmulas de $K_{\mathbf{R}}$ podem interpretar-se como dizendo respeito a certas funções reais de (uma ou mais) variável real. Consideremos a função real f de domínio D contido em **R**, e seja $F(,)$ um símbolo relacional tal que, se as constantes a e b correspondem aos elementos a' e b' de R, $F(a, b)$ é verdadeira em R sse a' pertence a D e $b' = f(a')$. Podemos igualmente dispôr de um símbolo relacional $D(\ )$ tal que $D(a)$ é verdadeira em R sse a' pertence a D. Então a fórmula de K_R

$$[(\forall x)(\forall y)[F(x, y) \Rightarrow D(x)]] \wedge \\ \wedge (\forall x)[D(x) \Rightarrow [(\exists y)(\forall z)[F(x, y) \wedge \\ [F(x, z) \Rightarrow I(y, z)]]]]$$

pode interpretar-se do modo indicado, interpretando $I(,)$ como sendo a relação de igualdade em R.

No vocabulário de K_R figura também um símbolo relacional $N(\ )$ tal que $N(a)$ é verdadeira em R sse a' é um número natural.

Deste modo podem formalizar-se em K_R «muitas» propriedades dos números reais, de funções reais (com domínio especificado), etc. (o cardinal de K_R é 2^c, sendo c o cardinal do contínuo!). Assim, por exemplo, é possível formalizar em K_R a propriedade de R ser um corpo ordenado, usando símbolos relacionais como $S(,,)$ $P(,,)$ para a adição e multiplicação de números reais respectivamente (cf. Observação do § 2), e $I(,)$ para a relação de igualdade em R, mas já não é possível formalizar o *axioma de Arquimedes* (18). Tem grande interesse para o desenvolvimento da ANS no contexto do Cálculo de Predicados Restringido saber distinguir se uma dada propriedade dos números reais se pode formular ou não com o vocabulário de K_R, o que é por vezes um problema delicado.

Todos os modelos de K_R são evidentemente extensões elementares de R. Uma extensão *própria* de R que seja modelo de K_R diz-se um *Modelo Não-Standard da Análise.*

Provemos a existência de modelos não-standard da análise.

Seja b uma constante não interpretada em R (i. e. b não pertence ao vocabulário de K_R), e consideremos o conjunto de fórmulas fechadas $K_b = \{\sim I(a_\alpha, b)\}$ em que a_α percorre todas as constantes do vocabulário de K_R, correspondentes portanto a todos os números reais. O conjunto $K_R \cup K_b$ possui um modelo $^*R$ que se pode escolher como extensão de R (19) pois, em virtude do Teorema da Compacidade, toda a parte finita K' de $K_R \cup K_b$ possui um modelo: o próprio R. Com efeito, K' possui apenas um número finito de fórmulas $\sim I(a_\alpha, b)$, e interpretando b em R como um elemento diferente dos correspondentes aos a_α que ocorrem em K', vê-se que R é um modelo de K'.

$^*R$ é portanto um corpo ordenado e é extensão própria de R, porque, sendo modelo de $K_R \cup K_b$, possui um indivíduo $^*b$, correspondente a b, que é diferente de todos os indivíduos de R. $^*R$ é, portanto, um modelo não-standard da Análise, visto ser também modelo de K_R.

Seja $^*R$ um modelo não-standard da Análise. $^*R$ é necessáriamente não arquimedeano visto saber-se não existir nenhum corpo ordenado arquimedeano que seja extensão (própria) do corpo dos reais. São portanto não vazios o conjunto R_0 dos elementos $^*r$ de $^*R$ tais que $|^*r| < \varepsilon$ para todo ε real positivo, e o conjunto R_1 dos elementos $^*r$ de $^*R$ tais que $|^*r| < \varepsilon$ para algum ε real positivo. Os elementos de R_0 dizem-se *infinitesimais*, e os elementos de R_1 dizem-se *finitos*. Os elementos de R (que é uma parte de R_1), dizem-se *standard*, por oposição aos elementos de $^*R \setminus R$, chamados *não-standard*. Os elementos de $^*R$ não finitos dizem-se *infinitamente grandes*.

A chave do método da ANS consiste em poder agora juntar a L_1 dois novos símbolos relacionais, $R_0(\ )$, $R_1(\ )$ que representam os conjuntos R_0 e R_1 respectivamente, e por meio deles refazer a Análise, ou grande parte dela.

Voltaremos ao assunto.

OBSERVAÇÕES FINAIS. Procurámos reduzir ao mínimo os conhecimentos necessários para acompanhar o texto e, para isso, abordámos também a ANS do modo mais acessível, i. e., pela linguagem do Cálculo de Predicados de 1.ª Ordem. Pode-se igualmente desenvolver a ANS numa linguagem de Ordem Superior (em que se quantifiquem relações, funções, relações de relações, etc.) como a *Teoria dos Tipos* ([14]), ou, de modo equivalente, alargando a noção de estrutura ([9], por exemplo).

Convém salientar que se caminhou já bastante no sentido de uma axiomatização da ANS (veja-se o artigo de G. KREISEL in [8], pág. 93).

NOTAS

(1) Não encontrámos melhor para a tradução de «Non-Standard Analysis». O termo «standard» que também ocorre isolado algumas vezes, parece na verdade suficientemente universalizado para justificar o seu uso na nossa língua, pelo menos num nível técnico-científico.

O primeiro artigo sobre a ANS data de 1961, [12]. A origem da designação pode atribuir-se a um trabalho pioneiro de SKOLEM, em 1934, sobre *modelos não-standard da Aritmética.* SKOLEM prova que os axiomas de Peano não são categóricos, no seguinte sentido: desde que se formulem esses axiomas numa linguagem formal especificada (por exemplo, o Cálculo de Predicados), existem modelos onde são satisfeitas todas as propriedades dos números naturais formalizáveis nessa linguagem (incluindo portanto os axiomas) que são *extensões próprias* dos modelos usuais, standard, e por isso se podem chamar não-standard. Com efeito, prova-se a existência, nesses modelos, de elementos maiores que todos os números naturais (formalmente «maiores», quer dizer que tal facto é expresso por uma certa fórmula da linguagem em questão). Pode consultar-se um outro artigo de SKOLEM, mais recente — *Peano's Axioms and models of Arithmetic*, in [19], pag. 1-14. Pode dizer-se que os trabalhos de ROBINSON estendem os resultados de SKOLEM aos números reais, obtendo assim modelos não-standard dos números reais (ver nota (3)).

(2) Durante um longo período, a seguir a NEWTON e LEIBNIZ, o método dos infinitesimais foi usado por matemáticos distintos como EULER e o M. de L'HÔPITAL, por vezes de mistura com outros métodos. Certas inconsistências levaram CAUCHY a abandoná-lo progressivamente em favor da Teoria dos Limites, em parte precedido por LAGRANGE e D'ALEMBERT. Citações dos trabalhos de CAUCHY ([11], pag. 260-282) mostram, contudo, que este conhecia e aplicava o referido método das quantidades infinitamente pequenas *simultâneamente* com o método dos Limites, também já conhecido de NEWTON. Só a partir de Weierstrass, que precisou a noção de limite dada por CAUCHY, se adoptou definitivamente o método e a linguagem dos limites. No entanto, continuaram até aos nossos dias investigações sobre certos sistemas não-arquimedianos e sobre o uso de infinitesimais na Análise (GEISSLER, NATORP, SCHMIEDEN & LANGWITZ, entre outros; veja-se [12], e [14] pág. 278).

(3) Em poucas palavras, isso é conseguido mergulhando o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$ numa extensão própria $^*\mathbf{R}$ que possui as *mesmas propriedades formais* que $\mathbf{R}$, expressas numa linguagem formal dada. Tal extensão é necessáriamente não-arquimedeana, o que permite demonstrar fácilmente a existência de elementos infinitamente grandes e infinitamente pequenos. A especificação prévia de uma linguagem formal onde são expressas as propriedades de $\mathbf{R}$ resolve a aparente situação contraditória da existência de sistemas categóricos de axiomas para os números reais.

(4) Veja-se, por exemplo, [7], [8], [9], [16].

(5) Para uma introdução à Lógica Matemática e à Teoria dos Modelos, onde se focam os aspectos relevantes para o que temos em vista, podem consultar-se as nossas lições [11], ou os dois primeiros capítulos de [10] juntamente com os capítulos I e II, o § 2 do Cap. III e o Cap. IX de [13]. Outras excelentes introduções são [4], [5], [18]. Sobre a Teoria dos Modelos, exclusivamente, [1].

(6) Note-se que $\mathfrak{t}_1, \cdots, \mathfrak{t}_k$ já não são símbolos de L, mas sim símbolos que representam (designam, nomeiam) termos arbitrários de L. São, pois, aquilo a que se chama *meta-símbolos*, pertencentes à meta-linguagem da linguagem L. A meta-linguagem de L é, no nosso caso, a linguagem ordinária, pouco mais ou menos, na qual descrevemos L. Usaremos igualmente como meta-símbolos os seguintes: $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z}, \cdots$ para variáveis; $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \cdots$ para constantes; $\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \cdots$ para símbolos funcionais; $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \cdots$ para fórmulas. Por outro lado, para não sobrecarregar a notação e facilitar a interpretação, usaremos letras como «I», «S», «P», «Q», ··· para símbolos relacionais especiais. Para uma elucidação completa destas questões notacionais, veja-se o *Dictionary of Symbols of Mathematical Logic*, North-Holland, 1969.

(7) Há várias possibilidades equivalentes, com variantes diversas. Veja-se, [4], [10], ou o citado *Dictionary*, para as formulações precisas de todos estes conceitos.

(8) Também aqui não há uma só definição. Cf. [4] [13].

(9) Usamos o termo «estrutura» como sinónimo de «sistema relacional», noção devida a TARSKI. Veja-se G. GRÄTZER — *Universal Algebra*, VAN NOSTRAND, 1968, e [13]. Uma relação R n-ária em M pode identificar-se com um subconjunto de M^n. Também uma função definida em M^n com valores em M se pode identificar com uma relação de ordem $n+1$ em M, ou seja, um subconjunto de M^{n+1}, pelo processo usual. Assim, como podemos, teòricamente, dispensar os símbolos funcionais, nas linguagens formais, (cf. Observação no § anterior) podemos, nas estruturas, falar apenas de relações. Este facto tem interesse, pois permite simplificar o estudo teórico de propriedades gerais das estruturas.

(10) E, se for caso disso, a cada símbolo funcional $f_j^k(,\cdots,)$ associamos uma função definida em M^k com valores em M. Em virtude do que dissemos anteriormente, omitiremos de futuro qualquer referência a símbolos funcionais ou às funções correspondentes em M.

(11) Na verdade, a restrição de $\mathbf{A}$ ser fechada não é essencial, pois prova-se (ver por exemplo [10], pág. 52) que uma fórmula $\mathbf{A}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$ é verdadeira numa estrutura (com respeito a certa interpretação) se e só se $(\forall x_{i_1})\cdots(\forall x_{i_n})\,\mathbf{A}(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$ for verdadeira nessa estrutura (com respeito à mesma interpretação). Sabe-se, por outro lado (ref. acima), que toda a fórmula fechada é verdadeira ou falsa (i. e. a sua negação é verdadeira) em cada estrutura onde seja interpretada, o que, aliás, não é difícil de constatar, atendendo às definições.

A noção intuitiva de *fórmula verdadeira numa estrutura* (com respeito a uma interpretação dada) é uma noção fundamental da moderna Semântica (e, portanto, da Lógica) e foi inteiramente formalizada com todo o rigor por TARSKI, nos anos trinta. Veja-se o seu artigo *The concept of Truth in Formalized Languages*, in [17], ou qualquer tratado standard de Lógica Matemática [2], [4], [10]. A sua formulação (quer intuitiva, quer formalizada) apoia-se fortemente numa teoria (para nós intuitiva, mas que também pode ser axiomática) de conjuntos. Veja-se ainda [6].

(12) O sinal «$=$» é, aqui e a seguir, o meta-símbolo de *identidade lógica*. Note-se, que, pondo de lado os símbolos funcionais e sendo $\mathbf{A}$ fechada, sòmente as constantes podem ser termos. Seguimos essencialmente [13], Cap. I.

(13) Prova-se, com efeito, que todo o teorema de L é verdadeiro em qualquer estrutura onde seja interpretado. A demonstração consiste geralmente em verificar que as regras de inferência levam de fórmulas verdadeiras numa estrutura (com respeito a certa interpretação) a fórmulas também verdadeiras nessa estrutura (com respeito à mesma interpretação). Supõe-se, claro está, que todas as fórmulas estão interpretadas na estrutura em questão. Ver [10] ou [4], por exemplo.

(14) A noção de *extensão elementar* de estruturas, é outra noção fundamental da Teoria dos Modelos, introduzida por A. TARSKI e R. L. VAUGHT em 1957 — *Arithmetical extensions of relational systems*, Compositio Mathematica 13, pág. 81-102. Veja, para mais pormenores, [13], pág. 54 e seguintes.

(15) Não se encontram metateoremas apenas na Metamatemática: eles aparecem frequentes vezes nos textos matemáticos, disfarçados de teoremas comuns, quando se trata, na realidade, de propriedades gerais de certas classes de teoremas ou de estruturas. São exemplos de metateoremas os clássicos *Princípios de Dualidade* em Algebra e em Geometria. Veja-se [13] pág. 35, e, para as demonstrações, [10], e [14].

(16) É um dos célebres *Teoremas de Completude* de GÖDEL, estabelecido nos princípios dos anos trinta, e consequência de um outro um pouco mais geral: «todo o conjunto K formalmente consistente de fórmulas fechadas de L_1 possui um modelo». Tomou-se precisamente este resultado como base da definição de consistência semântica (final do parágrafo 3). Em consequência dos Teoremas de Completude de GÖDEL, são inteiramente equivalentes, para as linguagens formais L_1, as noções semânticas e sintáticas de consistência, e as de dedutibilidade (ou consequência formal) e de consequência (semântica).

(17) Na realidade, a demonstração original, por MALCEV, em 1936, segue linhas diferentes e tem pontos de contacto com o Teorema de Completude de GÖDEL e suas generalizações (Cálculo de Predicados com Igualdade) (ver [13] e HENKIN — *The completeness of the First-Order Functional Calculus*, J. S. L. 14 (1949), pág. 159-166). Embora a construção de ultraprodutos de estruturas se baseie na existência de ultrafiltros (não triviais) sobre um conjunto dado e portanto no Axioma da Escolha, a primeira demonstração baseia-se no «Princípio dos Ideais Maximais» para Algebras de BOOLE, que se sabe ser *estritamente* mais fraco que o Axioma da Escolha, e que por sua vez se pode deduzir do Teorema de TYCHONOV no caso de um produto infinito de espaços discretos com dois elementos, segundo foi observado por TARSKI, donde a designação de Teor. da «Compacidade» (verTARSKI — *Some notions and methods on the borderline of*

Algebra and Metamathematics, Proc. Int. C. of Math. Cambridge 1950; vol. I p. 705-720).

Quanto aos ultraprodutos veja-se Frayne, Morel & Scott — *Reduced direct products*, Fund. Mathem. 51 (1962) pág. 195-228 e [1], com bibliografia actualizada, além de [13] e [14], no que diz respeito à ANS.

([18]) Cf. [13] pág. 44.

([19]) Este ponto merece um pouco mais de atenção. Seja M uma estrutura qualquer, K um conjunto de fórmulas fechadas de L_1 suposta interpretada em M. É possível caracterizar os modelos de K que são isomorfos a M (M' é isomorfo a M se os elementos e as relações de igual ordem de M e M' estão em correspondência biunívoca de modo que se $a_i \leftrightarrow a_i'$ e $R \leftrightarrow R'$ então $R(a_1, \cdots, a_n)$ em M sse $R'(a_1', \cdots, a_n')$ em M') por meio da noção de *diagrama*, devida a Robinson. O diagrama de M, $D(M)$, é o conjunto de todas as fórmulas atómicas $A_j^k(\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k)$ verdadeiras em M, e das negações dessas fórmulas atómicas que não sejam verdadeiras em M. É fácil então provar que todo o modelo de $D(M)$ é extensão de uma estrutura isomorfa a M e que, inversamente, toda a estrutura que é extensão de uma estrutura isomorfa a M é um modelo de $D(M)$, para uma interpretação conveniente dos símbolos de $D(M)$. Para aplicar ao nosso caso, basta notar que $K_{\mathbf{R}}$ contém o diagrama de $\mathbf{R}$. Para mais informes, veja-se [13] e [15].

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. Bell & A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An Introduction*, North-Holland, 1969.

[2] A. Church, *Introd. to Mathematical Logic*, Vol I, Princeton, 1956.

[3] D. Hilbert & W. Ackermann, *Elementos de Lógica Teórica*, Tecnos, Madrid, 1962 (trad. da 4.ª ed. alemã).

[4] S. C. Kleene, *Mathematical Logic*, Wiley, 1967.

[5] G. T. Kneebone, *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, 1963.

[6] G. Kreisel & J. L. Krivine, *Elements of Mathematical Logic (Model Theory)*, North-Holland, 1967 (existe ed. francesa, Dunod).

[7] W. A. J. Luxemburg, *Two Applications of the Method of Construction by Ultrapowers to Analysis*, in Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962).

[8] ———, (editor), *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability*, Holt, Rinehart & Wiston, 1969.

[9] M. Machover & J. Hirschfeld, *Lectures on Non-Standard Analysis*, Springer-Verlag, 1969.

[10] E. Mendelson, *Introd. to Mathematical Logic* Van Nostrand, 1963.

[11] A. J. F. Oliveira, *Alguns Aspectos da Lógica Moderna e suas Aplicações: A Teoria dos Modelos e A Análise Não-Standard* (Texto mimeogr. de lições integradas nos C. M. P. G., P. I. F. 1967).

[12] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, in Proc. Royal Acad. Sc. Amst. ser. A, **64**, p. 432-440.

[13] ———, *Introd. to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra*, North-Holland, 2ª ed., 1965.

[14] ———, *Non-Standard Analysis*, North-Holland, 1966.

[15] ———, *On some applications of Model Theory to Algebra and Analysis*, in Rendiconti di Math., 1967.

[16] A. Robinson & A. R. Bernstein, *Solution of an invariant subspace problem of K. T. Smith and P. R. Halmos*, Pacif. J. of Math., 1966.

[17] A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956.

[18] ———, *Introd. à la Logique Mathematique* (última ed.), Gauthiers-Villars, 1968.

[19] Vários ed., *Mathematical Interpretation of Formal Systems* (Colectânea de artigos de Skolem, Hasenjaeger, Kreisel, A. Robinson, Hao Wang, Henkin, J. Los), North-Holland, 1955.