MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência e 1.º ponto de informação (1.ª chamada) — 31-1-1968.

I

5687 — 1) Prove que

$$A \subseteq B \wedge C \subseteq D \Longrightarrow A \cap C \subseteq B \cap D .$$

R.: *Como*

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$$
$$C \subseteq D \Longleftrightarrow C \cap D = C ,$$

vem

$$(A \cap B) \cap (C \cap D) = A \cap C ,$$

ou

$$(A \cap C) \cap (B \cap D) = A \cap C ,$$

o que prova a tese: $A \cap C \subseteq B \cap D$.

2) Estude a comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro para a lei de composição interna $*$ definida sobre N por $a * b = a$.

R.: *Notando que* $a * b = a$ *e* $b * a = b$, *conclui-se que a lei não é comutativa*; *como* $(a * b) * c = a$ *e* $a * (b * c) = a$, *a lei é associativa. Supondo que existia o elemento neutro* e, *seria* $a * e = e * a = a$ *o que é impossível pois* $e * a = e$.

II

5688—1) Demonstre que o número real $a = [A_1, A_2]$ é maior do que o número real $b = [B_1, B_2]$ se e só se $A_1 \supset B_1$.

Prove que esta relação binária é uma relação de ordem definida sobre R.

R.: $a > b \Longleftrightarrow A_1 \cap B_2 \neq \emptyset \Longleftrightarrow a'_1 = b'_2$ *e, supondo satisfeita esta condição, é evidente que* $\forall\, b_1 \in B_1$ $b_1 < b'_2 = a'_1 \Longrightarrow b_1 \in A_1$ *e, por outro lado,* $a'_1 = b'_2 \notin B_1$, *isto é,* $A_1 \supset B_1$; *reciprocamente, com* $A_1 \supset B_1$, *tem-se* $b_1 \in B_1 \Longrightarrow b_1 \in A_1$ *mas* $\exists\, a'_1 \notin B_1$ *e portanto* a'_1 *ou é* b *(se este número é racional) ou* $a'_1 \in B_2$ *e no primeiro caso será possível escolher* $a''_1 > a'_1$ *tal que* $a''_1 \in B_2$: *ter-se-á pois em qualquer dos casos* $A_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.

Para provar que se trata de uma relação de ordem definida sobre R *basta verificar que são satisfeitas as propriedades tricotómica e transitiva. A primeira decorre do facto de se ter sempre* $A_1 = B_1 \dot{\vee} A_1 \supset B_1 \dot{\vee} A_1 \subset B_1$; *a segunda é consequência da propriedade transitiva da inclusão de conjuntos.*

2) Sejam X e Y conjuntos lineares. Prove que, sendo Y subconjunto não vazio de X, $\inf X \leq \inf Y \leq \sup Y \leq \sup X$.

Ache o interior, o exterior, a fronteira, o derivado, o supremo e o ínfimo do conjunto $X = [2, 5[\cup \cup \left\{x : x = \dfrac{2n+1}{n^2+2} \ (n = 1, 2, \cdots)\right\}$.

R.: *Sendo* $Y \subseteq X$, *então* $y \in Y \Longrightarrow y \in X$ *o que permite concluir que* $\inf X \leq y \leq \sup X$, *isto é,* $\inf X$ *é minorante de* Y *e* $\sup X$ *é majorante de* Y. *Logo* $\inf Y \geq \inf X$ *e* $\sup Y \leq \sup X$ *e, como* $\inf Y \leq y \leq \sup Y$, *vem imediatamente o resultado pretendido.*

$$\mathrm{int}\, X =]2, 5[, \quad \mathrm{ext}\, X = R - [X \cup \{0, 5\}] ,$$
$$\mathrm{front}\, X = \{0, 2, 5\} \cup \left\{x : x = \frac{2n+1}{n^2+2}\right\}$$
$$X' = [2, 5] \cup \{0\} , \quad \sup X = 5 , \quad \inf X = 0 .$$

III

5689 — 1) Seja u_n uma sucessão crescente e v_n uma sucessão decrescente tais que $\forall\, n \in N$ $u_n \leq v_n$. Mostre que as sucessões u_n e v_n são convergentes e que $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Calcule $\lim \dfrac{\left(1 + \dfrac{\log n}{n}\right)^{3/5} - 1}{\sqrt[n]{a^{\log n}} - 1}$.

R.: *Como* $u_1 \leqq u_n \leqq v_n \leqq v_1$, *o conjunto* (u_n) *é superiormente limitado e o conjunto* (v_n) *é inferiormente limitado o que garante a existência de limites finitos* u *e* v, *respectivamente para* u_n *e* v_n. *Não pode ser* $u > v$ *porque isso obrigaria a ter, a partir de uma certa ordem,* $u_n > v_n$. *Logo é* $u \leqq v$.

$$\lim \frac{\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^{3/5}-1}{\sqrt[n]{a^{\log n}}-1} = \frac{\frac{3}{5}\zeta\frac{\log n}{n}}{e^{\frac{\log}{n}\cdot\log a}-1} =$$

$$= \frac{\frac{3}{5}\zeta\frac{\log n}{n}}{\xi\frac{\log n}{n}\cdot\log a},$$

onde $\lim\zeta = \lim\xi = 1$, *e portanto o limite pedido é igual a* $\frac{3}{5\log a}$.

2) $\sum_0^\infty u_n$ converge e $\sum_0^\infty v_n$ diverge. Demonstre que $\sum_0^\infty (u_n+v_n)$ diverge e que $\sum_0^\infty w_n$, onde $w_{2n} = u_n$ e $w_{2n+1} = v_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, também diverge.

R.: *Sendo* S′) $\sum_0^\infty u_n$, S″) $\sum_0^\infty v_n$ *e* S) $\sum_0^\infty (u_n+v_n)$, *vem* $S_n = S'_n + S''_n$ *e como apenas* S'_n *possui limite finito é claro que* S_n *diverge. Para a série* T) $\sum_0^\infty w_n$ *tem-se* $T_{2n} = S'_n + S''_n$ *e portanto* T_{2n} *diverge.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência e 1.º ponto de informação (2.ª chamada) — 3-2-1968.

I

5690 — 1) Estude a validade do argumento seguinte:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ p \wedge t \\ \sim r \vee s \\ \hline \therefore\ s \wedge t \end{array}$$

R.:

1.	$p \Rightarrow q$	*prem.*
2.	$q \Rightarrow r$	*prem.*
3.	$p \wedge t$	*prem.*
4.	$\sim r \vee s$	*prem.*
5.	$p \Rightarrow r$	1, 2 *mod. ponens*
6.	$\sim p \vee r$	5, *equiv.*
7.	p	3, *simpl.*
8.	t	3, *simpl.*
9.	r	6, 7 *sil. disj.*
10.	s	4, 9 *sil. disj.*
11.	$s \wedge t$	8, 10 *conj.*

2) Supondo que as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são biunívocas, demonstre que a função composta $g \circ f: A \to C$ também é biunívoca.

R.: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ *e, como* $f(a_1) \in B$ *e* $f(a_2) \in B$, *tem-se* $f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow g[f(a_1)] \neq g[f(a_2)]$ *com* $g[f(a_1)] \in C$ *e* $g[f(a_2)] \in C$. *Logo,* $a_1 \neq a_2 \Rightarrow g[f(a_1)] \neq g[f(a_2)]$, *o que prova a proposição.*

II

5691 — 1) Sabendo que entre dois números racionais há sempre um número irracional, demonstre que entre dois números reais há sempre um número irracional. Pode concluir-se daqui que qualquer número real é ponto de acumulação do conjunto dos números irracionais? Pode também garantir-se que qualquer número real é ponto de acumulação do conjunto dos números reais? Justifique as respostas.

R.: *Dados os números reais* a *e* b $(a < b)$ *é sempre possível encontrar dois números racionais* r *e* s $(r < s)$ *tais que* $a < r < s < b$ *e, como entre* r *e* s *existe um número irracional, a proposição fica demonstrada.*

Em $]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[$, *sendo* $\lambda \in R$, *há uma infinidade de racionais e de irracionais e portanto* λ *é ponto de acumulação do conjunto dos racionais, do conjunto dos irracionais e do conjunto dos reais.*

2) Sejam X e Y conjuntos lineares. Prove as proposições seguintes:

a) $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$ *b)* $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

Verifique os teoremas para

$$X = \left\{x : x = m + \frac{1}{n}\ (m, n = 1, 2, \cdots)\right\}$$

e

$$Y = \left\{y : y = \frac{n+1}{n}\ (n = 1, 2, \ldots)\right\}.$$

R.: a) *Sendo* k *ponto de acumulação de* $X \cup Y$, *então* $k \in X' \vee k \in Y'$ *e recìprocamente.*

b) $$\overline{X \cup Y} = (X \cup Y) \cup (X \cup Y)'$$
$$= (X \cup Y) \cup (X' \cup Y')$$
$$= (X \cup X') \cup (Y \cup X')$$
$$= \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

A verificação dos teoremas para os conjuntos apresentados é imediata. Tem-se $X' = \{1, 2, 3, \cdots\}$ *e* $Y' = \{1\}$.

III

5692 — 1) Suponha que (u_n) é limitado superiormente e $\forall n \in N \; u_n < \sup(u_n)$. Prove que existe uma subsucessão u_{α_n} tal que $\lim u_{\alpha_n} = \sup(u_n)$.

Calcule $\lim \left(\dfrac{3n+2}{3n+4}\right)^{n^2(\sqrt[n]{e}-1)}$.

R.: *Como* $\sup(u_n) \notin (u_n)$, *então* $\sup(u_n)$ *é ponto de acumulacão de* (u_n) *e portanto é sublimite.*

Tomando $u_n = \left(\dfrac{3n+2}{3n+4}\right)^{n^2(\sqrt[n]{e}-1)}$, *vem*

$$\log u_n = n^2(\sqrt[n]{e}-1) \log\left(\frac{3n+2}{3n+4}\right)$$
$$= n^2(\sqrt[n]{e}-1) \log\left(1 - \frac{2}{3n+4}\right)$$
$$= n^2 \xi \frac{1}{n} \eta \left(-\frac{2}{3n+4}\right)$$
$$= \xi \eta \left(-\frac{2n}{3n+4}\right)$$

e, como $\xi \to 1$ *e* $\eta \to 1$, *vem* $\lim \log u_n = -2/3$ *o que implica* $\lim u_n = e^{-2/3}$.

2) $\sum\limits_0^\infty$ converge para S. Prove que $\sum\limits_0^\infty (u_n + u_{n+1})$ converge para $2S - u_0$. Construa uma série divergente $\sum\limits_0^\infty v_n$ tal que $\sum\limits_0^\infty (v_n + v_{n+1})$ convirja.

R.: *Tomando* S) $\sum\limits_0^\infty u_n$ *e* S') $\sum\limits_0^\infty (u_n + u_{n+1})$, *vem* $S'_n = S_n + S_{n+1} - u_0$ *e portanto* $S_n \to 2S - u_0$.

Considerando a série $\sum\limits_0^\infty (-1)^n$, *é fácil verificar que ela satisfaz à segunda parte do problema.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação — (1.ª chamada) — 2-5-1968.

I

5693 — 1) Mostre que a série

$$\sum_0^\infty \left(1 + \frac{1}{n!}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$$

é absolutamente convergente para $x > -1/2$ e demonstre que a sua soma é $f(x) = x + 1 + e^{x/x+1}$.

Indique, justificando, os pontos (próprios e impróprios) de continuidade e de descontinuidade de $x \to f(x)$.

2) Demonstre que o contradomínio de uma função f contínua num intervalo fechado $[a, b]$ é também um intervalo fechado. Em que condições o contradomínio é o intervalo $[f(a), f(b)]$? Justifique a resposta.

R.: 1) *Como* $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$, *a série é convergente para* $\left|\dfrac{x}{x+1}\right| < 1$, *desigualdade que conduz a* $x > -1/2$. *A soma obtém-se fàcilmente notando que a série pode considerar-se soma da série geométrica* $\sum\limits_0^\infty \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^n$ *e da série exponencial* $\sum\limits_0^\infty \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^n$.

Os pontos de descontinuidade de $x \to f(x)$ *são* $x = 1$, $x = -\infty$ *e* $x = +\infty$.

2) *A justificação da primeira pergunta é dada pelo teorema de Cauchy.*

O contradomínio é $[f(a), f(b)]$ *quando* $m = f(a)$ *e* $M = f(b)$.

II

5694 — 1) Tome a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; (0 \leq x < 1) \\ 2 \; (x = 1) \\ x + 2 \; (1 < x \leq 2). \end{cases}$$

Calcule $f'(1)$ e dê a expressão analítica da primeira derivada. Estude em $[0, 2]$ a monotonia, os extremos de f e represente geomètricamente a função.

Determine a função F com o campo de existência $X = [0,2] - \{1\}$ e que satisfaça às condições seseguintes: $\forall x \in X \; F'(x) = f(x)$, $\lim_{x=1} F = 3$.

2) Supondo $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$, utilize o teorema de Rolle para provar que o polinómio $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ tem pelo menos uma raiz entre 0 e 1.

R.: 1) $f'(1) = +\infty$ *e* $f'(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 < x \leq 2). \end{cases}$

Como em $[0,2]$ *é sempre* $f'(x) > 0$, *a função* f *é crescente nesse intervalo, apresentando um mínimo* $f(0) = 0$ *e um máximo* $f(2) = 4$.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + C & (0 \leq x < 1) \\ \frac{x^2}{2} + 2x + C' & (1 < x \leq 2) \end{cases}$$

e a condição imposta obriga a tomar $C = 8/3$ *e* $C' = 1/2$.

2) *Em virtude da condição dada, a primitiva do polinómio anula-se para* $x = 0$ *e* $x = 1$ *e portanto o teorema de* Rolle *garante que o polinómio tem pelo menos uma raiz entre* 0 *e* 1.

III

5695 — 1) Supondo que $\lim_{x=+\infty} f'(x) = A \neq 0$, recorra à teoria dos levantamentos de indeterminação para indicar $\lim_{x=+\infty} f(x)/x$. Qual é o $\lim_{x=+\infty} f(x)$? Justifique.

2) Demonstre que, sendo f crescente e convexa em $[a,b]$, a sua função inversa, f^{-1}, é côncava (admita a existência de derivadas até à segunda ordem).

R.: 1) $\lim_{x=+\infty} f'(x) = A \neq 0 \Rightarrow \lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{x} = A \neq 0$ *(teorema de Cauchy).*

Se $\lim_{x=+\infty} f(x)$ *fosse finito então* $\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Logo $\lim_{x=+\infty} f(x) = \infty$.

2) $(f^{-1})'' = -\frac{f''}{(f')^3} < 0$ *e portanto* f^{-1} *é côncava.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência e 2.º ponto de informação — (2.ª chamada) — 15-5-1968.

I

5696 — 1) Dada a série de potências cujo termo geral é $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$ $(n \geq 2)$, determine o seu intervalo de convergência e investigue o comportamento da série nos extremos do intervalo. Estude as séries de termos gerais $u'_n(x)$ e $u''_n(x)$ e determine sucessivamente as somas de $\Sigma u''_n(x)$, $\Sigma u'_n(x)$ e $\Sigma u_n(x)$, enunciando os teoremas que tiver necessidade de utilizar.

2) Prove que se uma função real de variável real é positiva ou nula na vizinhança de $x = a$ e possui limite quando $x \to a$, esse limite é positivo ou nulo.

Mostre que a função f definida por $f(x) = \frac{x+1}{x}$ é contínua em $Z = \{1\} \cup [2,4] \cup [5, +\infty[$. Mostre que são aplicáveis os teoremas de Dini e Weierstrass e verifique-os para f. Ache os extremos relativos de f em $[2,4]$ e esboce a imagem de f em Z.

R.: 1) *A série* $\Sigma u_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $[-1,1]$; $\Sigma u'_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $]-1,1[$, *sendo simplesmente convergente para* $x = 1$ *e* $\Sigma u''_n(x)$ *é absolutamente convergente em* $]-1,1[$.

$\Sigma u''_n(x) = \frac{1}{1+x}$ $\Sigma u'_n(x) = \log(1+x)$ $\Sigma u_n(x) = (x+1)\log(x+1) - x$.

2) *Sendo* $\lim_{x=0} f(x) = A$, *se fosse* $A < 0$ *poderia tomar-se* $\delta > 0$ *por forma que* $A + \delta < 0$ *e então existiria* $\varepsilon > 0$ *tal que* $x \in V_\varepsilon(a) \Rightarrow A - \delta < f(x) < A + \delta < 0$ *o que é absurdo.*

Para a função $f(x) = \frac{x+1}{x}$ *tem-se* $f(Z) = \{2\} \cup [5/4, 3/2] \cup [1, 6/5]$ *e* $m = f(+\infty) = 1$, $M = f(1) = 2$.

Em $[2,4]$ *os extremos relativos são* $M' = f(2) = 3/2$ *e* $m' = f(4) = 5/4$.

II

5697 — 1) Resolva os problemas seguintes:

a) Demonstre que a derivada de ordem n da função $x \to f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ é

$$x \to f^{(n)}(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 2nx \operatorname{sen}\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right] +$$

$$+ n(n-1)\operatorname{sen}\left[x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right].$$

b) Calcule $P \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{(1+\operatorname{arc\,sen} x)^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Supondo $f(a) = g(a)$ e $f'(x) \geqq g'(x)$ em $[a, b]$, utilize o teorema de LAGRANGE para provar que $f(b) \geqq g(b)$.

Sugestão: Empregue a função auxiliar $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.

R.: a) *Fazendo* $u = x^2$ *e* $v = sen\,x$, *tem-se* $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u^{(n)} = 0$ $(n \geqq 3)$ *e* $v^{(n)} = sen\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. *A fórmula de* LEIBNIZ *dá o resultado ràpidamente.*

b) *Fazendo* $arc\,sen\,x = t$, *a primitiva transforma-se em*

$$P\frac{t}{(1+t)^2} = P\frac{t+1-1}{(1+t)^2} =$$

$$= P\frac{1}{1+t} - P\frac{1}{(1+t)^2} = log\,|1+t| + \frac{1}{1+t}$$

e portanto

$$P\frac{arc\,sen\,x}{(1+arc\,sen\,x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= log\,|1\,arc\,sen\,x| + \frac{1}{1+arc\,sen\,x}.$$

2) $\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(c)$ $(a < c < b)$ *e portanto, como* $\varphi(a) = 0$ *e* $\varphi'(c) \geqq 0$, *vem imediatamente* $\varphi(b) \geqq 0$ *que traduz o resultado pretendido.*

III

5698 — 1) Desenvolva a função $x \to x^2$ em série segundo as potências de $y = \log(1+x)$.

Sugestão: Exprima x em função de y.

2) Seja f definida, derivável e convexa sobre $[a, b]$. Prove que, existindo $c \in]a, b[$ tal que $f(a) = f(b) = f(c)$, f é constante em $[a, b]$.

R.: 1) *De* $y = log(1+x)$ *vem* $x = e^y - 1$ *e* $x^2 = e^{2y} - 2e^y + 1$ *donde*

$$x^2 = \sum_0^\infty \frac{2^n}{n!}y^n - 2\sum_0^\infty \frac{y^n}{n!} + 1 =$$

$$= 1 + \sum_0^\infty (2^n - 2)\frac{y^n}{n!} = 1 + \sum_0^\infty (2^n - 2)\frac{[log(1+x)]^n}{n!}$$

2) *As condições impostas obrigam à existência de dois pontos* x_1 *e* x_2, *com* $a < x_1 < b$ *e* $b < x_2 < c$, *tais que* $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. *Como* $f'(x)$ *tem de ser crescente em* $[a, b]$, *será* $f'(x) \equiv 0$ *nesse intervalo o que implica que* f *é constante em* $[a, b]$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho (1.ª chamada) — Prova escrita — 24-6-1968.

5699 — 1) Seja U o conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ e considere as seguintes famílias de conjuntos:

a) $\phi, U, \{a, b, c\}, \{d, e\}$

b) $\phi, U, \{a, b\}, \{c, d\}, \{e\}, \{c, d, e\}$.

Prove que em relação às operações de reunião, intersecção e complementação a primeira família é uma álgebra de BOOLE e a segunda não é.

R.: *É fácil verificar que a família da alínea* a) *satisfaz à axiomática de uma álgebra de* BOOLE. *Em relação à família da alínea* b), *basta notar que* $\sim\{c, d\} = \{a, b, e\}$ *não pertence à família para se concluir que não é uma álgebra de* BOOLE.

2) Ache o intervalo de convergência da série

$$1 + \sum_2^\infty (-1)^n \frac{1}{n-1}\left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-1},$$

investigando o comportamento da série nos extremos desse intervalo. Prove que a sua soma é $\log x$.

R.: *Notando que*

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n-1}{n}\left|\frac{x-e}{e}\right| \to \left|\frac{x-e}{e}\right|,$$

a série é absolutamente convergente para

$$\left|\frac{x-e}{e}\right| < 1 \qquad (0 < x < 2e)$$

e divergente para

$$\left|\frac{x-e}{e}\right| > 1 \qquad (x < 0 \vee x > 2e).$$

Para $x = 0$ *obtém-se a série* $1 + \sum_2^\infty (-1)^{2n-1}\dfrac{1}{n-1}$ *que é divergente; para* $x = 2e$ *obtém-se*

$$1 + \sum_2^\infty (-1)^n \frac{1}{n-1}$$

que é simplesmente convergente.

Fazendo

$$f(x) = 1 + \sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-1} \left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-1}$$

vem

$$f'(x) = \frac{1}{e} \sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-2},$$

série geométrica cuja soma é $\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-e}{e}} = \frac{1}{x}$.

Então $f(x)$ *é a primitiva de* $1/x$ *que se anula para* $x = e$, *isto é,* $\log x - 1 = \sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x-e}{e}\right)^{n-1}$.

3) Resolva os problemas seguintes:

a) Pesquise os extremos da função definida por $f(x) = |x^2 - 1| + |x|$ em $[-1, 2]$.

b) Calcule $P \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

R.: a) *A função dada pode ser definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 - x & (-1 \leqq x \leqq 0) \\ 1 - x^2 + x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2 - 1 + x & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

Em $]-1, 0[$ *vem* $f'(x) = -2x - 1$ *e, como* $f'(-1/2) = 0$ *e* $f''(-1/2) < 0$, $x = -1/2$ *é maximizante; dado que* $f'_d(-1) > 0$ $x = -1$ *é minimizante. Note-se que* $f'_e(0) < 0$.

Em $]0, 1[$ *tem-se* $f'(x) = -2x + 1$ *e, como* $f'(1/2) = 0$ *e* $f''(1/2) < 0$, $x = 1/2$ *é maximizante; como* $f'_d(0) > 0$ *e anteriormente se obteve* $f'_e(0) < 0$ *pode garantir-se que* $x = 0$ *é minimizante. Observe-se que* $f'_e(1) < 0$.

Em $]1, 2[$ *é* $f'(x) = 2x + 1$ *e, como a derivada não se anula em nenhum ponto deste intervalo, não existem extremantes interiores*; $f'_d(1) > 0$ *e* $f'_e(2) > 0$ *o que permite concluir que* $x = 1$ *é minimizante e* $x = 2$ *é maximizante.*

b)
$$P \log(x + \sqrt{x^2+1}) = x \log(x + \sqrt{x^2+1}) - P \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x + \sqrt{x^2+1}}$$
$$= x \log(x + \sqrt{x^2+1}) - P \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= x \log(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C.$$

4) Dada a função $z = \log(e^x + e^y)$, verifique que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{d y} = 1$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

R.:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}.$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$$

A obtenção das relações apresentadas é imediata.

5) Mostre que o conjunto das matrizes da forma $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde a é elemento arbitrário do corpo K dos elementos, constitui um grupo abeliano em relação à multiplicação. Ache a inversa de A e calcule A^n (n inteiro positivo).

R.: *Notando que* $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *não é difícil mostrar que é satisfeita a axiomática de grupo comutativo*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; e \; A^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6) Sendo A matriz quadrada regular de ordem n, prove que os sistemas de n equações lineares a n incógnitas $AX = B$ e $A^{-1}X = C$ possuem a mesma solução se e só se $B = A^2 C$.

R.: *De* $AX = B$ *resulta* $X = A^{-1}B$ *e de* $A^{-1}X = C$ *vem* $X = AC$. *Logo* $A^{-1}B = AC$ *que dá imediatamente* $B = A^2 C$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Época de Julho (2.ª chamada) — Prova escrita — 5-7-1968.

5700 — 1) Seja Ω uma colecção de subconjuntos de um conjunto U e suponha que $A \cap B \in \Omega$ e $\sim A \in \Omega$ quando $A \in \Omega$ e $B \in \Omega$. Mostre que Ω é uma álgebra de Boole.

R.: *Sendo* A *e* B *disjuntos* $A \cap B = \emptyset$ *e portanto* $\emptyset \in \Omega$ *e* $U = \sim \emptyset \in \Omega$. *Por outro lado* $A \cup B = \sim(\sim A \cap \sim B) \in \Omega$. *Não é difícil depois verificar a veracidade dos axiomas que caracterizam a álgebra de* Boole.

2) Partindo da igualdade $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3$, prove que

$$\pi = \frac{10}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5}\right) - \frac{4}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7}\right) + \cdots .$$

R.: $$arctg\, x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$

$$\frac{\pi}{4} = arctg\,\frac{1}{2} + arctg\,\frac{1}{3} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}(2n+1)} + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{3^{n+1}(2n+1)} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

$$\pi = 4\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

3) Resolva os problemas seguintes:

a) Estude a monotonia, extremos e convexidade da função definida por $f(x) = x \log|x|$.

b) Calcule $P\,\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x+1}$.

R.: a) $f'(x) = log\,|x| + 1$

$f'(x) > 0 \Longrightarrow x < -1/e \vee x > 1/e$

$f'(x) < 0 \Longrightarrow -1/e < x < 1/e$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -1/e \vee x = 1/e$

$f(x)$ *é crescente em* $]-\infty, -1/e[$ *e* $]1/e, +\infty[$, *decrescente em* $]-1/e, 1/e[$; *possui máximo para* $x = -1/e$ *e mínimo para* $x = 1/e$.

Como $f''(x) = 1/x$, *a função é convexa em* $]0, +\infty[$ *e concava em* $]-\infty, 0[$.

b) $$P\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x+1} = P\,\frac{\sqrt{x}}{x+1} + P\,\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Fazendo $x = t^2$

$$P\,\frac{\sqrt{x}}{x+1} = 2\,P\,\frac{t^2}{t^2+1} = 2\,P\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) = 2t - 2\,arctg\,t = 2\sqrt{x} - 2\,arctg\,\sqrt{x}$$

$$P\,\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}$$

Logo,

$$P\,\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x+1} = 2\sqrt{x} - 2\,arctg\,\sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}.$$

4) Sendo $F(x, y) = f[x + g(y)]$, prove que é satisfeita a relação

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

R.: $$\frac{\partial F}{\partial x} = f'[x + g(y)], \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f''[x + g(y)],$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f''[x + g(y)]\; g'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f'[x + g(y)]\; g'(y).$$

Como

$$\frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f'[x + g(y)]\, f''[x + g(y)]\, g'(y)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f'[x + g(y)]\, f''[x + g(y)]\, g''(y),$$

está provada a relação.

5) Demonstre, sem calcular os valores dos determinantes, que

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+a_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

R.: *De facto,*

$$2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a+b & b+c & c \\ a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a+b & b+c \\ a_1 & a_1+b_1 & b_1+c_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & b_2+c_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b+c & c & a+b \\ b_1+c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b+c & a & a+b \\ b_1+c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}.$$

6) Estude o sistema de equações lineares sobre o corpo R

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a \end{cases}$$

R.:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right].$$

Se $a \neq 5$ *o sistema é impossível. Se* $a = 5$ *o sistema é possível duplamente indeterminado com*

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} x_3 - \frac{6}{5} x_4$$

$$x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} x_3 - \frac{7}{5} x_4 .$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª cadeira — Exame final — Epoca de Outubro — (1.ª chamada) — Prova escrita — 2-10-1968.

5701 — 1) Estude so ponto de vista da reflexividade, simetria e transitividade as seguintes relações binárias:

a) $x R y \Longleftrightarrow x$ e y são primos entre si (x e y inteiros)

b) $x R y \Longleftrightarrow x - y < 1$ (x e y reais)

c) $x R y \Longleftrightarrow |x - y| < 3$ (x e y reais).

2) Ache a soma da série redutível

$$\sum_1^{\infty} \log \left[\frac{n^2 + 3n + 2}{n(n+3)}\right].$$

3) Resolva os problemas seguintes:

a) Aplique o teorema dos acréscimos finitos à função definida por $f(x) = a + bx + c e^{\alpha x}$ no intervalo $[x ; x+h]$. Calcule θ na fórmula $f(x+h) - f(x) = h f'(x + \theta h)$ e mostre que θ é independente de x.

b) Calcule $P \operatorname{sen}(\log x)$.

4) Escreva os três primeiros termos da fórmula de Taylor segundo as potências de $x - 1$ para a função $x \rightarrow \varphi(x)$ definida implìcitamente por $x^2 + y^2 - 4xy + 2 = 0$.

5) Adicionando a 1.ª linha à terceira e comparando depois as 2.ª e 3.ª linhas, mostre que é nulo o determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ \cos a & \cos 2a & \cos 3a \\ \cos 2a & \cos 3a & \cos 4a \end{vmatrix}.$$

6) Diga-se

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

constitui um sistema fundamental de soluções para o sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Justifique a resposta.

R.: 1) a) *não reflexiva, simétrica e não transitiva*

b) *reflexiva, não simétrica e não transitiva*

c) *reflexiva, simétrica e não transitiva.*

2) *Como*

$$log\left[\frac{n^2 + 3n + 2}{n(n+3)}\right] = log\left[\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right] = $$
$$= log\left(\frac{n+2}{n}\right) - log\left(\frac{n+3}{n+1}\right),$$

vem

$$S_n = log\, 3 - log\left(\frac{n+3}{n+1}\right) \quad e \quad S = log\, 3 .$$

3) a) *Como* $f(x+h) - f(x) = bh + c e^{\alpha x}(e^{\alpha h} - 1)$ e $f'(x + \theta h) = b + \alpha c e^{\alpha(x + \theta h)}$, *o teorema dos acréscimos finitos estabelece que* $bh + c e^{\alpha x}(e^{\alpha h} - 1) = h[b + \alpha c e^{\alpha(x+\theta h)}]$, *com* $0 < \theta < 1$. *Desta relação vem* $\theta = \frac{1}{\alpha h} log\left(\frac{e^{\alpha h} - 1}{\alpha h}\right)$ *o que prova que* θ *é independente de* x.

b) $P\, sen\,(log\, x) = x\, sen\,(log\, x) - P\, cos\,(log\, x)$

$= x\, sen\,(log\, x) - [x\, cos\,(log\, x) + P\, sen\,(log\, x)]$

$= x\, sen\,(log\, x) - x\, cos\,(log\, x) - P\, sen\,(log\, x)$

e portanto

$$P\, sen\,(log\, x) = \frac{1}{2}\left[x\, sen\,(log\, x) - x\cos\,(log\, x)\right].$$

4) *Para* $x = 1$, *obtém-se da equação dada* $y_1 = 1$ *e* $y_1 = 3$ *e como, além da continuidade das devivadas parciais de* $f(x,y)$ *é* $f'_y(1,1) \neq 0$ *e* $f'_y(1,3) \neq 0$ *existem duas funções implícitas* $x \to \varphi_1(x)$ *e* $x \to \varphi_2(x)$, *respectivamente nas vizinhanças de* $P_1(1,1)$ *e* $P_2(1,3)$. *Notando que*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-4y}{2y-4x} = \frac{2y-x}{y-2x}$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f''_{x^2} + 2f''_{xy}\dfrac{dy}{dx} + f''_{y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{f'_y},$$

obtém-se

$$\varphi_1(x) = 1 - (x-1) + 6(x-1)^2 + \cdots$$
$$\varphi_2(x) = 3 + 5(x-1) - 6(x-1)^2 + \cdots$$

5) *Depois de efectuada a operação indicada, a terceira linha fica constituída por* $a_{31} = 2\cos^2 a$ $a_{32} = 2\cos 2a\cos a$ $a_{33} = 2\cos 3a\cos a$ *e verifica-ze fàcilmente que é o produto da 2.ª linha por* $2\cos a$. *De acords com as propriedades elementares dos determinantes,* $\Delta = 0$.

6) *A característica da matriz do sistema homogéneo é* 3 *e portanto é indeterminado de grau* 2. *O sistema possuirá apenas duas soluções independentes (sistema fundamental) e portanto pode garantir-se que as soluções apresentadas não constituem um sistema fundamental de soluções. Achando a característica da matriz apresentada, obter-se-á* 2 *e não é difícil verificar que apenas são independentes as duas primeiras linhas-soluções.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Epoca de Outubro — 2.ª chamada — Prova escrita — 10-10-1968.

5702 — 1) Considere o conjnnto $B = \{a, b, c, d\}$. Mostre que B é uma álgebra de Boole se «+», «><» e «~» são definidas do modo seguinte:

+	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

><	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

	~
a	d
b	c
c	b
d	a

2) Dada a série $\sum_1^\infty \log\cos\frac{x}{2^n}$, utilize a fórmula $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ para mostrar que $S_n = \log\operatorname{sen} x - n\log 2 - \log\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}$. Prove que a soma é $S = \log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$.

3) Resolva os problemas seguintes:

a) Determine m e n por forma que a imagem da função definida por $f(x) = \log(mx+n)$ passe pelo ponto $M(2,0)$ e possua a assíntota de equação $X = 1$. Mostre que $f(x)$ é côncava.

b) Calcule $P\operatorname{tg}^2\sqrt{x}$.

4) Mostre que

$$f(x,y) = k(\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{h/\alpha} \quad (\delta_1 + \delta_2 = 1)$$

é homogénea e verifique o teorema de Euler. Demonstre que $\varphi(x,y) = \lim_{\alpha=0} f(x,y)$ é ainda função homogénea com o mesmo grau de homogeneidade.

5) Ache i e j por forma que seja par o termo $a_{1i}\, a_{32}\, a_{4j}\, a_{25}\, a_{53}$ de uma matriz de 5.ª ordem.

6) Utilize a teoria dos determinantes para estudar o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = a \end{cases}$$

R.: 1) *Basta verificar os axiomas que caracterizam uma álgebra de* Boole.

2) *Da fórmula trigonométrica tira-se* $log\cos\theta = log\, sen\, 2\theta - log\, sen\,\theta - log\, 2$ *e portanto* $log\cos\frac{x}{2^n} = log\, sen\frac{x}{2^{n-1}} - log\, sen\frac{x}{2^n} - log\, 2$, *donde resulta imediatamente a fórmula apresentada para* S_n. *Escrevendo* S_n *na forma*

$$S_n = log\left(\frac{sen\, x}{2^n\, sen\dfrac{x}{2^n}}\right) = log\left(\frac{\dfrac{sen\, x}{x}}{\dfrac{sen\, x/2^n}{x/2^n}}\right),$$

obtém-se fàcilmente $lim\, S_n = log\left(\frac{sen\, x}{x}\right)$.

3) a) *As condições apresentadas exigem*

$$\begin{cases} 2m + n = 1 \\ m + n = 0 \end{cases} \quad \text{o que dá} \quad \begin{cases} m = 1 \\ n = -1 \end{cases}.$$

Como $f''(x) = -\dfrac{m^2}{(mx+n)^2} < 0$, *a função é côncava.*

b) *Fazendo* $x = t^2$, *vem*

$$\begin{aligned} P\, tg^2 \sqrt{x} &= 2\, P\, t\, tg^2\, t \\ &= 2\, P\, t\, (sec^2\, t - 1) \\ &= 2\, P\, t\, sec^2\, t - 2\, P\, t \\ &= 2\, [t\, tg\, t - P\, tg\, t] - t^2 \\ &= 2\, t\, tg\, t + 2\, log\, |\, cos\, t\, | - t^2 \\ &= 2\sqrt{x}\; tg\sqrt{x} + 2\, log\, |\, cos \sqrt{x}\, | - x\,. \end{aligned}$$

4) $f(tx, ty) = k\,[\delta_1 (tx)^\alpha + \delta_2 (ty)^\alpha]^{h/\alpha} =$
$= t^h\, k\, (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{h|\alpha}$

e portanto $f(x, y)$ *é homogénea de grau* h.

$$f'_x = k\, h\, \delta_1 (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{(h/\alpha)-1} \cdot x^{\alpha-1}$$

$$f'_y = k\, h\, \delta_2 (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{(h/\alpha)-1} \cdot y^{\alpha-1}$$

e o teorema de Euler *é de verificação imediata:*

$$x\, f'_x + y\, f'_Y = h\, f\,.$$

Como $(\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{1/\alpha}$ *é a média geral de* x^α *e* y^α *tem-se* $\lim\limits_{\alpha=0} (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{1/\alpha} = x^{\delta_1} y^{\delta_2}$ *(média geométrica). Logo,*

$$\varphi(x, y) = \lim_{\alpha=0} k\, (\delta_1 x^\alpha + \delta_2 y^\alpha)^{h/\alpha} = k\, x^{h\,\delta_1}\, y^{h\,\delta_2}$$

e não é difícil verificar que $\varphi(x, y)$ *também é função homogénea de grau* h.

5) $i = 1$, $j = 4$.

6) *A característica da matriz dos coeficientes é* 2. *Tomando o determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$, *obtêm-se os determinantes característicos*

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

e

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & a \end{vmatrix} = -a - 3\,.$$

Com $a \neq -3$ *o sistema é impossível e com* $a = -3$ *é possível indeterminado de grau* 1. *Neste caso a solução é* $x_1 = -5 + 3\,x_3$ *e* $x_2 = 9 - 4\,x_3$.

Enunciados e soluções dos n.os 5687 a 5702 de Fernando de Jesus

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — Análise Infinitesimal II — 19-10-68.

I

5703 — *a*) Continuidade uniforme em espaços métricos.

b) Seja E um espaço normado. Prove que se existe em E uma bola fechada de raio > 0, compacta, todo o conjunto limitado e fechado de E é compacto.

c) Defina espaço conexo e conjunto conexo. Prove que $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ com a topologia induzida por $\mathbb{R}^2$ é um espaço conexo.

II

5704 — *a*) Desigualdades de Cauchy. Teorema de Liouville.

b) Prove que se $f(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C}$ e tem um pólo de ordem k no ponto ∞, $f(z)$ é um polinómio de grau k.

III

5705 — *a*) Determine $f(z)$ holomorfa em $\mathbb{C}$ e tal que

$$\operatorname{Re} f(x + y\, i) = x^3 - 3\, x\, y^2 + x\,, \quad f(i) = 0\,.$$

b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ sendo f a função determinada em *a*), $\gamma(t) = r\, e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e $r \neq 1$.

c) Calcule pelo método dos resíduos

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} a\, x}{x\,(x^2 + a^2)}\, dx\,, \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Enunciados de V. Ferreira